Opravná písemná zkouška z Matematiky I

Úterý 4. 2. 2003

Skupina **A**

Jméno a příjmení:
UČO:

Maximální zisk za jednotlivé příklady: 10 bodů
Maximální možný celkový zisk: 70 bodů

Hodnocení podle bodového zisku:	70 – 60 bodů	— výborně
	59 – 45 bodů	— velmi dobře
	44 – 30 bodů	— dobře
	29 – 0 bodů	— nevyhověl

Pište jen na předložené papíry. K řešení můžete použít i zadní stranu papíru.

1. O každé z následujících podmínek rozhodněte, zda platí pro libovolné tři množiny A, B, C či nikoliv. Pokaždé odpovězte slovem "ano" nebo slovem "ne".

a) $A - (B \cap C) \subseteq (A \cup (B \cap C)) - (A \cap B \cap C)$:

b) $(B \cup C) - A \subseteq (B - (A \cup C)) \cup (C - (A \cup B))$:

c) $A - (B - C) \subseteq ((A - B) - C) \cup (A \cap B \cap C)$:

d) $(B \cup C) - ((B \cup C) - A) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$:

e) $A \cup (B - C) \cup (C - B) \subseteq (B \cup C) - ((B \cap C) - A)$:

f) $((A \cup B) - C) - (A \cap B) \subseteq (A - C) \cup (B - C)$:

g) $((A - B) \cap C) \cup ((A - C) \cap B) \subseteq A - (A - (B \cup C))$:

h) $(A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C) \subseteq ((A \cup B) - C) \cup (C - (A \cup B))$:

2. O každém z následujících tvrzení rozhodněte, zda je pravdivé či nikoliv. Pokaždé odpovězte slovem "ano" nebo slovem "ne".

a) $\{\{\emptyset\}\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$:

b) $\{\{\emptyset\}\} \in \{\{\{\emptyset\}\}\}$:

c) $\{\emptyset\} \times \emptyset = \emptyset \times \{\emptyset\}$:

d) $\{\{\emptyset\}\} \times \{\emptyset\} = \{\emptyset\} \times \{\{\emptyset\}\}$:

e) $\{\{\emptyset\}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$:

f) $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) \subseteq \mathcal{P}(\{\{\emptyset\}\})$:

g) $\{\{\emptyset\}\} \times \emptyset \in \mathcal{P}(\emptyset)$:

h) $\{\emptyset\}^{\emptyset} = \emptyset^{\{\emptyset\}}$:

i) $\emptyset^{\{\emptyset\}} = \emptyset^{\{\{\emptyset\}\}}$:

j) $\mathcal{P}(\emptyset)^{\mathcal{P}(\emptyset)} = \{\emptyset\} \times \{\{\emptyset\}\}$:

3. O každé z následujících binárních relací $\varrho \subseteq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ rozhodněte, zda je reflexivní, symetrická nebo antisymetrická, případně tranzitivní. Na každou z otázek odpovězte slovem "ano" nebo "ne".

a) $(\forall a, b \in \mathbb{Q})(\, a \,\varrho\, b \iff a - b \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,)$:

Reflexivní: Symetrická: Antisymetrická: Tranzitivní:

b) $(\forall a, b \in \mathbb{Q})(\, a \,\varrho\, b \iff a^2 \leq b^2\,)$:

Reflexivní: Symetrická: Antisymetrická: Tranzitivní:

c) $(\forall a, b \in \mathbb{Q})(\, a \,\varrho\, b \iff |a \cdot b| \leq |a| + |b|\,)$:

Reflexivní: Symetrická: Antisymetrická: Tranzitivní:

d) $(\forall a, b \in \mathbb{Q})(\, a \,\varrho\, b \iff |a| \leq b\,)$:

Reflexivní: Symetrická: Antisymetrická: Tranzitivní:

4. Řešte následující úlohy:

a) Televizní stanice uvádí soutěžní pořad, kterého se mohou účastnit k-členná družstva z různých základních škol. Na vybrané základní škole projevilo zájem o účast v soutěži m chlapců a n dívek. Kolik existuje možností, jak z těchto dětí vybrat k-členné smíšené soutěžní družstvo?

b) Sazeč má k dispozici m různých samohlásek a n různých souhlásek. Kolik různých slov délky $m+n$ může z těchto písmen vysázet, nemají-li být nikde vedle sebe dvě samohlásky?

c) Zjistěte, kolik je čísel od 1 do 100 000, která nejsou dělitelná žádným z čísel $5, 9, 13$. Vysvětlete princip vašeho postupu.

5. Určete paritu $\wp(\sigma)$ každé z následujících permutací σ. Vysvětlete postup, kterým jste v každém z uvedených případů postupovali.

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 13 & 9 & 3 & 10 & 12 & 2 & 1 & 15 & 14 & 5 & 6 & 4 & 8 & 11 & 7 \end{pmatrix}$

$\wp(\sigma) \;=$

b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 17 & 15 & 19 & 12 & 20 & 3 & 16 & 1 & 11 & 18 & 2 & 7 & 8 & 6 & 9 & 4 & 13 & 5 & 14 & 10 \end{pmatrix}$

$\wp(\sigma) \;=$

c) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n & n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n-1 & 2n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 & 2n & 2n-1 & 2n-2 & \dots & n+2 & n+1 \end{pmatrix}$

$\wp(\sigma) \;=$

6. V každém z následujících případů rozhodněte, zda třída $[a]_n$ má inverzní prvek v monoidu $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$, uveďte důvod vašeho rozhodnutí a v pozitivním případě nalezněte třídu, která je inverzním prvkem ke třídě $[a]_n$.

a) $n = 707\,549, \quad a = 340\,768$:

b) $n = 137\,884, \quad a = 26\,983$:

7. Dokažte, že v libovolném svazu $(A, \leq)$ splňujícím podmínku

$$(\forall a, b, c \in A)(a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c))$$

platí také podmínka

$$(\forall e, f, g \in A)(e \wedge (f \vee g) = (e \wedge f) \vee (e \wedge g)).$$