Regulární matice

Budeme dále věnovat pozornost zejména čtvercovým maticím. Nejprve dokážeme následující poznatek. Poté bude následovat definice pojmu, co je regulární matice.

Věta. Pro každou čtvercovou matici $A = (a_{ij})$ řádu n nad tělesem $(T, +, \cdot)$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

(i) Řádky matice A jsou lineárně nezávislé.
(ii) Sloupce matice A jsou lineárně nezávislé.
(iii) Hodnost matice A je rovna n.
(iv) Determinant $|A|$ je nenulový.

Důkaz. Ekvivalence prvních tří podmínek plyne z definice řádkové a sloupcové hodnosti matice A a z poznatku odvozeného v předchozí kapitole, že jde o stejná čísla, tedy o hodnost matice A. Zbývá dokázat ekvivalenci těchto tří podmínek s poslední podmínkou.

Nechť tedy hodnost matice A je rovna n, takže řádky matice A jsou lineárně nezávislé. Elementárními řádkovými úpravami, tak jak bylo popsáno v prvním odstavci důkazu posledního tvrzení v minulé kapitole, se matice A převede na schodovitý tvar. Přitom se použijí pouze řádkové úpravy typu (ii) a přehazování řádků. Na hodnosti matice ani na lineární nezávislosti jejích řádků se tím nic nezmění. Z příslušných tvrzení v kapitole o determinantech navíc plyne, že hodnota determinantu může těmito úpravami nanejvýš změnit znaménko. Poněvadž řádky matice ve schodovitém tvaru jsou lineárně nezávislé, není mezi nimi vespod matice žádný nulový řádek, což nutně znamená, že všechny hlavní prvky leží na hlavní diagonále a že ji vyplní celou. Poněvadž jde o matici v horním trojúhelníkovém tvaru, je podle jiného tvrzení z kapitoly o determinantech její determinant roven součinu prvků ležících na hlavní diagonále. Jedná se tedy o součin hlavních prvků, a ten je nenulový. Takže také determinant $|A|$ je nenulový.

Nechť naopak řádky matice A jsou lineárně závislé. Je-li A nulová matice, je její determinant roven nule. V opačném případě je $n > 1$ a podle prvního tvrzení z předminulé kapitoly je některý řádek matice A lineární kombinací ostatních řádků této matice. To ale znamená, že několika elementárními řádkovými úpravami typu (ii) lze dotyčný řádek učinit nulovým řádkem. Podle příslušného tvrzení z kapitoly o determinantech se tím hodnota determinantu matice nezmění. Podle jiného tvrzení ze zmíněné kapitoly je hodnota determinantu matice s nulovým řádkem rovna nule. Takže i determinant $|A|$ je roven nule.

Čtvercová matice $A = (a_{ij})$ řádu n nad tělesem $(T, +, \cdot)$, která splňuje ekvivalentní podmínky z předchozí věty, se nazývá **regulární matice**. Nesplňuje-li taková čtvercová matice A podmínky z předchozí věty, říkáme, že je to **singulární matice**.

Buď $(T, +, \cdot)$ těleso a buď m přirozené číslo. Pro každý index $i \in \{1, \ldots, m\}$ a pro každý prvek $r \in T$, $r \neq 0$ označme $E_i(r)$ čtvercovou matici řádu m, která se liší od jednotkové matice E_m pouze tím, že na hlavní diagonále v i-tém řádku a v i-tém sloupci má prvek r. Dále pro každé dva indexy $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, $i \neq j$ a pro každý prvek $r \in T$ označme $E_{ij}(r)$ čtvercovou matici řádu m, která se liší od jednotkové matice E_m pouze tím, že na pozici mimo hlavní diagonálu v i-tém řádku a v j-tém sloupci má prvek r. Matice $E_i(r)$ a $E_{ij}(r)$ se nazývají **elementární matice** řádu m. Je jasné, že tyto matice jsou regulární, neboť $|E_i(r)| = r \neq 0$ a $|E_{ij}(r)| = 1$.

Buď dále $A = (a_{ij})$ matice typu m/n nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Z definice násobení matic a z popisu elementárních řádkových úprav z minulé kapitoly je evidentní, že provedení elementární řádkové úpravy typu (i) s maticí A pro zvolená $i \in \{1, \ldots, m\}$ a $r \in T$, $r \neq 0$ dá tentýž výsledek jako vynásobení matice A zleva elementární maticí $E_i(r)$. Podobně provedení elementární řádkové úpravy typu (ii) s maticí A pro zvolená $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, $i \neq j$ a $r \in T$ dá týž výsledek jako vynásobení matice A zleva elementární maticí $E_{ij}(r)$. Obdobná tvrzení platí i pro elementární sloupcové úpravy, používají-li se elementární matice řádu n a násobí-li se jimi matice A zprava (indexy i, j matice $E_{ij}(r)$ se ale prohodí).

