Josef Janyška

ANALYTICKÁ TEORIE KUŽELOSEČEK A KVADRIK

Brno, 2021

Obsah

1 KOMPLEXNÍ ROZŠÍŘENÍ PROSTORU **1**
1 Komplexní rozšíření reálného vektorového prostoru 1
2 Komplexní rozšíření reálného afinního prostoru 6
3 Cvičení 10

2 PROJEKTIVNÍ ROZŠÍŘENÍ AFINNÍHO PROSTORU **13**
4 Projektivní prostory 13
5 Přechod od projektivního prostoru k afinnímu 20
6 Projektivní rozšíření afinního prostoru 21
7 Cvičení 23

3 BILINEÁRNÍ A KVADRATICKÉ FORMY **24**
8 Bilineární formy 24
9 Kvadratické formy 30
10 Ortogonální transformace kvadratické formy 38
11 Cvičení 41

4 TEORIE KUŽELOSEČEK **46**
12 Kuželosečky v projektivní rovině 46
13 Projektivní klasifikace kuželoseček 54
14 Afinní vlastnosti kuželoseček 59
15 Afinní klasifikace kuželoseček 64
16 Metrické vlastnosti kuželoseček 73
17 Metrická klasifikace kuželoseček 79
18 Kuželosečky jako množiny bodů daných vlastností 93
19 Cvičení 98

5 TEORIE KVADRIK **107**
20 Kvadriky v projektivním prostoru 107
21 Projektivní klasifikace kvadrik 114
22 Tečná rovina 118
23 Afinní vlastnosti kvadrik 121
24 Afinní klasifikace kvadrik 125

25 Metrické vlastnosti kvadrik 138
26 Metrická klasifikace kvadrik 143
27 Cvičení 155

Seznam použité literatury **167**

Rejstřík **167**

Předmluva

Text pokrývá látku, která je přednášena v učitelském studiu matematiky v předmětu MUC26 "Teorie kuželoseček a kvadrik". Přednáška vyžaduje předběžné znalosti lineární analytické geometrie v rozsahu skript Horák, Janyška [6] nebo učebnice Sekanina a kol. [12].

Obsahem textu je analytický přístup ke studiu kuželoseček (respektive kvadrik) v projektivní, afinní a euklidovské rovině (respektive prostoru). K ucelenému výkladu jsou potřebné některé kapitoly z algebry, které nejsou součástí povinného kurzu, proto jsme do textu zařadili tyto kapitoly v nezbytném minimálním rozsahu. Jde o komplexní rozšíření vektorového a afinního prostoru (Kapitola 1), projektivní rozšíření afinního prostoru (Kapitola 2) a konečně o úvod do teorie bilineárních a kvadratických forem (Kapitola 3).

Těžiště textu je v Kapitole 4 (analytická teorie kuželoseček) a v Kapitole 5 (analytická teorie kvadrik). I když je náš přístup analytický, snažíme se co nejvíce zdůraznit geometrické vlastnosti definovaných pojmů. K tomu slouží i řada obrázků. Pro přehlednost textu jsou definice vyznačeny rámečkem a konce důkazů (respektive poznámek) jsou označeny symboly $\square$ (respektive $\diamondsuit$).

Na konci každého paragrafu jsou uvedeny řešené příklady typické pro daný paragraf a v každé kapitole je zařazen paragraf s příklady na procvičení.

V Brně, 2020

Kapitola 1

KOMPLEXNÍ ROZŠÍŘENÍ PROSTORU

Až dosud jsme v analytické geometrii uvažovali všechny prostory (vektorové, afinní, euklidovské) pouze nad tělesem reálných čísel. Pro potřeby teorie kuželoseček a kvadrik se však reálné prostory jeví jako nedostatečné. Ukážeme si, proč. V lineární geometrii, např. v euklidovské rovině, platilo, že dvě souřadnicové lineární rovnice určují stejný geometrický objekt (nadrovinu) tehdy a jen tehdy, liší-li se o nenulový násobek. Mějme ale dvě rovnice 2. stupně

$$x^2 + y^2 = 0\,, \tag{1}$$
$$2x^2 + 3y^2 = 0\,, \tag{2}$$

kde $[x; y]$ jsou souřadnice bodu v rovině vzhledem k nějakému ortonormálnímu repéru. Je zřejmé, že oběma rovnicím vyhovují pouze souřadnice počátku, tj. určují stejnou množinu v euklidovské rovině, a přitom není rovnice (2) násobkem rovnice (1). V této kapitole proto zavedeme takzvané komplexní rozšíření reálného prostoru tak, abychom docílili toho, že i dvě rovnice 2. stupně určují tutéž množinu právě tehdy, liší-li se o nenulový násobek.

1 Komplexní rozšíření reálného vektorového prostoru

Předpokládejme, že V je vektorový prostor konečné dimenze n nad tělesem reálných čísel. Podobným způsobem, jako se v teorii čísel sestrojí komplexní rozšíření tělesa reálných čísel v těleso komplexních čísel, sestrojíme i komplexní rozšíření vektorového prostoru V.

