Písemná zkouška z Matematiky I

Pondělí 6. 1. 2003

Jméno a příjmení:

UČO:

Maximální zisk za jednotlivé příklady: 10 bodů
Maximální možný celkový zisk: 70 bodů

Hodnocení podle bodového zisku:	70 – 50 bodů	—	výborně
	49 – 40 bodů	—	velmi dobře
	39 – 30 bodů	—	dobře
	29 – 0 bodů	—	nevyhověl

Pište jen na předložené papíry. K řešení můžete použít i zadní stranu papíru.

1. Najděte příklady konečných podmnožin $A, B, C \subseteq \mathbb{N}$ takových, aby platilo:

a) $(A - (B - C)) - (C - B) \neq A \cap B \cap C$:

A = B = C =

b) $C - (A \cap B) \neq ((A \cap C) - B) \cup ((B \cap C) - A)$:

A = B = C =

c) $(B - A) \cup (C - A) \neq ((B \cup C) - (B \cap C)) - A$:

A = B = C =

d) $(B - C) \cup (A \cap B \cap C) \neq (B - (A - C)) - (C - A)$:

A = B = C =

e) $(A \cap B) \cup (B \cap C) \neq ((A - C) \cap B) \cup ((C - A) \cap B)$:

A = B = C =

2. O každé z následujících binárních relací $\varrho \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ rozhodněte, zda je reflexivní, symetrická, případně tranzitivní. Na každou z otázek odpovězte slovem "ano" nebo "ne".

a) $(\forall a, b \in \mathbb{R})(\, a \,\varrho\, b \iff a - b \in \mathbb{N}\,)$:

Reflexivní: Symetrická: Tranzitivní:

b) $(\forall a, b \in \mathbb{R})(\, a \,\varrho\, b \iff a \cdot b \in \mathbb{Q}\,)$:

Reflexivní: Symetrická: Tranzitivní:

c) $(\forall a, b \in \mathbb{R})(\, a \,\varrho\, b \iff |a - b| \leq |a \cdot b|\,)$:

Reflexivní: Symetrická: Tranzitivní:

d) $(\forall a, b \in \mathbb{R})(\, a \,\varrho\, b \iff \sqrt{a^2 + b^2} \leq |a| + |b|\,)$:

Reflexivní: Symetrická: Tranzitivní:

e) $(\forall a, b \in \mathbb{R})(\, a \,\varrho\, b \iff 2^{|a|} \leq |b|\,)$:

Reflexivní: Symetrická: Tranzitivní:

3. O každé z následujících množin uspořádaných množinovou inkluzí rozhodněte, zda jde o svaz, případně zda jde o úplný svaz. Na každou z otázek odpovězte slovem "ano" nebo "ne".

a) $(\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N}), \subseteq)$, kde $\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$ je množina všech konečných podmnožin množiny $\mathbb{N}$:

Svaz: Úplný svaz:

b) $(\mathcal{P}_{inf}(\mathbb{N}), \subseteq)$, kde $\mathcal{P}_{inf}(\mathbb{N})$ je množina všech nekonečných podmnožin množiny $\mathbb{N}$:

Svaz: Úplný svaz:

c) $(\mathcal{I}nt_{fin}(\mathbb{N}), \subseteq)$, kde $\mathcal{I}nt_{fin}(\mathbb{N})$ je množina všech konečných intervalů v řetězci $(\mathbb{N}, \leq)$, včetně prázdného intervalu:

Svaz: Úplný svaz:

d) $(\mathcal{A}ntisym(\mathbb{N}), \subseteq)$, kde $\mathcal{A}ntisym(\mathbb{N})$ je množina všech antisymetrických binárních relací na množině $\mathbb{N}$:

Svaz: Úplný svaz:

e) $(\mathcal{T}rans(\mathbb{N}), \subseteq)$, kde $\mathcal{T}rans(\mathbb{N})$ je množina všech tranzitivních binárních relací na množině $\mathbb{N}$:

Svaz: Úplný svaz:

4. Řešte následující úlohy:

a) Nechť $k, \ell \in \mathbb{N}$. Určete koeficient u $x^{k\ell}$ v rozvoji výrazu

$$\left(x^{k+1} + \frac{1}{x}\right)^{2\ell}.$$

b) Zjistěte, v kolika vnitřních bodech se navzájem protínají úhlopříčky konvexního n-úhelníka, kde $n \geq 4$, neprotínají-li se žádné tři úhlopříčky v tomtéž bodě.

c) Nechť $n, k \in \mathbb{N}$. Určete, kolik řešení má rovnice

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$$

v oboru nezáporných celých čísel.

5. Určete paritu $\wp(\sigma)$ každé z následujících permutací σ. Vysvětlete postup, kterým jste v každém z uvedených případů postupovali.

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 14 & 12 & 7 & 6 & 1 & 3 & 15 & 5 & 2 & 13 & 4 & 10 & 11 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

$\wp(\sigma) \ =$

b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 9 & 19 & 5 & 18 & 10 & 13 & 20 & 3 & 12 & 15 & 11 & 1 & 4 & 16 & 8 & 2 & 17 & 6 & 7 & 14 \end{pmatrix}$

$\wp(\sigma) \ =$

c) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n & n+1 & n+2 & n+3 & \ldots & 2n-1 & 2n \\ 1 & 3 & 5 & \ldots & 2n-3 & 2n-1 & 2 & 4 & 6 & \ldots & 2n-2 & 2n \end{pmatrix}$

$\wp(\sigma) \ =$

6. V každém z následujících případů rozhodněte, zda třída $[a]_n$ má inverzní prvek v monoidu $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$, uveďte důvod vašeho rozhodnutí a v pozitivním případě nalezněte třídu, která je inverzním prvkem ke třídě $[a]_n$.

a) $n = 296\,296, \quad a = 292\,181:$

b) $n = 987\,654\,321, \quad a = 888\,888\,888:$

7. Nechť A, B jsou množiny a nechť $f : A \to B$ a $g : B \to A$ jsou zobrazení taková, že $g \circ f = id_A$ a $f \circ g = id_B$. Dokažte, že pak zobrazení f je bijekce a že g je k němu inverzní zobrazení.