Tvrzení. Pro libovolnou čtvercovou matici $A = (a_{ij})$ řádu n nad tělesem $(T, +, \cdot)$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

(i) Matice A je regulární.

(ii) Matice A je řádkově ekvivalentní jednotkové matici E_n.

(iii) Matice A je součinem několika elementárních matic řádu n.

Důkaz. Je-li matice A regulární, lze ji podle posledního tvrzení z minulé kapitoly převést elementárními řádkovými úpravami na Gauss-Jordanův tvar. Výsledná matice v tomto tvaru je přitom stále regulární, takže její hlavní prvky, jež jsou rovny 1, vyplní hlavní diagonálu a všechny ostatní prvky mimo diagonálu jsou rovny 0. Tak ovšem vzniká jednotková matice E_n, čili matice A je řádkově ekvivalentní této jednotkové matici E_n.

Je-li matice A je řádkově ekvivalentní jednotkové matici E_n, tedy platí-li $A \sim E_n$, pak poněvadž je tato relace symetrická podle poznámek z úvodu minulé kapitoly, platí rovněž $E_n \sim A$. Lze tedy rovněž konečnou posloupností elementárních řádkových úprav převést jednotkovou matici E_n na matici A. Poněvadž každou elementární řádkovou úpravu lze realizovat vynásobením některou elementární maticí řádu n zleva, je matice A součinem konečné posloupnosti takových elementárních matic.

Je-li konečně matice A součinem elementárních matic, pak je tato matice součinem regulárních matic, neboť elementární matice jsou regulární. Viděli jsme totiž, že determinanty elementárních matic jsou nenulové. Podle Cauchyovy věty pak také jakýkoliv součin takových matic má nenulový determinant a je tedy regulární maticí. Takže i matice A je regulární.

Důsledek. Dvě matice A a B typu m/n nad tělesem $(T, +, \cdot)$ jsou řádkově ekvivalentní, tedy splňují $A \sim B$, právě tehdy, když existuje regulární čtvercová matice C řádu m nad tělesem $(T, +, \cdot)$ taková, že $B = C \cdot A$.

Důkaz plyne bezprostředně z ekvivalence první a poslední podmínky v předchozím tvrzení.

V kapitole o maticích jsme viděli, že množina $\mathrm{Mat}_{nn}(T)$ všech čtvercových matic řádu n nad tělesem $(T, +, \cdot)$ tvoří vzhledem k operaci $\cdot$ násobení matic monoid $(\mathrm{Mat}_{nn}(T), \cdot)$. Jeho neutrálním prvkem je jednotková matice E_n. Zajímají nás nyní invertibilní prvky tohoto monoidu, tedy invertibilní čtvercové matice řádu n nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Čtvercová matice A řádu n je invertibilní, existuje-li k ní čtvercové matice B řádu n taková, že platí $A \cdot B = E_n = B \cdot A$. Pak matice B se nazývá **inverzní matice** k matici A. Z kapitoly o monoidech víme, že inverzní matice k matici A, pokud existuje, je jediná, a značíme ji A^{-1}.

Věta. Čtvercová matice A řádu n nad tělesem $(T, +, \cdot)$ je invertibilní právě tehdy, když je regulární.

Důkaz. Je-li daná čtvercová matice A řádu n invertibilní, existuje čtvercová matice B řádu n taková, že $A \cdot B = E_n$. Podle Caychyovy věty odtud plyne, že $|A| \cdot |B| = |A \cdot B| = |E_n| = 1$, takže $|A| \neq 0$ a matice A je tedy regulární.

Je-li naopak čtvercová matice A řádu n regulární, je podle předchozího tvrzení řádkově ekvivalentní jednotkové matici E_n, takže podle posledního důsledku existuje regulární čtvercová matice C řádu n taková, že $C \cdot A = E_n$. Transponovaná matice $A^\top$ je pak ovšem podle definice také regulární, takže ze stejných důvodů existuje regulární čtvercová matice D řádu n taková, že

$D \cdot A^\top = E_n$. Odtud transponováním plyne, že $A \cdot D^\top = E_n$. Přitom $C = C \cdot E_n = C \cdot A \cdot D^\top = E_n \cdot D^\top = D^\top$, takže celkem $C = D^\top$ je inverzní matice k matici A.

