Písemná zkouška z Matematiky I

Pondělí 27. 1. 2003

Skupina **B**

Jméno a příjmení:

UČO:

Maximální zisk za jednotlivé příklady: 10 bodů
Maximální možný celkový zisk: 70 bodů

Hodnocení podle bodového zisku:	70 – 50 bodů	—	výborně
	49 – 40 bodů	—	velmi dobře
	39 – 30 bodů	—	dobře
	29 – 0 bodů	—	nevyhověl

Pište jen na předložené papíry. K řešení můžete použít i zadní stranu papíru.

1. Najděte příklady uspořádání $\varkappa, \lambda, \mu$ na tříprvkové množině $\mathbb{Z}_3$ takových, aby platily následující podmínky. Uspořádání $\varkappa, \lambda, \mu$ přitom zadejte tak, že nakreslíte Hasseovské diagramy příslušných uspořádaných množin $(\mathbb{Z}_3, \varkappa)$, $(\mathbb{Z}_3, \lambda)$, $(\mathbb{Z}_3, \mu)$.

a) $(\varkappa \circ \lambda) \cap (\lambda^{-1} \circ \varkappa^{-1}) \neq \Delta_{\mathbb{Z}_3}$:

$(\mathbb{Z}_3, \varkappa)$: $(\mathbb{Z}_3, \lambda)$:

b) $\varkappa \cup \lambda \neq (\varkappa \cup \lambda) \circ (\varkappa \cup \lambda)$:

$(\mathbb{Z}_3, \varkappa)$: $(\mathbb{Z}_3, \lambda)$:

c) $\varkappa \circ \lambda \neq \varkappa \circ \lambda \circ \varkappa \circ \lambda$:

$(\mathbb{Z}_3, \varkappa)$: $(\mathbb{Z}_3, \lambda)$:

d) $(\varkappa \cap \lambda) \circ \mu \neq (\varkappa \circ \mu) \cap (\lambda \circ \mu)$:

$(\mathbb{Z}_3, \varkappa)$: $(\mathbb{Z}_3, \lambda)$: $(\mathbb{Z}_3, \mu)$:

e) $(\varkappa - \lambda) \circ \mu \neq (\varkappa \circ \mu) - (\lambda \circ \mu)$:

$(\mathbb{Z}_3, \varkappa)$: $(\mathbb{Z}_3, \lambda)$: $(\mathbb{Z}_3, \mu)$:

2. O každém z následujících tvrzení rozhodněte, zda je pravdivé či nikoliv. Pokaždé odpovězte slovem "ano" nebo slovem "ne".

a) $\{\{\emptyset\}\} \subseteq \{\{\{\emptyset\}\}\}$:

b) $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}$:

c) $\{\{\emptyset\}\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$:

d) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$:

e) $\mathcal{P}(\{\{\emptyset\}\}) \subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$:

f) $\{\{\emptyset\}\} \subseteq \mathcal{P}(\{\{\emptyset\}\})$:

g) $\emptyset^{\{\emptyset\}} = \emptyset$:

h) $\{\{\emptyset\}\} \in \{\emptyset\}^{\{\emptyset\}}$:

i) $\{\emptyset\}^{\{\emptyset\}} \cong \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$:

j) $\mathcal{P}(\emptyset) \times \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) \cong \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) \times \mathcal{P}(\emptyset)$:

3. O každé z následujících binárních relací $\varrho \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ rozhodněte, zda je reflexivní, symetrická, případně tranzitivní. Na každou z otázek odpovězte slovem "ano" nebo "ne".

a) $(\forall a, b \in \mathbb{Z})(\, a \,\varrho\, b \iff a^2 \leq |b|\,)$:

Reflexivní: Symetrická: Tranzitivní:

b) $(\forall a, b \in \mathbb{Z})(\, a \,\varrho\, b \iff \max\{a, b\} = a + b\,)$:

Reflexivní: Symetrická: Tranzitivní:

c) $(\forall a, b \in \mathbb{Z})(\, a \,\varrho\, b \iff a \cdot b = |a \cdot b|\,)$:

Reflexivní: Symetrická: Tranzitivní:

d) $(\forall a, b \in \mathbb{Z})(\, a \,\varrho\, b \iff (\exists c \in \mathbb{N})(a = b \cdot c)\,)$:

Reflexivní: Symetrická: Tranzitivní:

e) $(\forall a, b \in \mathbb{Z})(\, a \,\varrho\, b \iff (\forall c \in \mathbb{N})(a \cdot c \leq b)\,)$:

Reflexivní: Symetrická: Tranzitivní:

4. Řešte následující úlohy:

a) Nechť $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$. Určete koeficient u x^2 v rozvoji výrazu

$$\left(\sqrt[m]{x} + \sqrt[n]{x}\right)^{m+n}.$$

b) Nechť $n, k \in \mathbb{N}$. Určete, kolik řešení má nerovnice

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k \leq n$$

v oboru nezáporných celých čísel.

c) Zjistěte, kolik je čísel od 1 do 100 000, která nejsou dělitelná žádným z čísel $7, 11, 15$. Vysvětlete princip vašeho postupu.

5. V každém z následujících případů rozhodněte, zda třída $[a]_n$ má inverzní prvek v monoidu $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$, uveďte důvod vašeho rozhodnutí a v pozitivním případě nalezněte třídu, která je inverzním prvkem ke třídě $[a]_n$.

a) $n = 45\,689, \quad a = 4\,322:$

b) $n = 3\,777\,774, \quad a = 944\,435:$

6. V grupě $(S_6, \circ)$ všech permutací množiny $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ najděte podgrupu generovanou permutacemi

$$(1\,3\,6) \circ (2\,4\,5) \quad \text{a} \quad (1\,4\,6) \circ (2\,3\,5).$$

Vypište všechny prvky této podgrupy.

7. Buď $(A, \leq)$ uspořádaná množina, v níž pro každou podmnožinu $D \subseteq A$ existuje infimum množiny D. Dokažte, že pak $(A, \leq)$ je úplný svaz.