Opravná písemná zkouška z Matematiky I

Středa 12. 2. 2003

Skupina **A**

Jméno a příjmení:

UČO:

Maximální zisk za jednotlivé příklady: 10 bodů
Maximální možný celkový zisk: 70 bodů

Hodnocení podle bodového zisku:	70 – 60 bodů —	výborně
	59 – 45 bodů —	velmi dobře
	44 – 30 bodů —	dobře
	29 – 0 bodů —	nevyhověl

Pište jen na předložené papíry. K řešení můžete použít i zadní stranu papíru.

1. O každé z následujících podmínek rozhodněte, zda platí pro libovolné tři množiny A, B, C či nikoliv. Pokaždé odpovězte slovem "ano" nebo slovem "ne".

a) $(C - (A - B)) \subseteq (C - A) \cup (A \cap B)$:

b) $(A - C) \cup (B - A) \subseteq (A - (B \cup C)) \cup ((B \cap C) - A)$:

c) $(A - B) \cup (B - C) \subseteq (A \cup B \cup C) - (B \cap C)$:

d) $(B \cup C) - (A \cap C) \subseteq (B - (A \cap C)) \cup (C - (A \cap B))$:

e) $(A \cup B) - ((A \cap B) - C) \subseteq (A \cup B) - (B - C)$:

f) $(A - (B - C)) - (C - B) \subseteq ((A \cup B) - C) \cap ((A \cup C) - B)$:

g) $(A \cup B) - (A \cap B \cap C) \subseteq (A - B) \cup (B - C) \cup (C - A)$:

h) $(A - (B \cup C)) \cup (B \cap C) \subseteq (A - (B - C)) \cap (A - (C - B))$:

2. O každém z následujících tvrzení rozhodněte, zda je pravdivé či nikoliv. Pokaždé odpovězte slovem "ano" nebo slovem "ne".

a) $\{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}$:

b) $\{\{\{\emptyset\}\}\} \subseteq \{\{\{\{\emptyset\}\}\}\}$:

c) $\emptyset \times \emptyset = \emptyset$:

d) $\{\emptyset\} \in \{\emptyset\} \times \{\emptyset\}$:

e) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$:

f) $\emptyset \in \mathcal{P}(\{\emptyset\} \times \{\emptyset\})$:

g) $\{\{\emptyset\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) - \mathcal{P}(\emptyset)$:

h) $\mathcal{P}(\emptyset) \cap \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset\}$:

i) $\mathcal{P}(\emptyset) \subseteq \{\emptyset\}^{\emptyset}$:

j) $\{\emptyset\}^{\emptyset} \subseteq \{\emptyset\}^{\{\emptyset\}}$:

3. O každé z následujících binárních relací $\varrho \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ rozhodněte, zda je reflexivní, symetrická nebo asymetrická, případně tranzitivní. Na každou z otázek odpovězte slovem "ano" nebo "ne".

a) $(\forall a, b \in \mathbb{N})(\, a \,\varrho\, b \iff a \,|\, b^2\,)$:

Reflexivní: Symetrická: Asymetrická: Tranzitivní:

b) $(\forall a, b \in \mathbb{N})(\, a \,\varrho\, b \iff a^2 \le b\,)$:

Reflexivní: Symetrická: Asymetrická: Tranzitivní:

c) $(\forall a, b \in \mathbb{N})(\, a \,\varrho\, b \iff 3^a \le 2^b\,)$:

Reflexivní: Symetrická: Asymetrická: Tranzitivní:

d) $(\forall a, b \in \mathbb{N})(\, a \,\varrho\, b \iff a + b \le a \cdot b\,)$:

Reflexivní: Symetrická: Asymetrická: Tranzitivní:

4. Řešte následující úlohy:

a) V obchodě mají n druhů pohlednic; každý druh je k mání v dostatečném počtu kusů. Určete, kolik existuje možností, jak těmito pohlednicemi obeslat k lidí takovým způsobem, aby

i) každý člověk dostal jednu pohlednici, přitom různí lidé dostali pohlednice různých druhů (předp. $k \leq n$),

ii) každý člověk dostal ℓ pohlednic různých druhů (předp. $\ell \leq n$),

iii) každý člověk dostal ℓ pohlednic různých druhů, přitom různí lidé nedostali žádnou pohlednici téhož druhu (předp. $k \cdot \ell \leq n$).

b) Zjistěte, kolik je čísel od 1 do 100 000, která nejsou dělitelná žádným z čísel $11, 13, 15$. Vysvětlete princip vašeho postupu.

5. Určete paritu $\wp(\sigma)$ každé z následujících permutací σ. Vysvětlete postup, kterým jste v každém z uvedených případů postupovali.

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 7 & 14 & 11 & 3 & 15 & 6 & 13 & 1 & 2 & 5 & 4 & 12 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$

$\wp(\sigma) \ =$

b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 18 & 17 & 9 & 1 & 20 & 15 & 7 & 10 & 14 & 6 & 11 & 16 & 3 & 4 & 12 & 19 & 2 & 13 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

$\wp(\sigma) \ =$

c) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \dots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & 9 & 8 & 7 & \dots & 3n & 3n-1 & 3n-2 \end{pmatrix}$

$\wp(\sigma) \ =$

6. V každém z následujících případů rozhodněte, zda třída $[a]_n$ má inverzní prvek v monoidu $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$, uveďte důvod vašeho rozhodnutí a v pozitivním případě nalezněte třídu, která je inverzním prvkem ke třídě $[a]_n$.

a) $n = 177\,825, \quad a = 21\,719:$

b) $n = 742\,326, \quad a = 353\,617:$

7. Dokažte, že pro libovolnou množinu A a pro libovolné tři binární relace η, ϑ, δ na A platí

$$(\eta \cap \vartheta) \circ \delta \subseteq (\eta \circ \delta) \cap (\vartheta \circ \delta).$$