Písemná zkouška z Matematiky II

Středa 28. 5. 2003

Skupina **B**

Jméno a příjmení:

UČO:

Maximální zisk za jednotlivé příklady: 10 bodů
Maximální možný celkový zisk: 50 bodů

Hodnocení podle bodového zisku:	50 – 40 bodů	—	výborně
	39 – 30 bodů	—	velmi dobře
	29 – 20 bodů	—	dobře
	19 – 0 bodů	—	nevyhověl

Pište jen na předložené papíry. K řešení můžete použít i zadní stranu papíru.

1. Najděte normovaného největšího společného dělitele polynomů $f, g \in \mathbb{R}[x]$, kde

$$f = x^5 - 5x^4 + 4x^3 + 8x^2 - 8x - 3, \quad g = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 3.$$

Najděte koeficienty v příslušné Bezoutově rovnosti.

2. Najděte inverzní matici ke čtvercové matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

řádu n nad $\mathbb{R}$.

3. Nad $\mathbb{R}$ řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned}
x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 7x_4 + 9x_5 &= 8,\\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0,\\
9x_1 - 7x_2 + 5x_3 - 3x_4 + x_5 &= 2,\\
x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + qx_5 &= q.
\end{aligned}$$

Proveďte diskusi řešení v závislosti na hodnotě parametru $q \in \mathbb{R}$.

4. Nechť lineární transformace $\gamma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ má vzhledem k bázi

$$\mathbf{g}_1 = (1,1,2),\ \mathbf{g}_2 = (1,0,1),\ \mathbf{g}_3 = (2,1,1)$$

prostoru $\mathbb{R}^3$ matici

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nechť lineární zobrazení $\delta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ je zadáno svými hodnotami na vektorech kanonické báze prostoru $\mathbb{R}^3$:

$$\delta((1,0,0)) = (1,2,-1,-2),\quad \delta((0,1,0)) = (1,-2,-1,2),\quad \delta((0,0,1)) = (2,-1,-2,1).$$

Najděte matici složeného lineárního zobrazení $\delta \circ \gamma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ vzhledem ke kanonickým bázím prostorů $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^4$.

5. Buď $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Nechť $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k \in \mathbf{V}$ jsou libovolné vektory, přičemž $k \geq 2$ a $\mathbf{u}_k \neq \mathbf{o}$. Dokažte, že potom vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když existuje index $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ takový, že vektor $\mathbf{u}_i$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{u}_{i+1}, \ldots, \mathbf{u}_k$.