Písemná zkouška z Matematiky II

Pátek 6. 6. 2003

Skupina **A**

Jméno a příjmení:
UČO:

Maximální zisk za jednotlivé příklady: 10 bodů
Maximální možný celkový zisk: 50 bodů

Hodnocení podle bodového zisku:	50 – 40 bodů	—	výborně
	39 – 30 bodů	—	velmi dobře
	29 – 20 bodů	—	dobře
	19 – 0 bodů	—	nevyhověl

Pište jen na předložené papíry. K řešení můžete použít i zadní stranu papíru.

1. Racionální lomenou funkci $\frac{f}{g}$, kde

$$f = 8x^3 - 9x^2 - 18x + 22, \quad g = 4x^4 - 16x^3 + 25x^2 - 21x + 9,$$

rozložte nad $\mathbb{R}$ na parciální zlomky.

2. Vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 0 & x & x & \dots & x & x \\ x & 0 & x & \dots & x & x \\ x & x & 0 & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \dots & 0 & x \\ x & x & x & \dots & x & 0 \end{vmatrix}$$

řádu n nad $\mathbb{R}$.

3. Nad $\mathbb{R}$ řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 &= 4, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 6x_5 &= 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= -1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + ux_4 + 6ux_5 &= 2u. \end{aligned}$$

Proveďte diskusi řešení v závislosti na hodnotě parametru $u \in \mathbb{R}$.

4. Nechť lineární zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ je na vektorech báze

$$\mathbf{f}_1 = (2,1,3),\, \mathbf{f}_2 = (3,2,4),\, \mathbf{f}_3 = (1,3,-2)$$

prostoru $\mathbb{R}^3$ zadáno svými hodnotami

$$\varphi((2,1,3)) = (1,1,-1,-1),\;\; \varphi((3,2,4)) = (1,-1,1,-1),\;\; \varphi((1,3,-2)) = (1,-1,-1,1).$$

Nechť lineární zobrazení $\psi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ je na vektorech kanonické báze prostoru $\mathbb{R}^4$ zadáno svými hodnotami

$$\psi((1,0,0,0)) = (1,0,-1),\;\; \psi((0,1,0,0)) = (1,-1,0),$$
$$\psi((0,0,1,0)) = (0,1,-1),\;\; \psi((0,0,0,1)) = (1,1,1).$$

Najděte matici složeného lineárního zobrazení $\psi \circ \varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tedy lineární transformace $\psi \circ \varphi$ prostoru $\mathbb{R}^3$ vzhledem ke kanonické bázi prostoru $\mathbb{R}^3$.

5. Buď $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Nechť $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ a $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n \in \mathbf{V}$ jsou libovolné vektory takové, že $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ a $\mathbf{u} \in \langle \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n \rangle$. Dokažte přímo, že potom existuje index $i \in \{1, \ldots, n\}$ takový, že $\langle \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n \rangle = \langle \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{i-1}, \mathbf{u}, \mathbf{w}_{i+1}, \ldots, \mathbf{w}_n \rangle$.