Připomeňme z kapitoly o monoidech a grupách, že pro libovolné dvě regulární čtvercové matice A a B řádu n platí

$$(A^{-1})^{-1} = A \qquad \text{a} \qquad (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

Je také užitečné poznamenat, že jakmile o čtvercových maticích A a B řádu n víme, že platí jedna z rovností

$$A \cdot B = E_n \qquad \text{nebo} \qquad B \cdot A = E_n,$$

pak odtud vyplyne, že tyto rovnosti jsou splněny obě a že tudíž obě matice A, B jsou invertibilní a přitom jedna ke druhé navzájem inverzní. Skutečně platí-li například rovnost $A \cdot B = E_n$, pak stejně jako v předchozím důkaze zjistíme, že obě matice A, B jsou regulární a existují k nim tudíž inverzní matice A^{-1} a B^{-1}. Dále odtud dostáváme $B = E_n \cdot B = A^{-1} \cdot A \cdot B = A^{-1} \cdot E_n = A^{-1}$, čili $B = A^{-1}$ a platí tudíž i rovnost $B \cdot A = E_n$.

Z kapitoly o monoidech a grupách též připomeňme, že množina regulárních čtvercových matic řádu n nad tělesem $(T, +, \cdot)$, tedy množina všech invertibilních matic v monoidu $(\mathrm{Mat}_{nn}(T), \cdot)$ je uzavřená vzhledem k násobení matic a že takto sama tvoří grupu. Tuto množinu všech regulárních čtvercových matic řádu n nad tělesem $(T, +, \cdot)$ bývá zvykem označovat symbolem $\mathrm{GL}_n(T)$ a mluví se v této souvislosti o **obecné lineární grupě** stupně n nad $(T, +, \cdot)$. Z Cauchyovy věty dále například plyne, že množina všech čtvercových matic řádu n nad tělesem $(T, +, \cdot)$, jejichž determinant je roven 1, tvoří podgrupu v $\mathrm{GL}_n(T)$. Tuto podgrupu bývá obvyklé označovat symbolem $\mathrm{SL}_n(T)$ a mluví se o ní jako o **speciální lineární grupě** stupně n nad $(T, +, \cdot)$.

Ukážeme nyní, jakým způsobem se uplatní inverzní matice v problematice vektorových prostorů v souvislosti s maticemi přechodu mezi různými bázemi daného vektorového prostoru konečné dimenze.

Tvrzení. Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ je nenulový vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Nechť $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$ a $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n$ jsou dvě báze prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a nechť $A = (a_{ij})$ je matice přechodu od báze $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$ k bázi $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n$. Pak A je regulární matice a matice A^{-1} k ní inverzní je maticí přechodu od báze $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n$ k bázi $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$.

Důkaz. Označme zprvu $B = (b_{ij})$ matici přechodu od báze $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n$ k bázi $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$. Podle toho, co bylo výše řečeno, stačí, když ukážeme, že součin $A \cdot B$ je jednotková matice E_n řádu n. Ovšem podle definice matic přechodu pro každé $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ je $\mathbf{g}_j = a_{1j}\cdot\mathbf{f}_1 + a_{2j}\cdot\mathbf{f}_2 + \cdots + a_{nj}\cdot\mathbf{f}_n$ a současně pro každé $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ je také $\mathbf{f}_j = b_{1j}\cdot\mathbf{g}_1 + b_{2j}\cdot\mathbf{g}_2 + \cdots + b_{nj}\cdot\mathbf{g}_n$. Takže odtud dosazením pro každé $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ vychází, že $\mathbf{f}_j = b_{1j}\cdot(a_{11}\cdot\mathbf{f}_1 + a_{21}\cdot\mathbf{f}_2 + \cdots + a_{n1}\cdot\mathbf{f}_n) + b_{2j}\cdot(a_{12}\cdot\mathbf{f}_1 + a_{22}\cdot\mathbf{f}_2 + \cdots + a_{n2}\cdot\mathbf{f}_n) + \cdots + b_{nj}\cdot(a_{1n}\cdot\mathbf{f}_1 + a_{2n}\cdot\mathbf{f}_2 + \cdots + a_{nn}\cdot\mathbf{f}_n) = (a_{11}\cdot b_{1j} + a_{12}\cdot b_{2j} + \cdots + a_{1n}\cdot b_{nj})\cdot\mathbf{f}_1 + (a_{21}\cdot b_{1j} + a_{22}\cdot b_{2j} + \cdots + a_{2n}\cdot b_{nj})\cdot\mathbf{f}_2 + \cdots + (a_{n1}\cdot b_{1j} + a_{n2}\cdot b_{2j} + \cdots + a_{nn}\cdot b_{nj})\cdot\mathbf{f}_n$. V poslední lineární kombinaci jsou ovšem koeficienty u vektorů $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$ právě prvky j-tého sloupce matice $A \cdot B$. Poněvadž souřadnice každého vektoru z $\mathbf{V}$ v bázi $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$ jsou určeny jednoznačně, a poněvadž současně máme $\mathbf{f}_j = 0\cdot\mathbf{f}_1 + \cdots + 0\cdot\mathbf{f}_{j-1} + 1\cdot\mathbf{f}_j + 0\cdot\mathbf{f}_{j+1} + \cdots + 0\cdot\mathbf{f}_n$ pro všechna $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, plyne odtud, že $A \cdot B = E_n$, jak bylo třeba. Takže $B = A^{-1}$.