Uvažujme množinu $V \times V$ a definujme na ní operaci sčítání a násobení komplex-

ním číslem následujícím způsobem

$$(\mathbf{a},\mathbf{b})+(\mathbf{c},\mathbf{d})=(\mathbf{a}+\mathbf{c},\mathbf{b}+\mathbf{d})\,, \tag{1.1}$$

$$(\alpha+i\beta)(\mathbf{a},\mathbf{b})=(\alpha\mathbf{a}-\beta\mathbf{b},\alpha\mathbf{b}+\beta\mathbf{a})\,. \tag{1.2}$$

Snadno se ověří, že $V\times V$ spolu s operacemi sčítání a násobení komplexními čísly definovanými (1.1) a (1.2) je vektorovým prostorem nad tělesem komplexních čísel $\mathbb{C}$.

Definice 1.1. Množinu $V\times V$ s operacemi sčítání a násobení komplexními čísly definovanými vztahy (1.1) a (1.2) budeme nazývat *komplexní rozšíření* reálného vektorového prostoru V a označovat $V^{\mathbb{C}}$.

Uvažujme podmnožinu $M=\{(\mathbf{u},\mathbf{o})\in V\times V\}\subset V^{\mathbb{C}}$. Snadno ověříme, že M je uzavřená vzhledem ke sčítání a násobení reálnými čísly. Uvažujme zobrazení V na M, které přiřadí vektoru $\mathbf{u}\in V$ vektor $(\mathbf{u},\mathbf{o})\in M$. Toto zobrazení je izomorfizmem vektorového prostoru V na M. Při ztotožnění V a M tedy dostáváme, že $V\subset V^{\mathbb{C}}$.

Poznámka 1.1. V je podmnožina ve $V^{\mathbb{C}}$, ale ne vektorový podprostor, protože V je definováno nad $\mathbb{R}$ a $V^{\mathbb{C}}$ nad $\mathbb{C}$. ♢

Nyní můžeme každý vektor $(\mathbf{u},\mathbf{v})\in V^{\mathbb{C}}$ psát následujícím způsobem

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})=(\mathbf{u},\mathbf{o})+(\mathbf{o},\mathbf{v})=(\mathbf{u},\mathbf{o})+i(\mathbf{v},\mathbf{o})=\mathbf{u}+i\mathbf{v}\,.$$

Vektor $\mathbf{u}\in V$ budeme nazývat *reálnou složkou (částí)* a vektor $\mathbf{v}\in V$ *imaginární složkou (částí)* vektoru $\mathbf{w}=\mathbf{u}+i\mathbf{v}\in V^{\mathbb{C}}$ a označovat $\mathbf{u}=\mathfrak{Re}(\mathbf{w})$, $\mathbf{v}=\mathfrak{Im}(\mathbf{w})$. Nulovým vektorem $V^{\mathbb{C}}$ je $(\mathbf{o},\mathbf{o})=\mathbf{o}+i\mathbf{o}$.

Formálně tak můžeme komplexní rozšíření reálného vektorového prostoru V chápat jako přímý součet

$$V^{\mathbb{C}}=V\oplus iV\,.$$

Věta 1.1. *Vektory $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_k\in V$ jsou lineárně nezávislé v prostoru V tehdy a jen tehdy, jsou-li lineárně nezávislé v prostoru $V^{\mathbb{C}}$.*

Důkaz. Je zřejmé, že jsou-li $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_k\in V$ lineárně závislé ve V, jsou i lineárně závislé ve $V^{\mathbb{C}}$. Nechť jsou $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_k$ lineárně závislé ve $V^{\mathbb{C}}$. Potom existují komplexní čísla $\alpha_j+i\beta_j$, $j=1,\dots,k$, taková, že alespoň jedno z nich je nenulové a platí

$$\sum_{j=1}^{k}(\alpha_j+i\beta_j)\mathbf{u}_j=\mathbf{o}\,,$$

tj.

$$\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\mathbf{u}_j+i\sum_{j=1}^{k}\beta_j\mathbf{u}_j=\mathbf{o}\,.$$

Musí tedy platit $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mathbf{u}_j = \mathbf{o}$ a současně $\sum_{j=1}^{k} \beta_j \mathbf{u}_j = \mathbf{o}$, přičemž alespoň jedno $\alpha_j \in \mathbb{R}$ nebo $\beta_j \in \mathbb{R}$ je nenulové, což znamená, že vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ jsou lineárně závislé ve V. Dokázali jsme tedy, že $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ jsou lineárně závislé ve V tehdy a jen tehdy, jsou-li lineárně závislé ve $V^{\mathbb{C}}$, což je tvrzení ekvivalentní tvrzení Věty 1.1. □

Věta 1.2. *Každá báze prostoru V je i bází prostoru $V^{\mathbb{C}}$.*

Důkaz. Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ je báze vektorového prostoru V. Potom $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ jsou lineárně nezávislé ve $V^{\mathbb{C}}$ a musíme dokázat, že $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ je systém generátorů $V^{\mathbb{C}}$. Buď $\mathbf{x} + i\mathbf{y} \in V^{\mathbb{C}}$ libovolný vektor. Potom existují reálná čísla $x_1, \ldots, x_n$, $y_1; \ldots; y_n$ tak, že $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{u}_j$, $\mathbf{y} = \sum_{j=1}^{n} y_j \mathbf{u}_j$. Odtud

$$\mathbf{x} + i\mathbf{y} = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{u}_j + i \sum_{j=1}^{n} y_j \mathbf{u}_j = \sum_{j=1}^{n} (x_j + iy_j)\mathbf{u}_j,$$

což dokazuje naši Větu 1.2. □

Definice 1.2. Každá báze prostoru $V^{\mathbb{C}}$, která je současně i bází V, se nazývá *reálná báze*.

