Písemná zkouška z Matematiky II

Středa 28. 5. 2003

Skupina **A**

Jméno a příjmení:
UČO:

Maximální zisk za jednotlivé příklady: 10 bodů
Maximální možný celkový zisk: 50 bodů

Hodnocení podle bodového zisku:	50 – 40 bodů	— výborně
	39 – 30 bodů	— velmi dobře
	29 – 20 bodů	— dobře
	19 – 0 bodů	— nevyhověl

Pište jen na předložené papíry. K řešení můžete použít i zadní stranu papíru.

1. Najděte normovaného největšího společného dělitele polynomů $f, g \in \mathbb{R}[x]$, kde

$$f = x^5 - 4x^4 + 9x^3 - 9x^2 + 8x - 5, \quad g = x^4 - 7x^3 + 15x^2 - 14x - 10.$$

Najděte koeficienty v příslušné Bezoutově rovnosti.

2. Najděte inverzní matici ke čtvercové matici

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

řádu n nad $\mathbb{R}$.

3. Nad $\mathbb{R}$ řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 6, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 7, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + px_5 &= p. \end{aligned}$$

Proveďte diskusi řešení v závislosti na hodnotě parametru $p \in \mathbb{R}$.

4. Nechť lineární zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ je zadáno svými hodnotami na vektorech kanonické báze prostoru $\mathbb{R}^4$:

$$\varphi((1,0,0,0)) = (2,1,-1),\ \ \varphi((0,1,0,0)) = (1,2,-1),$$
$$\varphi((0,0,1,0)) = (1,-1,2),\ \ \varphi((0,0,0,1)) = (2,-1,1).$$

Nechť lineární transformace $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ má vzhledem k bázi

$$\mathbf{f}_1 = (1,1,-1),\ \mathbf{f}_2 = (1,-1,1),\ \mathbf{f}_3 = (-1,1,1)$$

prostoru $\mathbb{R}^3$ matici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Najděte matici složeného lineárního zobrazení $\psi \circ \varphi :\ \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ vzhledem ke kanonickým bázím prostorů $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^3$.

5. Buď $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Nechť $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k \in \mathbf{V}$ jsou libovolné vektory, přičemž $k \geq 2$ a $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{o}$. Dokažte, že potom vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když existuje index $i \in \{2, \ldots, k\}$ takový, že vektor $\mathbf{u}_i$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{i-1}$.