Písemná zkouška z Matematiky I

Pondělí 27. 1. 2003

Skupina **A**

Jméno a příjmení:
UČO:

Maximální zisk za jednotlivé příklady: 10 bodů
Maximální možný celkový zisk: 70 bodů

Hodnocení podle bodového zisku:	70 – 50 bodů	—	výborně
	49 – 40 bodů	—	velmi dobře
	39 – 30 bodů	—	dobře
	29 – 0 bodů	—	nevyhověl

Pište jen na předložené papíry. K řešení můžete použít i zadní stranu papíru.

1. Najděte příklady uspořádání μ, ν, λ na tříprvkové množině $\mathbb{Z}_3$ takových, aby platily následující podmínky. Uspořádání μ, ν, λ přitom zadejte tak, že nakreslíte Hasseovské diagramy příslušných uspořádaných množin $(\mathbb{Z}_3, \mu)$, $(\mathbb{Z}_3, \nu)$, $(\mathbb{Z}_3, \lambda)$.

a) $\mu \cup \nu \neq (\mu \cup \nu) \circ (\mu \cup \nu)$:

$(\mathbb{Z}_3, \mu)$: $(\mathbb{Z}_3, \nu)$:

b) $\mu \circ \nu \neq \mu \circ \nu \circ \mu \circ \nu$:

$(\mathbb{Z}_3, \mu)$: $(\mathbb{Z}_3, \nu)$:

c) $(\mu \circ \nu) \cap (\nu^{-1} \circ \mu^{-1}) \neq \Delta_{\mathbb{Z}_3}$:

$(\mathbb{Z}_3, \mu)$: $(\mathbb{Z}_3, \nu)$:

d) $\lambda \circ (\mu \cap \nu) \neq (\lambda \circ \mu) \cap (\lambda \circ \nu)$:

$(\mathbb{Z}_3, \mu)$: $(\mathbb{Z}_3, \nu)$: $(\mathbb{Z}_3, \lambda)$:

e) $\lambda \circ (\mu - \nu) \neq (\lambda \circ \mu) - (\lambda \circ \nu)$:

$(\mathbb{Z}_3, \mu)$: $(\mathbb{Z}_3, \nu)$: $(\mathbb{Z}_3, \lambda)$:

2. O každém z následujících tvrzení rozhodněte, zda je pravdivé či nikoliv. Pokaždé odpovězte slovem "ano" nebo slovem "ne".

a) $\{\{\emptyset\}\} \in \{\{\emptyset\}\}$:

b) $\{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}$:

c) $\{\{\emptyset\}\} \subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$:

d) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$:

e) $\mathcal{P}(\{\{\emptyset\}\}) \supseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$:

f) $\{\{\emptyset\}\} \in \mathcal{P}(\{\{\emptyset\}\})$:

g) $\{\emptyset\}^{\emptyset} = \emptyset$:

h) $\mathcal{P}(\emptyset) \times \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) \times \mathcal{P}(\emptyset)$:

i) $\{\emptyset\}^{\{\emptyset\}} \cong \{\emptyset\}$:

j) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))^{\{\emptyset\}} \cong \{\emptyset\}$:

3. O každé z následujících binárních relací $\varrho \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ rozhodněte, zda je reflexivní, symetrická, případně tranzitivní. Na každou z otázek odpovězte slovem "ano" nebo "ne".

a) $(\forall a, b \in \mathbb{Z})(\, a \,\varrho\, b \iff a \leq b^2 \,)$:

Reflexivní: Symetrická: Tranzitivní:

b) $(\forall a, b \in \mathbb{Z})(\, a \,\varrho\, b \iff |a| \leq \sqrt{|b|} \,)$:

Reflexivní: Symetrická: Tranzitivní:

c) $(\forall a, b \in \mathbb{Z})(\, a \,\varrho\, b \iff \sqrt{a^2 + b^2} \geq |a| + |b| \,)$:

Reflexivní: Symetrická: Tranzitivní:

d) $(\forall a, b \in \mathbb{Z})(\, a \,\varrho\, b \iff a \cdot b \in \mathbb{N} \,)$:

Reflexivní: Symetrická: Tranzitivní:

e) $(\forall a, b \in \mathbb{Z})(\, a \,\varrho\, b \iff (\exists c \in \mathbb{N})(b = a \cdot c) \,)$:

Reflexivní: Symetrická: Tranzitivní:

4. Řešte následující úlohy:

a) Nechť $k, \ell \in \mathbb{N}$, $k \neq \ell$. Určete koeficient u $x^{2k\ell}$ v rozvoji výrazu

$$\left(x^k + x^\ell\right)^{k+\ell}.$$

b) Nechť $n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$. Určete, kolik řešení má rovnice

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$$

v oboru kladných celých čísel, tj. v oboru přirozených čísel.

c) Zjistěte, kolik je čísel od 1 do 100 000, která nejsou dělitelná žádným z čísel $7, 9, 11$. Vysvětlete princip vašeho postupu.

5. V každém z následujících případů rozhodněte, zda třída $[a]_n$ má inverzní prvek v monoidu $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$, uveďte důvod vašeho rozhodnutí a v pozitivním případě nalezněte třídu, která je inverzním prvkem ke třídě $[a]_n$.

a) $n = 13\,579, \quad a = 2\,468:$

b) $n = 1\,444\,443, \quad a = 722\,202:$

6. V grupě $(S_6, \circ)$ všech permutací množiny $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ najděte podgrupu generovanou permutacemi

$$(1\,2\,4) \circ (3\,5\,6) \quad \text{a} \quad (1\,4\,5) \circ (2\,3\,6).$$

Vypište všechny prvky této podgrupy.

7. Buď $(A, \leq)$ uspořádaná množina, v níž pro každou podmnožinu $C \subseteq A$ existuje supremum množiny C. Dokažte, že pak $(A, \leq)$ je úplný svaz.