Věta 1.3. *Buď U podprostor vektorového prostoru V. Potom $U^{\mathbb{C}}$ je podprostorem vektorového prostoru $V^{\mathbb{C}}$.*

Důkaz. Věta 1.3 je přímým důsledkem definice komplexního rozšíření vektorového prostoru. □

Definice 1.3. Podprostor W vektorového prostoru $V^{\mathbb{C}}$, který je komplexním rozšířením podprostoru $U \subseteq V$, se nazývá *reálný podprostor* a označujeme ho $U^{\mathbb{C}}$.

Ne každý podprostor ve $V^{\mathbb{C}}$ je reálný, ale každý podprostor ve $V^{\mathbb{C}}$ obsahuje nějaký reálný podprostor, minimálně triviální podprostor $\{\mathbf{o}\}$.

Vektory $\mathbf{u} + i\mathbf{v}$ a $\mathbf{u} - i\mathbf{v}$ se nazývají vektory *komplexně sdružené*. Je-li $\mathbf{w} \in V^{\mathbb{C}}$, budeme komplexně sdružený vektor označovat $\overline{\mathbf{w}}$. Je-li $W \subseteq V^{\mathbb{C}}$ vektorový podprostor, je $\overline{W} = \{\overline{\mathbf{w}} | \mathbf{w} \in W\}$ vektorový podprostor nazývaný *komplexně sdružený podprostor* k podprostoru W.

Pro komplexně sdružené vektory ve $V^{\mathbb{C}}$ platí vztahy obdobné vztahům pro komplexně sdružená čísla. Pro $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in V^{\mathbb{C}}$, $k \in \mathbb{C}$, platí

$$\overline{\mathbf{w} + \mathbf{w}'} = \overline{\mathbf{w}} + \overline{\mathbf{w}'},$$
$$\overline{k\mathbf{w}} = \overline{k}\ \overline{\mathbf{w}}.$$

kde $\overline{k}$ je komplexně sdružené číslo k číslu k. Dále platí $\mathfrak{Re}(\mathbf{w}) = \frac{1}{2}(\mathbf{w} + \overline{\mathbf{w}})$, $\mathfrak{Im}(\mathbf{w}) = \frac{i}{2}(\overline{\mathbf{w}} - \mathbf{w})$.

Věta 1.4. *Vektorový podprostor $W \subseteq V^{\mathbb{C}}$ je reálný právě tehdy, když $W = \overline{W}$.*

Důkaz. "⇒"Nechť W je reálný podprostor ve $V^{\mathbb{C}}$, tj. $W = \{\mathbf{w} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in U\} = U^{\mathbb{C}}$ pro nějaký podprostor $U \subseteq V$. Je zřejmé, že pro každé $\mathbf{w} \in W$ je i $\overline{\mathbf{w}} \in W$, a tedy $W = \overline{W}$.

"⇐"Nechť $W = \overline{W}$. Potom pro $\forall \mathbf{w} \in W$ je i $\overline{\mathbf{w}} \in W$, a tedy i reálné vektory $\mathfrak{Re}(\mathbf{w}) \in W$. Množina $U = \{\mathfrak{Re}(\mathbf{w})\}$ je uzavřená vzhledem ke sčítání a násobení reálnými čísly, a tedy je podprostorem ve V. Protože $\mathfrak{Im}(\mathbf{w}) = \mathfrak{Re}(-i\mathbf{w})$, je $\{\mathfrak{Im}(\mathbf{w})\} \subset U$ a $\mathbf{w} = \mathfrak{Re}(\mathbf{w}) + i\mathfrak{Im}(\mathbf{w})$. Potom $W = U^{\mathbb{C}}$. □

Důsledek 1.1. *Nechť W je podprostor ve $V^{\mathbb{C}}$. Potom maximální reálný podprostor obsažený v W je $W \cap \overline{W}$.* ◇

Při určování maximálního reálného podprostoru v podprostoru $W \subset V^{\mathbb{C}}$ postupujeme podle Důsledku 1.1. Při praktickém výpočtu postupujeme podle způsobu zadání W. Je-li $W = L(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k)$, určíme $\overline{W} = L(\overline{\mathbf{w}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{w}}_k)$ a $W \cap \overline{W}$. Je-li $\dim W = \dim W \cap \overline{W}$, je W reálný podprostor.

