Opravná písemná zkouška z Matematiky II

Čtvrtek 12. 6. 2003

Skupina **A**

Jméno a příjmení:

UČO:

Maximální zisk za jednotlivé příklady: 10 bodů
Maximální možný celkový zisk: 50 bodů

Hodnocení podle bodového zisku: 50 – 40 bodů — výborně
39 – 30 bodů — velmi dobře
29 – 20 bodů — dobře
19 – 0 bodů — nevyhověl

Pište jen na předložené papíry. K řešení můžete použít i zadní stranu papíru.

1. Racionální lomenou funkci $\frac{f}{g}$, kde

$$f = 3x^4 + 3x^2 - 7x - 7, \quad g = x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4x - 12,$$

rozložte nad $\mathbb{R}$ na parciální zlomky.

2. Najděte inverzní matici ke čtvercové matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

řádu n nad $\mathbb{R}$, kde n je liché číslo.

3. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^5$ najděte průnik podprostoru $\mathbf{V} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$, kde

$$\mathbf{v}_1 = (1, -1, -2, 2, -4),\ \mathbf{v}_2 = (1, -2, -2, 1, -8),\ \mathbf{v}_3 = (2, 1, 2, -5, -2),$$

s podprostorem $\mathbf{W} = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 \rangle$, kde

$$\mathbf{w}_1 = (1, -1, 1, 2, -1),\ \mathbf{w}_2 = (1, 2, -1, -6, -2),\ \mathbf{w}_3 = (2, 2, -1, -7, -4).$$

Najděte nějakou bázi podprostoru $\mathbf{V} \cap \mathbf{W}$.

4. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^5$ najděte rovnice pro transformaci souřadnic vektorů při přechodu od báze

$$\begin{aligned}&\mathbf{f}_1 = (0,-1,-1,-1,-1),\ \mathbf{f}_2 = (1,2,-1,-1,-1),\\&\mathbf{f}_3 = (1,1,0,-1,-1),\ \mathbf{f}_4 = (1,1,1,2,-1),\\&\mathbf{f}_5 = (1,1,1,1,0)\end{aligned}$$

k bázi

$$\begin{aligned}&\mathbf{g}_1 = (0,1,1,1,1),\ \mathbf{g}_2 = (1,0,1,1,1),\\&\mathbf{g}_3 = (1,1,0,1,1),\ \mathbf{g}_4 = (1,1,1,0,1),\\&\mathbf{g}_5 = (1,1,1,1,0).\end{aligned}$$

To znamená, napište vztahy, podle nichž se ze souřadnic libovolného vektoru $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^5$ v bázi $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4, \mathbf{f}_5$ vypočtou jeho souřadnice v bázi $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4, \mathbf{g}_5$.

5. Dokažte, že netriviální komutativní okruh $(R, +, \cdot)$ je oborem integrity právě tehdy, když v něm platí zákon o krácení nenulovými prvky.