Písemná zkouška z Matematiky I

Středa 15. 1. 2003

Skupina **B**

Jméno a příjmení:

UČO:

Maximální zisk za jednotlivé příklady: 10 bodů
Maximální možný celkový zisk: 70 bodů

Hodnocení podle bodového zisku:	70 – 50 bodů	— výborně
	49 – 40 bodů	— velmi dobře
	39 – 30 bodů	— dobře
	29 – 0 bodů	— nevyhověl

Pište jen na předložené papíry. K řešení můžete použít i zadní stranu papíru.

1. Najděte příklady ekvivalencí η, ϑ, δ na tříprvkové množině $\mathbb{Z}_3$ takových, aby platily následující podmínky. Ekvivalence η, ϑ, δ přitom zadejte tak, že vypíšete jim příslušné rozklady $\mathbb{Z}_3/\eta$, $\mathbb{Z}_3/\vartheta$, $\mathbb{Z}_3/\delta$.

a) $\eta \cup \vartheta \neq (\eta \cup \vartheta) \circ (\eta \cup \vartheta)$:

$\mathbb{Z}_3/\eta =$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{Z}_3/\vartheta =$

b) $\eta \circ \vartheta \neq \eta \circ \vartheta \circ \eta \circ \vartheta$:

$\mathbb{Z}_3/\eta =$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{Z}_3/\vartheta =$

c) $\eta \circ \vartheta \neq \vartheta \circ \eta$:

$\mathbb{Z}_3/\eta =$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{Z}_3/\vartheta =$

d) $(\eta \cap \vartheta) \circ \delta \neq (\eta \circ \delta) \cap (\vartheta \circ \delta)$:

$\mathbb{Z}_3/\eta =$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{Z}_3/\vartheta =$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{Z}_3/\delta =$

e) $(\eta - \vartheta) \circ \delta \neq (\eta \circ \delta) - (\vartheta \circ \delta)$:

$\mathbb{Z}_3/\eta =$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{Z}_3/\vartheta =$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{Z}_3/\delta =$

2. O každém z následujících tvrzení rozhodněte, zda je pravdivé či nikoliv. Pokaždé odpovězte slovem "ano" nebo slovem "ne".

a) $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$:

b) $\{\emptyset\} \subseteq \{\{\emptyset\}\}$:

c) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{\{\emptyset\}\}$:

d) $\emptyset \in \mathcal{P}(\emptyset)$:

e) $\mathcal{P}(\emptyset) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$:

f) $\{\{\emptyset\}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$:

g) $\emptyset^{\emptyset} = \emptyset$:

h) $\emptyset^{\emptyset} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$:

i) $\mathcal{P}(\emptyset) \times \mathcal{P}(\emptyset) = \{\{\{\emptyset\}\}\}$:

j) $\mathcal{P}(\emptyset)^{\mathcal{P}(\emptyset)} = \{\{\{\emptyset\}\}\}$:

3. O každé z následujících množin uspořádaných množinovou inkluzí rozhodněte, zda jde o svaz, případně zda jde o úplný svaz. Na každou z otázek odpovězte slovem "ano" nebo slovem "ne".

a) $(\mathcal{I}nt(\mathbb{R}), \subseteq)$, kde $\mathcal{I}nt(\mathbb{R})$ je množina všech otevřených intervalů v $\mathbb{R}$ (jednostranně nebo oboustranně ohraničených i neohraničených) včetně prázdné množiny a celé množiny $\mathbb{R}$:

Svaz: Úplný svaz:

b) $(\mathcal{I}nt_{inf}(\mathbb{R}), \subseteq)$, kde $\mathcal{I}nt_{inf}(\mathbb{R})$ je množina všech jednostranně nebo oboustranně neohraničených otevřených intervalů v $\mathbb{R}$ (včetně celé množiny $\mathbb{R}$):

Svaz: Úplný svaz:

c) $(\mathcal{I}nt_{fin}(\mathbb{R}), \subseteq)$, kde $\mathcal{I}nt_{fin}(\mathbb{R})$ je množina všech oboustranně ohraničených otevřených intervalů v $\mathbb{R}$ včetně prázdné množiny:

Svaz: Úplný svaz:

d) $(\mathcal{P}_{conv}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}), \subseteq)$, kde $\mathcal{P}_{conv}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ je množina všech konvexních podmnožin množiny $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ včetně jednoprvkových podmnožin a prázdné množiny (podmnožina $S \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ je konvexní, obsahuje-li s každými dvěma různými body $A, B \in S$ také celou úsečku z A do B):

Svaz: Úplný svaz:

e) $(\mathcal{P}_{unbound}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}), \subseteq)$, kde $\mathcal{P}_{unbound}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ je množina všech neohraničených podmnožin množiny $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (podmnožina $S \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ je neohraničená, není-li kolem ní možno opsat v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kružnici tak, aby se celá množina S nacházela uvnitř kruhu touto kružnicí vymezeného):

Svaz: Úplný svaz:

4. Řešte následující úlohy:

a) Prodavač v papírnictví má v zásobě 3000 vícebarevných propisovacích tužek. Každá propisovačka obsahuje tři náplně, přičemž každá z náplní může být kterékoliv z následujících pěti barev: černá, červená, zelená, modrá nebo žlutá. Propisovaček obsahujících alespoň jednu červenou náplň je celkem 990, propisovaček obsahujících alespoň jednu zelenou náplň je celkem 845, propisovaček obsahujících alespoň jednu modrou náplň je celkem 718 a propisovaček obsahujících alespoň jednu žlutou náplň je celkem 591. Propisovaček obsahujících alespoň jednu červenou a také alespoň jednu zelenou náplň je dohromady 66, propisovaček obsahujících podobně alespoň jednu červenou a alespoň jednu modrou náplň je dohromady 58, propisovaček obsahujících alespoň jednu červenou a také žlutou náplň je dohromady 50, propisovaček obsahujících alespoň jednu zelenou a také modrou náplň je dohromady 41, propisovaček obsahujících alespoň jednu zelenou a také žlutou náplň je dohromady 33 a propisovaček obsahujících alespoň jednu modrou a také žlutou náplň je dohromady 25. Propisovaček obsahujících červenou, zelenou a modrou náplň je celkem 7, propisovaček obsahujících červenou, zelenou a žlutou náplň je celkem 8, propisovaček obsahujících červenou, modrou a žlutou náplň je celkem 9 a propisovaček obsahujících zelenou, modrou a žlutou náplň je celkem 10. Určete, kolik má prodavač v zásobě propisovaček obsahujících jen samé černé náplně. Vysvětlete princip vašeho postupu.

b) Zjistěte, kolik je čísel od 1 do 1 000 000, která nejsou dělitelná žádným z lichých prvočísel $3, 5, 7$. Vysvětlete princip vašeho postupu.

5. V každém z následujících případů rozhodněte, zda třída $[a]_n$ má inverzní prvek v monoidu $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$, uveďte důvod vašeho rozhodnutí a v pozitivním případě nalezněte třídu, která je inverzním prvkem ke třídě $[a]_n$.

a) $n = 733\,337, \quad a = 97\,779:$

b) $n = 97\,531, \quad a = 8\,642:$

6. V grupě $(S_6, \circ)$ všech permutací množiny $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ najděte podgrupu generovanou permutacemi

$$(1\,6) \circ (2\,5) \circ (3\,4) \quad \text{a} \quad (1\,5) \circ (2\,4).$$

Vypište všechny prvky této podgrupy.

7. Dokažte, že pro libovolné množiny A, B, C platí

$$(A^B)^C \;\cong\; A^{B \times C}.$$