Závěrem kapitoly se věnujeme metodám výpočtu inverzních matic. Mějme tedy regulární čtvercovou matici $A = (a_{ij})$ řádu n nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Viděli jsme, že pak $A \sim E_n$, čili provedením několika elementárních řádkových úprav lze z matice A dostat matici E_n. Vynásobme elementární matice řádu n odpovídající těmto řádkovým úpravám, přičemž je mějme seřazené v tomto součinu podle pořadí aplikace příslušných řádkových úprav zprava doleva. Tak vznikne matice C, přičemž vynásobení matice A maticí C zleva znamená právě provedení zmíněné posloupnosti elementárních řádkových úprav s maticí A. Takže pak máme $C \cdot A = E_n$ a podle toho, co bylo řečeno výše, je tedy C inverzní maticí k matici A. Provedeme-li ovšem tutéž posloupnost elementárních řádkových úprav také s maticí E_n, dostaneme tím z týchž důvodů matici $C \cdot E_n = C$, tedy samotnou inverzní matici k matici A. Myšlenka, o kterou se nyní opírá metoda výpočtu inverzní matice k dané čtvercové matici A řádu n, spočívá v provádění týchž elementárních řádkových úprav s oběma maticemi A i E_n současně. Přitom volíme tyto úpravy tak, aby převedly matici A do Gauss-Jordanova tvaru. Je-li matice A regulární, vznikne tak jednotková matice E_n, takže takto po několika krocích obdržíme řádkově ekvivalentní matice

$$(A \,|E_n) \sim \cdots \sim (E_n| \,C)\,,$$

kde $C = A^{-1}$. Není-li matice A regulární, vyjde nám v jejím Gauss-Jordanově tvaru alespoň jeden nulový řádek.

Jinou možnost, jak počítat inverzní matici, poskytuje následující výsledek. Mějme regulární čtvercovou matici $A = (a_{ij})$ řádu $n > 1$ nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Připomeňme, že v kapitole o determinantech jsme pro každá $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ definovali algebraický doplněk $\widehat{A}_{ij}$ prvku a_{ij} v matici A. Vezměme čtvercovou matici $\widehat{A} = (\widehat{A}_{ij})$ řádu n složenou z těchto algebraických doplňků a k ní transponovanou matici $A^* = \widehat{A}^{\top}$. Tato matice A^* se nazývá **adjungovaná matice** k matici A. Nyní můžeme formulovat následující fakt:

Věta. Buď $A = (a_{ij})$ regulární čtvercová matice řádu $n > 1$ nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Pak platí

$$A^{-1} = |A|^{-1} \cdot A^*.$$

Důkaz. Podle toho, co bylo uvedeno shora, stačí ukázat, že součin matice A s maticí $|A|^{-1} \cdot A^*$ je roven jednotkové matici E_n. Neboli stačí ukázat, že $A \cdot A^* = |A| \cdot E_n$. Zvolme proto nejprve libovolný index $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ a vypočtěme prvek ležící v matici $A \cdot A^*$ na diagonále v i-tém řádku a v i-tém sloupci. Tento prvek je ovšem roven $a_{i1} \cdot \widehat{A}_{i1} + a_{i2} \cdot \widehat{A}_{i2} + \cdots + a_{in} \cdot \widehat{A}_{in} = |A|$ podle věty o Laplaceově rozvoji determinantu $|A|$, a to je odpovídající diagonální prvek matice $|A| \cdot E_n$. Zvolme dále libovolné indexy $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$ a vypočtěme prvek ležící v matici $A \cdot A^*$ na pozici mimo diagonálu v i-tém řádku a v j-tém sloupci. Tento prvek vychází roven $a_{i1} \cdot \widehat{A}_{j1} + a_{i2} \cdot \widehat{A}_{j2} + \cdots + a_{in} \cdot \widehat{A}_{jn} = 0$, neboť jde o Laplaceův rozvoj determinantu z matice, která se od matice A liší v tom, že se v ní místo j-tého řádku opakuje i-tý řádek. Podle jednoho z tvrzení v kapitole o determinantech je ovšem determinant z matice mající dva stejné řádky roven nule. Prvky matice $|A| \cdot E_n$ ležící mimo diagonálu jsou ovšem nulové. To potvrzuje rovnost $A \cdot A^* = |A| \cdot E_n$, kterou bylo třeba dokázat.