Písemná zkouška z Matematiky I

Středa 15. 1. 2003

Skupina **A**

Jméno a příjmení:

UČO:

Maximální zisk za jednotlivé příklady: 10 bodů
Maximální možný celkový zisk: 70 bodů

Hodnocení podle bodového zisku:	70 – 50 bodů	—	výborně
	49 – 40 bodů	—	velmi dobře
	39 – 30 bodů	—	dobře
	29 – 0 bodů	—	nevyhověl

Pište jen na předložené papíry. K řešení můžete použít i zadní stranu papíru.

1. Najděte příklady ekvivalencí σ, τ, ϱ na tříprvkové množině $\mathbb{Z}_3$ takových, aby platily následující podmínky. Ekvivalence σ, τ, ϱ přitom zadejte tak, že vypíšete jim příslušné rozklady $\mathbb{Z}_3/\sigma$, $\mathbb{Z}_3/\tau$, $\mathbb{Z}_3/\varrho$.

a) $\sigma \circ \tau \neq \tau \circ \sigma$:

$\mathbb{Z}_3/\sigma =$ $\mathbb{Z}_3/\tau =$

b) $\sigma \cup \tau \neq (\sigma \cup \tau) \circ (\sigma \cup \tau)$:

$\mathbb{Z}_3/\sigma =$ $\mathbb{Z}_3/\tau =$

c) $\sigma \circ \tau \neq \sigma \circ \tau \circ \sigma \circ \tau$:

$\mathbb{Z}_3/\sigma =$ $\mathbb{Z}_3/\tau =$

d) $\varrho \circ (\sigma \cap \tau) \neq (\varrho \circ \sigma) \cap (\varrho \circ \tau)$:

$\mathbb{Z}_3/\sigma =$ $\mathbb{Z}_3/\tau =$ $\mathbb{Z}_3/\varrho =$

e) $\varrho \circ (\sigma - \tau) \neq (\varrho \circ \sigma) - (\varrho \circ \tau)$:

$\mathbb{Z}_3/\sigma =$ $\mathbb{Z}_3/\tau =$ $\mathbb{Z}_3/\varrho =$

2. O každém z následujících tvrzení rozhodněte, zda je pravdivé či nikoliv. Pokaždé odpovězte slovem "ano" nebo slovem "ne".

a) $\emptyset \in \{\{\emptyset\}\}$:

b) $\emptyset \subseteq \{\{\emptyset\}\}$:

c) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{\{\emptyset\}, \emptyset\}$:

d) $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(\emptyset)$:

e) $\mathcal{P}(\emptyset) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$:

f) $\{\{\emptyset\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$:

g) $\emptyset^{\emptyset} = \{\{\emptyset\}\}$:

h) $\emptyset^{\emptyset} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$:

i) $\mathcal{P}(\emptyset) \times \mathcal{P}(\emptyset) = \{\{\emptyset\}\}$:

j) $\mathcal{P}(\emptyset)^{\mathcal{P}(\emptyset)} = \{\{\{\{\emptyset\}\}\}\}$:

3. O každé z následujících množin uspořádaných množinovou inkluzí rozhodněte, zda jde o svaz, případně zda jde o úplný svaz. Na každou z otázek odpovězte slovem "ano" nebo slovem "ne".

a) $(\mathcal{I}nt_{fin}(\mathbb{R}), \subseteq)$, kde $\mathcal{I}nt_{fin}(\mathbb{R})$ je množina všech oboustranně ohraničených otevřených intervalů v $\mathbb{R}$ včetně prázdné množiny:

Svaz: Úplný svaz:

b) $(\mathcal{I}nt_{inf}(\mathbb{R}), \subseteq)$, kde $\mathcal{I}nt_{inf}(\mathbb{R})$ je množina všech jednostranně nebo oboustranně neohraničených otevřených intervalů v $\mathbb{R}$ (včetně celé množiny $\mathbb{R}$):

Svaz: Úplný svaz:

c) $(\mathcal{I}nt(\mathbb{R}), \subseteq)$, kde $\mathcal{I}nt(\mathbb{R})$ je množina úplně všech otevřených intervalů v $\mathbb{R}$ (ohraničených i neohraničených) včetně prázdné množiny a celé množiny $\mathbb{R}$:

Svaz: Úplný svaz:

d) $(\mathcal{P}_{bound}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}), \subseteq)$, kde $\mathcal{P}_{bound}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ je množina všech ohraničených podmnožin množiny $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ včetně prázdné množiny (podmnožina $S \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ je ohraničená, je-li obsažena uvnitř nějakého kruhu v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$):

Svaz: Úplný svaz:

e) $(\mathcal{P}_{conv}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}), \subseteq)$, kde $\mathcal{P}_{conv}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ je množina všech konvexních podmnožin množiny $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ včetně jednoprvkových podmnožin a prázdné množiny (podmnožina $S \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ je konvexní, obsahuje-li s každými dvěma různými body $A, B \in S$ také celou úsečku z A do B):

Svaz: Úplný svaz:

4. Řešte následující úlohy:

a) Prodavač hraček má v zásobě 2500 duhových kuliček. V každé kuličce jsou zataveny tři barevné proužky. Každý z proužků může mít kteroukoliv z následujících pěti barev: červenou, zelenou, modrou, žlutou nebo bílou. Kuliček obsahujících alespoň jeden červený proužek je celkem 420, kuliček obsahujících alespoň jeden zelený proužek je celkem 565, kuliček obsahujících alespoň jeden modrý proužek je celkem 692 a kuliček obsahujících alespoň jeden žlutý proužek je celkem 819. Kuliček obsahujících alespoň jeden červený a také alespoň jeden zelený proužek je dohromady 64, kuliček obsahujících podobně alespoň jeden červený a alespoň jeden modrý proužek je dohromady 72, kuliček obsahujících alespoň jeden červený a také žlutý proužek je dohromady 80, kuliček obsahujících alespoň jeden zelený a také modrý proužek je dohromady 89, kuliček obsahujících alespoň jeden zelený a také žlutý proužek je dohromady 97 a kuliček obsahujících alespoň jeden modrý a také žlutý proužek je dohromady 105. Kuličky obsahující červený, zelený i modrý proužek jsou celkem 3, kuličky obsahující červený, zelený a žlutý proužek jsou pouze 2 a kulička obsahující červený, modrý a žlutý proužek je jenom 1. Kulička obsahující zelený, modrý a žlutý proužek není žádná. Určete, kolik má prodavač v zásobě kuliček obsahujících jen samé bílé proužky. Vysvětlete princip vašeho postupu.

b) Zjistěte, kolik je čísel od 1 do 1 000 000, která nejsou dělitelná žádným z prvočísel $2, 3, 5$. Vysvětlete princip vašeho postupu.

5. V každém z následujících případů rozhodněte, zda třída $[a]_n$ má inverzní prvek v monoidu $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$, uveďte důvod vašeho rozhodnutí a v pozitivním případě nalezněte třídu, která je inverzním prvkem ke třídě $[a]_n$.

a) $n = 233\,338, \quad a = 62\,223:$

b) $n = 54\,321, \quad a = 4\,321:$

6. V grupě $(S_6, \circ)$ všech permutací množiny $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ najděte podgrupu generovanou permutacemi

$$(1\,2) \circ (3\,4) \circ (5\,6) \quad \text{a} \quad (1\,4) \circ (3\,6).$$

Vypište všechny prvky této podgrupy.

7. Dokažte, že pro libovolné množiny A, B, C platí

$$(A \times B)^C \cong A^C \times B^C.$$