Je-li podprostor W vzhledem k nějaké reálné bázi $V^{\mathbb{C}}$ zadán obecnými rovnicemi

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0\,, \\ &\vdots \\ a_{(n-k)1}x_1 + a_{(n-k)2}x_2 + \cdots + a_{(n-k)n}x_n &= 0\,, \end{aligned} \tag{1.3}$$

$a_{ij} \in \mathbb{C}$, je obecné vyjádření podprostoru $\overline{W}$

$$\begin{aligned} \overline{a}_{11}x_1 + \overline{a}_{12}x_2 + \cdots + \overline{a}_{1n}x_n &= 0\,, \\ &\vdots \\ \overline{a}_{(n-k)1}x_1 + \overline{a}_{(n-k)2}x_2 + \cdots + \overline{a}_{(n-k)n}x_n &= 0\,. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Potom $W \cap \overline{W}$ je společným řešením soustav (1.3) a (1.4). Je–li W reálný podprostor, musí existovat takové jeho obecné vyjádření (1.3), že $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Věta 1.5. *Nechť V a U jsou reálné vektorové prostory a $\varphi : V \to U$ je lineární zobrazení. Potom existuje právě jedno lineární zobrazení $\varphi^{\mathbb{C}} : V^{\mathbb{C}} \to U^{\mathbb{C}}$ takové, že pro každý vektor $\mathbf{x} \in V$ je $\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})$. Je-li lineární zobrazení φ prosté, je i lineární zobrazení $\varphi^{\mathbb{C}}$ prosté a je-li φ surjektivní, je i $\varphi^{\mathbb{C}}$ surjektivní.*

Důkaz. Nechť $\varphi : V \to U$ je lineární zobrazení. Definujme zobrazení $\varphi^{\mathbb{C}}$ z $V^{\mathbb{C}}$ do $U^{\mathbb{C}}$ vztahem

$$\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}) + i\varphi(\mathbf{y}) \tag{1.5}$$

pro každé $\mathbf{x} + i\mathbf{y} \in V^{\mathbb{C}}$. Je zřejmé, že $\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})$ pro každý vektor $\mathbf{x} \in V$. Ověříme, že $\varphi^{\mathbb{C}}$ je lineární zobrazení. Nechť $\mathbf{x}_j + i\mathbf{y}_j \in V^{\mathbb{C}}$, $\alpha_j + i\beta_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2$.

Potom

$$\begin{gathered}\varphi^{\mathbb{C}}((\alpha_1+i\beta_1)(\mathbf{x}_1+i\mathbf{y}_1)+(\alpha_2+i\beta_2)(\mathbf{x}_2+i\mathbf{y}_2))=\\ =\varphi^{\mathbb{C}}((\alpha_1\mathbf{x}_1-\beta_1\mathbf{y}_1+\alpha_2\mathbf{x}_2-\beta_2\mathbf{y}_2)+i(\alpha_1\mathbf{y}_1+\beta_1\mathbf{x}_1+\alpha_2\mathbf{y}_2+\beta_2\mathbf{x}_2))=\\ =\varphi(\alpha_1\mathbf{x}_1-\beta_1\mathbf{y}_1+\alpha_2\mathbf{x}_2-\beta_2\mathbf{y}_2)+i\varphi(\alpha_1\mathbf{y}_1+\beta_1\mathbf{x}_1+\alpha_2\mathbf{y}_2+\beta_2\mathbf{x}_2)=\\ =\alpha_1\varphi(\mathbf{x}_1)-\beta_1\varphi(\mathbf{y}_1)+\alpha_2\varphi(\mathbf{x}_2)-\beta_2\varphi(\mathbf{y}_2)+\\ +i(\alpha_1\varphi(\mathbf{y}_1)+\beta_1\varphi(\mathbf{x}_1)+\alpha_2\varphi(\mathbf{y}_2)+\beta_2\varphi(\mathbf{x}_2))=\\ =(\alpha_1+i\beta_1)(\varphi(\mathbf{x}_1)+i\varphi(\mathbf{y}_1))+(\alpha_2+i\beta_2)(\varphi(\mathbf{x}_2)+i\varphi(\mathbf{y}_2))=\\ =(\alpha_1+i\beta_1)\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}_1+i\mathbf{y}_1)+(\alpha_2+i\beta_2)\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}_2+i\mathbf{y}_2).\end{gathered}$$

Předpokládejme, že $\psi^{\mathbb{C}}$ je lineární zobrazení z $V^{\mathbb{C}}$ do $U^{\mathbb{C}}$ takové, že $\psi^{\mathbb{C}}(\mathbf{x})=\varphi(\mathbf{x})$ pro každý vektor $\mathbf{x}\in V$. Potom z linearity dostáváme, že musí platit vztah (1.5), a tedy $\varphi^{\mathbb{C}}\equiv\psi^{\mathbb{C}}$.

Nechť je lineární zobrazení φ prosté a $\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}_1+i\mathbf{y}_1)=\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}_2+i\mathbf{y}_2)$. Potom z (1.5) je $\varphi(\mathbf{x}_1)=\varphi(\mathbf{x}_2)$ a $\varphi(\mathbf{y}_1)=\varphi(\mathbf{y}_2)$, a tedy musí být $\mathbf{x}_1=\mathbf{x}_2$ a $\mathbf{y}_1=\mathbf{y}_2$, což znamená, že i $\varphi^{\mathbb{C}}$ je prosté zobrazení.

Nechť lineární zobrazení φ je surjektivní zobrazení. Nechť $\mathbf{x}'+i\mathbf{y}'\in U^{\mathbb{C}}$ je libovolný vektor. Protože φ je surjektivní zobrazení, existují vektory $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$ takové, že $\varphi(\mathbf{x})=\mathbf{x}'$ a $\varphi(\mathbf{y})=\mathbf{y}'$. Potom $\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}+i\mathbf{y})=\mathbf{x}'+i\mathbf{y}'$, a tedy i $\varphi^{\mathbb{C}}$ je surjektivní. □

Definice 1.4. Zobrazení $\varphi^{\mathbb{C}}$ definované ve Větě 1.5 se nazývá *komplexní rozšíření lineárního zobrazení* φ.

