Písemná zkouška z Matematiky II

Pátek 6. 6. 2003

Skupina **B**

Jméno a příjmení:

UČO:

Maximální zisk za jednotlivé příklady: 10 bodů
Maximální možný celkový zisk: 50 bodů

Hodnocení podle bodového zisku:	50 – 40 bodů	—	výborně
	39 – 30 bodů	—	velmi dobře
	29 – 20 bodů	—	dobře
	19 – 0 bodů	—	nevyhověl

Pište jen na předložené papíry. K řešení můžete použít i zadní stranu papíru.

1. Racionální lomenou funkci $\frac{f}{g}$, kde

$$f = 21x^3 - 16x^2 - 12x + 1, \quad g = 9x^4 - 3x^3 + 13x^2 + 11x + 2,$$

rozložte nad $\mathbb{R}$ na parciální zlomky.

2. Vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} -a & a & a & \dots & a & a \\ a & -a & a & \dots & a & a \\ a & a & -a & \dots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \dots & -a & a \\ a & a & a & \dots & a & -a \end{vmatrix}$$

řádu n nad $\mathbb{R}$.

3. Nad $\mathbb{R}$ řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 &= 5, \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 6x_5 &= 6, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 4x_5 &= 1, \\ 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 + wx_4 - 6wx_5 &= 3w. \end{aligned}$$

Proveďte diskusi řešení v závislosti na hodnotě parametru $w \in \mathbb{R}$.

4. Nechť lineární zobrazení $\gamma : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ je na vektorech kanonické báze prostoru $\mathbb{R}^4$ zadáno svými hodnotami

$$\gamma((1,0,0,0)) = (1,1,1),\ \gamma((0,1,0,0)) = (1,1,-1),$$
$$\gamma((0,0,1,0)) = (1,-1,1),\ \gamma((0,0,0,1)) = (1,-1,-1).$$

Nechť lineární zobrazení $\delta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ je na vektorech báze

$$\mathbf{g}_1 = (3,1,2),\ \mathbf{g}_2 = (1,2,3),\ \mathbf{g}_3 = (2,-3,-4)$$

prostoru $\mathbb{R}^3$ zadáno svými hodnotami

$$\delta((3,1,2)) = (1,0,1,-1),\ \delta((1,2,3)) = (1,1,0,-1),\ \delta((2,-3,-4)) = (1,1,-1,0).$$

Najděte matici složeného lineárního zobrazení $\delta \circ \gamma : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, tedy lineární transformace $\delta \circ \gamma$ prostoru $\mathbb{R}^4$ vzhledem ke kanonické bázi prostoru $\mathbb{R}^4$.

5. Buď $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Nechť $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ a $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n \in \mathbf{V}$ jsou takové vektory, že $\mathbf{u} \in \langle \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n \rangle$ a přitom pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ jsou vektory $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{i-1}, \mathbf{u}, \mathbf{w}_{i+1}, \ldots, \mathbf{w}_n$ lineárně nezávislé. Dokažte, že potom pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ platí, že $\langle \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n \rangle = \langle \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{i-1}, \mathbf{u}, \mathbf{w}_{i+1}, \ldots, \mathbf{w}_n \rangle$.