Opravná písemná zkouška z Matematiky I

Úterý 4. 2. 2003

Skupina **B**

Jméno a příjmení:

UČO:

Maximální zisk za jednotlivé příklady: 10 bodů
Maximální možný celkový zisk: 70 bodů

Hodnocení podle bodového zisku:	70 – 60 bodů	—	výborně
	59 – 45 bodů	—	velmi dobře
	44 – 30 bodů	—	dobře
	29 – 0 bodů	—	nevyhověl

Pište jen na předložené papíry. K řešení můžete použít i zadní stranu papíru.

1. O každé z následujících podmínek rozhodněte, zda platí pro libovolné tři množiny A, B, C či nikoliv. Pokaždé odpovězte slovem "ano" nebo slovem "ne".

a) $(A - C) \cup (B - C) \subseteq ((A \cup B) - C) - (A \cap B)$:

b) $A - (A - (B \cup C)) \subseteq ((A - B) \cap C) \cup ((A - C) \cap B)$:

c) $(B \cup C) - ((B \cap C) - A) \subseteq A \cup (B - C) \cup (C - B)$:

d) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) \subseteq (B \cup C) - ((B \cup C) - A)$:

e) $((A - B) - C) \cup (A \cap B \cap C) \subseteq A - (B - C)$:

f) $(B - (A \cup C)) \cup (C - (A \cup B)) \subseteq (B \cup C) - A$:

g) $(A \cup (B \cap C)) - (A \cap B \cap C) \subseteq A - (B \cap C)$:

h) $(A - (B \cup C)) \cup ((B \cup C) - A) \subseteq (A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$:

2. O každém z následujících tvrzení rozhodněte, zda je pravdivé či nikoliv. Pokaždé odpovězte slovem "ano" nebo slovem "ne".

a) $\{\{\emptyset\}\} \subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$:

b) $\{\{\emptyset\}\} \subseteq \{\{\{\emptyset\}\}\}$:

c) $\emptyset \in \{\emptyset\} \times \{\emptyset\}$:

d) $\{\{\emptyset\}\} \times \emptyset = \emptyset \times \{\{\emptyset\}\}$:

e) $\{\{\emptyset\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$:

f) $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) \cap \mathcal{P}(\{\{\emptyset\}\}) = \emptyset$:

g) $\{\emptyset\} \times \emptyset \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) - \mathcal{P}(\emptyset)$:

h) $\{\emptyset\}^{\emptyset} = \{\{\emptyset\}\}^{\emptyset}$:

i) $\{\emptyset\}^{\{\emptyset\}} = \{\emptyset\}^{\{\{\emptyset\}\}}$:

j) $\mathcal{P}(\emptyset)^{\mathcal{P}(\emptyset)} = \{\{\emptyset\} \times \{\emptyset\}\}$:

3. O každé z následujících binárních relací $\varrho \subseteq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ rozhodněte, zda je reflexivní, symetrická nebo antisymetrická, případně tranzitivní. Na každou z otázek odpovězte slovem "ano" nebo "ne".

a) $(\forall a, b \in \mathbb{Q})(\, a \,\varrho\, b \iff a - b \in \mathbb{Z}\,)$:

Reflexivní: Symetrická: Antisymetrická: Tranzitivní:

b) $(\forall a, b \in \mathbb{Q})(\, a \,\varrho\, b \iff a^3 \leq b^3\,)$:

Reflexivní: Symetrická: Antisymetrická: Tranzitivní:

c) $(\forall a, b \in \mathbb{Q})(\, a \,\varrho\, b \iff \sqrt{a^2 + b^2} \neq |a| + |b|\,)$:

Reflexivní: Symetrická: Antisymetrická: Tranzitivní:

d) $(\forall a, b \in \mathbb{Q})(\, a \,\varrho\, b \iff a \cdot b \leq 0\,)$:

Reflexivní: Symetrická: Antisymetrická: Tranzitivní:

4. Řešte následující úlohy:

a) Úkolem sjezdu politické strany, kterého se účastní n delegátů, je zvolit nové k-členné předsednictvo. Kolik existuje možností, jak volbu provést, je-li mezi delegáty přítomno všech k členů dosavadního předsednictva a je-li přitom známo, že žádní dva členové dosavadního předsednictva nejsou schopni spolupracovat v jednom týmu?

b) V rovině jsou dány dvě různé rovnoběžky. Na jedné z nich je vyznačeno m různých bodů a na druhé je vyznačeno n různých bodů. Každou dvojici bodů vyznačených na jedné a druhé rovnoběžce spojíme úsečkou. Kolik průsečíků tak vznikne v pásu uvnitř mezi oběma rovnoběžkami, pokud se žádné tři spojnice neprotnou v jediném bodě?

c) Zjistěte, kolik je čísel od 1 do 100 000, která nejsou dělitelná žádným z čísel 9, 11, 13. Vysvětlete princip vašeho postupu.

5. Určete paritu $\wp(\sigma)$ každé z následujících permutací σ. Vysvětlete postup, kterým jste v každém z uvedených případů postupovali.

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 14 & 8 & 7 & 10 & 2 & 4 & 12 & 15 & 13 & 6 & 3 & 1 & 5 & 11 & 9 \end{pmatrix}$

$\wp(\sigma) \ =$

b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 8 & 9 & 11 & 16 & 1 & 15 & 3 & 19 & 18 & 2 & 14 & 5 & 10 & 7 & 4 & 20 & 17 & 13 & 12 & 6 \end{pmatrix}$

$\wp(\sigma) \ =$

c) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n & n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 2n & 2n-1 & 2n-2 & \dots & n+2 & n+1 & n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\wp(\sigma) \ =$

6. V každém z následujících případů rozhodněte, zda třída $[a]_n$ má inverzní prvek v monoidu $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$, uveďte důvod vašeho rozhodnutí a v pozitivním případě nalezněte třídu, která je inverzním prvkem ke třídě $[a]_n$.

a) $n = 539\,429, \quad a = 505\,905:$

b) $n = 120\,535, \quad a = 29\,104:$

7. Dokažte, že v libovolném svazu $(L, \leq)$ splňujícím podmínku

$$(\forall r, s, t \in L)(r \wedge (s \vee t) = (r \wedge s) \vee (r \wedge t))$$

platí také podmínka

$$(\forall x, y, z \in L)(x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)).$$