Nechť $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ je báze vektorového prostoru V a $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_m$ je báze vektorového prostoru U. Nechť vzhledem k těmto bázím má lineární zobrazení φ z V do U matici A_φ. To znamená, že má-li $\mathbf{x}\in V$ souřadnicové vyjádření $\mathbf{x}=x_1\mathbf{v}_1+\cdots+x_n\mathbf{v}_n$ a vektor $\varphi(\mathbf{x})\in U$ souřadnicové vyjádření $\varphi(\mathbf{x})=x'_1\mathbf{u}_1+\cdots+x'_m\mathbf{u}_m$, potom

$$\begin{aligned}x'_1&=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\,,\\ x'_2&=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\,,\\ &\vdots\\ x'_m&=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\,,\end{aligned}$$

$a_{ij}\in\mathbb{R}$, což píšeme maticově, při ztotožnění vektoru se sloupcovou maticí jeho souřadnic, ve tvaru $\varphi(\mathbf{x})=A_\varphi\mathbf{x}$. Protože každá báze prostoru V je i bází prostoru $V^{\mathbb{C}}$ a podobně, každá báze prostoru U je i bází prostoru $U^{\mathbb{C}}$, můžeme vyjádřit i matici $A_{\varphi^{\mathbb{C}}}$ vzhledem k bázím $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ a $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_m$.

Věta 1.6. *Pro libovolné lineární zobrazení φ z V do U jsou matice A_φ a $A_{\varphi^{\mathbb{C}}}$ vzhledem k reálným bázím v $V^{\mathbb{C}}$ a $U^{\mathbb{C}}$ totožné.*

Důkaz. Nechť v bázích $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ ve V a $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_m$ v U je A_φ matice lineárního zobrazení φ z V do U. Podle (1.5) je $\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}+i\mathbf{y})=\varphi(\mathbf{x})+i\varphi(\mathbf{y})=A_\varphi\mathbf{x}+iA_\varphi\mathbf{y}=A_\varphi(\mathbf{x}+i\mathbf{y})$. □

Poznámka 1.2. Je třeba si uvědomit, jaký je rozdíl mezi souřadnicovým vyjádřením libovolného lineárního zobrazení z $V^{\mathbb{C}}$ do $U^{\mathbb{C}}$ a komplexním rozšířením lineárního zobrazení z V do U. Zatímco matice komplexního rozšíření reálného lineárního zobrazení vzhledem k reálným bázím je definována nad $\mathbb{R}$, je obecně matice libovolného lineárního zobrazení z $V^{\mathbb{C}}$ do $U^{\mathbb{C}}$ definována nad $\mathbb{C}$. ♢

Úloha 1.1. Ověřte, zda podprostor W ve $V_3^{\mathbb{C}}$ určený vektory $\mathbf{u}_1 = (1; 1+i; 1-i)$ a $\mathbf{u}_2 = (1+i; 0; 2+2i)$ je reálný. V případě, že ano, určete nějakou jeho reálnou bázi.

Řešení: Stačí ověřit, jaká je dimenze podprostoru $W \cap \overline{W}$. Protože hodnost matice sestavené ze souřadnic vektorů $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\overline{\mathbf{u}}_1$ a $\overline{\mathbf{u}}_2$ je rovna dvěma a protože $\dim W = 2 = \dim\overline{W}$, je $\dim(W \cap \overline{W}) = 2$, tedy $W = \overline{W}$ a W je reálný. Reálnou bázi tvoří např. vektory $\mathfrak{Re}(\mathbf{u}_1) = (1; 1; 1)$ a $\mathfrak{Im}(\mathbf{u}_1) = (0; 1; -1)$.

Úloha 1.2. Nechť podprostor W ve $V_3^{\mathbb{C}}$ je v nějaké reálné bázi zadán obecnou rovnicí

$$W : (1+2i)x_1 + 3ix_2 + (2-2i)x_3 = 0\,.$$

Určete maximální reálný podprostor ležící v W.

Řešení: Obecné rovnice komplexně sdruženého podprostoru $\overline{W}$ jsou

$$\overline{W} : (1-2i)x_1 - 3ix_2 + (2+2i)x_3 = 0\,.$$

Maximální reálný podprostor v W je $W \cap \overline{W}$, který je řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned}(1+2i)x_1 + 3ix_2 + (2-2i)x_3 &= 0\,,\\ (1-2i)x_1 - 3ix_2 + (2+2i)x_3 &= 0\,.\end{aligned}$$

Obecné řešení této soustavy je reálný jednodimenzionální podprostor generovaný vektorem $(-2; 2; 1)$.

2 Komplexní rozšíření reálného afinního prostoru

V předchozím kurzu analytické geometrie jsme zavedli reálný n-rozměrný afinní prostor jako uspořádanou trojici $(\mathcal{A}, V, {}^{\rightarrow})$, kde $\mathcal{A}$ je neprázdná množina bodů, V je n–dimenzionální reálný vektorový prostor zaměření a ${}^{\rightarrow} : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V$ je zobrazení splňující dva axiomy afinního prostoru. Nyní tento prostor rozšíříme v komplexní afinní prostor.

