Opravná písemná zkouška z Matematiky II

Čtvrtek 12. 6. 2003

Skupina **B**

Jméno a příjmení:
UČO:

Maximální zisk za jednotlivé příklady: 10 bodů
Maximální možný celkový zisk: 50 bodů

Hodnocení podle bodového zisku:	50 – 40 bodů	—	výborně
	39 – 30 bodů	—	velmi dobře
	29 – 20 bodů	—	dobře
	19 – 0 bodů	—	nevyhověl

Pište jen na předložené papíry. K řešení můžete použít i zadní stranu papíru.

1. Racionální lomenou funkci $\frac{f}{g}$, kde

$$f = 4x^4 + 2x^3 + 15x^2 + 7, \quad g = x^5 - 2x^4 + 6x^3 - 12x^2 + 9x - 18,$$

rozložte nad $\mathbb{R}$ na parciální zlomky.

2. Najděte inverzní matici ke čtvercové matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

řádu n nad $\mathbb{R}$, kde n je sudé číslo.

3. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^5$ najděte průnik podprostoru $\mathbf{V} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$, kde

$$\mathbf{v}_1 = (1,1,1,1,2), \; \mathbf{v}_2 = (1,-2,-1,-4,-3), \; \mathbf{v}_3 = (2,2,1,1,-3),$$

s podprostorem $\mathbf{W} = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 \rangle$, kde

$$\mathbf{w}_1 = (1,1,1,-1,4), \; \mathbf{w}_2 = (1,-2,-1,2,-9), \; \mathbf{w}_3 = (2,-2,1,7,-1).$$

Najděte nějakou bázi podprostoru $\mathbf{V} \cap \mathbf{W}$.

4. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^5$ najděte rovnice pro transformaci souřadnic vektorů při přechodu od báze

$$\begin{aligned}&\mathbf{f}_1 = (0,1,1,1,1),\ \mathbf{f}_2 = (-1,0,1,1,1),\\ &\mathbf{f}_3 = (-1,-1,4,1,1),\ \mathbf{f}_4 = (-1,-1,-1,0,1),\\ &\mathbf{f}_5 = (-1,-1,-1,-1,0)\end{aligned}$$

k bázi

$$\begin{aligned}&\mathbf{g}_1 = (0,1,-1,1,-1),\ \mathbf{g}_2 = (1,0,1,-1,1),\\ &\mathbf{g}_3 = (-1,1,0,1,-1),\ \mathbf{g}_4 = (1,-1,1,0,1),\\ &\mathbf{g}_5 = (-1,1,-1,1,0).\end{aligned}$$

To znamená, napište vztahy, podle nichž se ze souřadnic libovolného vektoru $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^5$ v bázi $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4, \mathbf{f}_5$ vypočtou jeho souřadnice v bázi $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4, \mathbf{g}_5$.

5. Dokažte, že prvek c komutativního okruhu $(R, +, \cdot)$ je kořenem polynomu $f \in R[x]$ právě tehdy, když polynom $x - c$ dělí polynom f.