Opravná písemná zkouška z Matematiky I

Středa 12. 2. 2003

Skupina **B**

Jméno a příjmení:

UČO:

Maximální zisk za jednotlivé příklady: 10 bodů
Maximální možný celkový zisk: 70 bodů

Hodnocení podle bodového zisku:	70 – 60 bodů	—	výborně
	59 – 45 bodů	—	velmi dobře
	44 – 30 bodů	—	dobře
	29 – 0 bodů	—	nevyhověl

Pište jen na předložené papíry. K řešení můžete použít i zadní stranu papíru.

1. O každé z následujících podmínek rozhodněte, zda platí pro libovolné tři množiny A, B, C či nikoliv. Pokaždé odpovězte slovem "ano" nebo slovem "ne".

a) $(A \cap B) \cup (C - A) \subseteq (C - (A - B))$:

b) $(A \cup B) - (B - C) \subseteq (A \cup B) - ((A \cap B) - C)$:

c) $(A \cup B \cup C) - (A \cap B) \subseteq (A - B) \cup (C - A)$:

d) $(A - B) \cup (B - C) \cup (C - A) \subseteq (A \cup B) - (A \cap B \cap C)$:

e) $(A - (B \cup C)) \cup ((B \cap C) - A) \subseteq (A - C) \cup (B - A)$:

f) $(B - (A \cap C)) \cup (C - (A \cap B)) \subseteq (B \cup C) - (A \cap C)$:

g) $(A - (B - C)) \cap (A - (C - B)) \subseteq (A - (B \cup C)) \cup (B \cap C)$:

h) $((A \cup B) - C) \cap ((A \cup C) - B) \subseteq (A - (B - C)) - (C - B)$:

2. O každém z následujících tvrzení rozhodněte, zda je pravdivé či nikoliv. Pokaždé odpovězte slovem "ano" nebo slovem "ne".

a) $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}$:

b) $\{\{\{\emptyset\}\}\} \in \{\{\{\{\emptyset\}\}\}\}$:

c) $\{\emptyset\} \times \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$:

d) $\emptyset \in \emptyset \times \emptyset$:

e) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$:

f) $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(\{\emptyset\} \times \{\emptyset\})$:

g) $\{\{\emptyset\}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) - \mathcal{P}(\emptyset)$:

h) $\mathcal{P}(\emptyset) \cap \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \emptyset$:

i) $\mathcal{P}(\emptyset) \subseteq \emptyset^{\{\emptyset\}}$:

j) $\emptyset^{\{\{\emptyset\}\}} \subseteq \{\emptyset\}^{\{\emptyset\}}$:

3. O každé z následujících binárních relací $\varrho \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ rozhodněte, zda je reflexivní, symetrická nebo asymetrická, případně tranzitivní. Na každou z otázek odpovězte slovem "ano" nebo "ne".

a) $(\forall a, b \in \mathbb{N})(\, a \,\varrho\, b \iff a^2 \mid b\,)$:

Reflexivní: Symetrická: Asymetrická: Tranzitivní:

b) $(\forall a, b \in \mathbb{N})(\, a \,\varrho\, b \iff a \le b^2\,)$:

Reflexivní: Symetrická: Asymetrická: Tranzitivní:

c) $(\forall a, b \in \mathbb{N})(\, a \,\varrho\, b \iff 2^a \le b\,)$:

Reflexivní: Symetrická: Asymetrická: Tranzitivní:

d) $(\forall a, b \in \mathbb{N})(\, a \,\varrho\, b \iff a \cdot b \le a + b\,)$:

Reflexivní: Symetrická: Asymetrická: Tranzitivní:

4. Řešte následující úlohy:

a) Natěrač má k dispozici n různých barev a má jimi natřít k plotů, přičemž každý plot je složen z ℓ latěk. Určete, kolika způsoby může natěrač obarvit jednotlivé laťky všech plotů tak, aby

i) na každém plotě byly různé laťky natřeny různými barvami (předp. $\ell \leq n$),

ii) všechny laťky každého plotu byly natřeny stejnou barvou, přitom laťky různých plotů byly natřeny různými barvami (předp. $k \leq n$),

iii) různé laťky byly natřeny různými barvami, lhostejno zda se nacházejí na stejném plotě či nikoliv (předp. $k \cdot \ell \leq n$).

b) Zjistěte, kolik je čísel od 1 do 100 000, která nejsou dělitelná žádným z čísel 11, 15, 19. Vysvětlete princip vašeho postupu.

5. Určete paritu $\wp(\sigma)$ každé z následujících permutací σ. Vysvětlete postup, kterým jste v každém z uvedených případů postupovali.

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 8 & 15 & 10 & 13 & 9 & 12 & 4 & 14 & 6 & 2 & 1 & 5 & 7 & 11 & 3 \end{pmatrix}$

$\wp(\sigma) =$

b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 16 & 15 & 10 & 3 & 17 & 2 & 1 & 12 & 13 & 5 & 20 & 19 & 18 & 14 & 11 & 9 & 4 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

$\wp(\sigma) =$

c) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \dots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 & 8 & 9 & 7 & \dots & 3n-1 & 3n & 3n-2 \end{pmatrix}$

$\wp(\sigma) =$

6. V každém z následujících případů rozhodněte, zda třída $[a]_n$ má inverzní prvek v monoidu $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$, uveďte důvod vašeho rozhodnutí a v pozitivním případě nalezněte třídu, která je inverzním prvkem ke třídě $[a]_n$.

a) $n = 174\,427, \quad a = 28\,439:$

b) $n = 410\,034, \quad a = 376\,031:$

7. Dokažte, že pro libovolnou množinu M a pro libovolné tři binární relace ϱ, σ, τ na M platí

$$(\varrho \circ \sigma) - (\varrho \circ \tau) \subseteq \varrho \circ (\sigma - \tau).$$