Věta 2.1. *Buď $\mathcal{A}^{\mathbb{C}} = \mathcal{A} \times V$ a zobrazení ${}^{\rightarrow_{\mathbb{C}}} : \mathcal{A}^{\mathbb{C}} \times \mathcal{A}^{\mathbb{C}} \longrightarrow V^{\mathbb{C}}$ (komplexní rozšíření prostoru V) definované vztahem*

$$\overrightarrow{(X, \mathbf{u})(Y, \mathbf{v})}^{\mathbb{C}} = \overrightarrow{XY} + i(\mathbf{v} - \mathbf{u}), \tag{2.1}$$

kde $X, Y \in \mathcal{A}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Potom trojice $(\mathcal{A}^{\mathbb{C}}, V^{\mathbb{C}}, {}^{\rightarrow_{\mathbb{C}}})$ je komplexní afinní prostor.

Důkaz. Musíme dokázat, že pro zobrazení (2.1) platí axiomy afinního prostoru. Nechť je dán libovolný prvek $(X,\mathbf{u}) \in \mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ a libovolný vektor $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + i\mathbf{w}_2 \in V^{\mathbb{C}}$. Potom existuje jediný prvek $(Y,\mathbf{v}) \in \mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ takový, že je splněno (2.1). Konkrétně $Y = X + \mathbf{w}_1$ a $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}_2$. Dále pro libovolné tři prvky $(X,\mathbf{u}), (Y,\mathbf{v}), (Z,\mathbf{w}) \in \mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ platí $\overrightarrow{(X,\mathbf{u})(Y,\mathbf{v})}^{\mathbb{C}} + \overrightarrow{(Y,\mathbf{v})(Z,\mathbf{w})}^{\mathbb{C}} = \overrightarrow{XY} + i(\mathbf{v}-\mathbf{u}) + \overrightarrow{YZ} + i(\mathbf{w}-\mathbf{v}) = \overrightarrow{XZ} + i(\mathbf{w}-\mathbf{u}) = \overrightarrow{(X,\mathbf{u})(Z,\mathbf{w})}^{\mathbb{C}}$, a tedy $(\mathcal{A}^{\mathbb{C}}, V^{\mathbb{C}}, \overrightarrow{}^{\mathbb{C}})$ je afinní prostor nad tělesem komplexních čísel $\mathbb{C}$. □

Dále budeme body $A \in \mathcal{A}$ ztotožňovat s prvky $(A,\mathbf{o}) \in \mathcal{A}^{\mathbb{C}}$. Při tomto ztotožnění můžeme $\mathcal{A}$ považovat za podmnožinu v $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$, která ovšem není afinním podprostorem.

Definice 2.1. Komplexní afinní prostor $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ sestrojený ve Větě 2.1 nazýváme *komplexní rozšíření* reálného afinního prostoru $\mathcal{A}$.

Úmluva. Jsou-li $(X,\mathbf{u}), (Y,\mathbf{v}) \in \mathcal{A}^{\mathbb{C}}, \mathbf{w} \in V^{\mathbb{C}}$, budeme místo $\overrightarrow{(X,\mathbf{u})(Y,\mathbf{v})}^{\mathbb{C}} = \mathbf{w}$ psát $(Y,\mathbf{v}) = (X,\mathbf{u}) + \mathbf{w}$, což je ekvivalentní rovnostem $Y = X + \mathbf{w}_1, \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}_2$, kde $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + i\mathbf{w}_2$.

Při ztotožnění $X \in \mathcal{A}$ s $(X,\mathbf{o}) \in \mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ a $\mathbf{u} \in V$ s $(\mathbf{u},\mathbf{o}) \in V^{\mathbb{C}}$ můžeme každý prvek $(X,\mathbf{u}) \in \mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ psát ve tvaru $(X,\mathbf{u}) = (X,\mathbf{o}) + (\mathbf{o},\mathbf{u}) = X + i\mathbf{u}$. Tedy každý bod $(X,\mathbf{u}) \in \mathcal{A}^{\mathbb{C}}_n$ můžeme psát, při pevně zvoleném $P \in \mathcal{A}_n$, ve tvaru

$$P + \mathbf{v} + i\mathbf{u}\,,$$

kde vektor $\mathbf{v}$ je jednoznačně určen podmínkou $X = P + \mathbf{v}$.

Zvolme nyní v afinním prostoru $\mathcal{A}$ afinní souřadnou soustavu afinním repérem

$$\langle P; \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \rangle\,. \tag{2.2}$$

Podle Věty 1.2 určuje repér (2.2) afinní souřadnou soustavou také v $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ a takovou afinní souřadnou soustavu budeme nazývat *reálná afinní souřadná soustava*. To znamená, že vzhledem k repéru (2.2) můžeme každému bodu $X + i\mathbf{u} \in \mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ přiřadit uspořádanou n-tici komplexních čísel $[x_1 + iu_1, \ldots, x_n + iu_n]$ takovou, že $X + i\mathbf{u} = P + \sum_{j=1}^{n}(x_j + iu_j)\mathbf{u}_j$, kde $[x_1; \ldots; x_n]$ jsou souřadnice bodu $X \in \mathcal{A}$ v afinní souřadné soustavě určené repérem (2.2) a $(u_1; \ldots; u_n)$ jsou souřadnice vektoru $\mathbf{u} \in V$ v bázi $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$.

Bod $X \in \mathcal{A}$ má vzhledem k (2.2) stejné souřadnice v $\mathcal{A}$ i v $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$. Navíc $X \in \mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ leží v $\mathcal{A}$ právě tehdy, jsou-li jeho souřadnice vzhledem k reálné afinní souřadné soustavě určené repérem (2.2) reálná čísla.

Definice 2.2. Buď $\mathcal{B}$ afinní podprostor v $\mathcal{A}$ a W jeho zaměření. Potom množinu $\mathcal{B} \times W$ nazýváme *komplexní rozšíření* podprostoru $\mathcal{B}$ a značíme ji $\mathcal{B}^{\mathbb{C}}$.

Je zřejmé, že $\mathcal{B}^{\mathbb{C}}$ je afinním podprostorem v $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$. Obráceně ale neplatí, že každý afinní podprostor v $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ je komplexním rozšířením nějakého afinního podprostoru

v $\mathcal{A}$. Například bod $X + i\mathbf{u} \in \mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ je afinním podprostorem v $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ a pro $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ není komplexním rozšířením žádného podprostoru v $\mathcal{A}$. Afinní podprostor v $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$, který vznikl jako komplexní rozšíření afinního podprostoru v $\mathcal{A}$, budeme nazývat *reálný afinní podprostor*.

Ke každému bodu $X + i\mathbf{u} \in \mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ můžeme sestrojit bod $X - i\mathbf{u} \in \mathcal{A}^{\mathbb{C}}$. Tento bod budeme nazývat *komplexně sdružený* k bodu $X + i\mathbf{u}$. Jsou-li dva body z $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ navzájem komplexně sdruženy, pak jejich souřadnice v libovolné reálné afinní souřadné soustavě v $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ jsou uspořádané n-tice navzájem komplexně sdružených čísel. Je–li $\mathcal{B}$ afinní podprostor v $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ určený bodem $B \in \mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ a zaměřením $W \subset V^{\mathbb{C}}$, je podprostor určený bodem $\overline{B}$ a zaměřením $\overline{W}$ afinní podprostor *komplexně sdružený* k afinnímu podprostoru $\mathcal{B}$ a budeme ho označovat $\overline{\mathcal{B}}$. Podprostor $\mathcal{B}$ je reálný právě tehdy, je–li $\mathcal{B} \equiv \overline{\mathcal{B}}$.

Obecně mohou podprostory $\mathcal{B} = \{B, W\}$ a $\overline{\mathcal{B}} = \{\overline{B}, \overline{W}\}$ mít nejrůznější vzájemné polohy. Mohou být mimoběžné, rovnoběžné i různoběžné. V případě, že jsou různoběžné, je jejich průnik reálný podprostor.

Určování vzájemných poloh, průniku a součtu podprostorů je stejné jako v reálném případě.

Věta 2.2. *Mějme dány reálné afinní prostory $\mathcal{A}_n$ a $\mathcal{A}_m$ a afinní zobrazení $f : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_m$. Potom existuje právě jedno afinní zobrazení $f^{\mathbb{C}} : \mathcal{A}_n^{\mathbb{C}} \to \mathcal{A}_m^{\mathbb{C}}$ takové, že $f^{\mathbb{C}}(X) = f(X)$ pro každý bod $X \in \mathcal{A}_n$.*

Důkaz. Zvolme libovolný bod $P \in \mathcal{A}_n$ a označme $P' = f(P) \in \mathcal{A}_m$. Potom $f(P + \mathbf{u}) = P' + \varphi_f(\mathbf{u})$, kde φ_f je asociované lineární zobrazení ze zaměření $\mathcal{A}_n$ do zaměření $\mathcal{A}_m$. Máme jednoznačně určené zobrazení $f^{\mathbb{C}} : \mathcal{A}_n^{\mathbb{C}} \to \mathcal{A}_m^{\mathbb{C}}$, které zobrazí bod $(P + \mathbf{u}, \mathbf{v})$ z $\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$ na bod $P' + \varphi_f^{\mathbb{C}}(\mathbf{u} + i\mathbf{v})$, kde $\varphi_f^{\mathbb{C}}$ je komplexní rozšíření φ_f z Věty 1.5. Snadno se vidí, že $f^{\mathbb{C}}$ je jediné afinní zobrazení požadovaných vlastností. □

Definice 2.3. Zobrazení $f^{\mathbb{C}}$ definované ve Větě 2.2 se nazývá *komplexní rozšíření afinního zobrazení f*.

Poznámka 2.1. Platí $\varphi_f^{\mathbb{C}} = \varphi_{f^{\mathbb{C}}}$. ♢

Každá afinní souřadná soustava v $\mathcal{A}_n$ určuje současně reálnou afinní souřadnou soustavu v $\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$. Z předchozí poznámky a Věty 1.6 vyplývá, že souřadnicová vyjádření reálného afinního zobrazení a jeho komplexního rozšíření jsou vzhledem k reálným afinním souřadným soustavám v $\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$ (respektive v $\mathcal{A}_m^{\mathbb{C}}$) totožná. To znamená, že matice komplexního rozšíření afinního zobrazení má v reálných afinních souřadných soustavách reálné koeficienty na rozdíl od matice obecného afinního zobrazení z $\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$ do $\mathcal{A}_m^{\mathbb{C}}$, jejíž koeficienty jsou komplexní čísla.

Úloha 2.1. Ověřte, zda daný podprostor je reálný:

a) Podprostor v $\mathcal{A}_2^{\mathbb{C}}$ je určen body $B_1 = [1 + i; 2 - i]$, $B_2 = [1 - i; 2 + i]$.

b) Podprostor v $\mathcal{A}_3^{\mathbb{C}}$ je určen rovnicemi

$$\begin{aligned} x + (3+i)y - iz &= 2 + 3i\,, \\ x + (3-i)y + iz &= 2 - 3i\,. \end{aligned}$$

c) Podprostor v $\mathcal{A}_3^{\mathbb{C}}$ je určen rovnicí

$$x + (3+i)y - iz = 0\,.$$

Řešení: a) Vektor $\overrightarrow{B_1B_2} = (-2i; 2i) = 2(-i; i)$. Potom přímka určená body B_1, B_2 má parametrické rovnice

$$\begin{aligned} x &= 1 + i - ti\,, \\ y &= 2 - i + ti \end{aligned}$$

a sečtením dostaneme její obecnou rovnici ve tvaru

$$x + y - 3 = 0\,,$$

což znamená, že přímka je reálná.

b) Nad komplexními čísly řešíme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x + (3+i)y - iz &= 2 + 3i\,, \\ x + (3-i)y + iz &= 2 - 3i\,. \end{aligned}$$

Sečtením dostaneme $x = 2-3y$ a dosazením do jedné z rovnic dostaneme $z = -3+y$. Parametrické vyjádření daného podprostoru je tedy tvaru

$$\begin{aligned} x &= 2 - 3t\,, \\ y &= \quad t\,, \\ z &= -3 + t\,, \end{aligned}$$

což znamená, že podprostor je reálný.

c) Z rovnice podprostoru dostaneme $x = -(3+i)y+iz$. Volbou y, z za parametry dostaneme parametrické rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned} x &= (-3-i)t + is\,, \\ y &= \quad t\,, \\ z &= \qquad s\,, \end{aligned}$$

což znamená, že podprostor je imaginární.

Úloha 2.2. Je dán podprostor $\mathcal{B}$ v $\mathcal{A}_4^{\mathbb{C}}$. Určete maximální reálný podprostor ležící v $\mathcal{B}$, když

a) $\mathcal{B} : 3x_1 + (1+i)x_2 - ix_3 - x_4 = 2 + i\,,$

b) $\mathcal{B} : x_1 + (3+i)x_2 - ix_3 = 0\,.$

Řešení: a) Maximální reálný podprostor ležící v $\mathcal{B}$ je $\mathcal{B} \cap \overline{\mathcal{B}}$. Máme

$$\overline{\mathcal{B}} : 3x_1 + (1-i)x_2 + ix_3 - x_4 = 2 - i\,.$$

$\mathcal{B} \cap \overline{\mathcal{B}}$ je společným řešením rovnic určujících $\mathcal{B}$ a $\overline{\mathcal{B}}$. Sečtením rovnic dostaneme $x_4 = -2 + 3x_1 + x_2$ a po dosazení do jedné z rovnic dostaneme $x_3 = -1 + x_2$. Je tedy průnikem $\mathcal{B} \cap \overline{\mathcal{B}}$ (a tím i maximálním reálným podprostorem v $\mathcal{B}$) reálná rovina o parametrickém vyjádření

$$x_1 = t\,, \quad x_2 = s\,, \quad x_3 = -1 + s\,, \quad x_4 = -2 + 3t + s\,.$$

b) Máme

$$\overline{\mathcal{B}} : 3x_1 + (3-i)x_2 + ix_3 = 0\,.$$

Společným řešením rovnic určujících $\mathcal{B}$ a $\overline{\mathcal{B}}$ dostaneme

$$x_1 = -3t\,, \quad x_2 = t\,, \quad x_3 = t\,, \quad x_4 = s\,,$$

tj. maximálním reálným podprostorem v $\mathcal{B}$ je reálná rovina.

Úloha 2.3. V $\mathcal{A}_3^{\mathbb{C}}$ je dána přímka p bodem $A = [1; i; -i]$ a směrovým vektorem $\mathbf{u} = (1+i; 2; i)$. Určete vzájemnou polohu přímek p a $\overline{p}$.

Řešení: Přímka $\overline{p}$ je určena bodem $\overline{A} = [1; -i; i]$ a směrovým vektorem $\overline{\mathbf{u}} = (1-i; 2; -i)$. Snadno se přesvědčíme, že matice sestavená ze souřadnic vektorů $\mathbf{u}$, $\overline{\mathbf{u}}$ a $\overrightarrow{A\overline{A}} = (0; -2i; 2i)$ má hodnost 3, což znamená, že přímky p a $\overline{p}$ jsou mimoběžné.

3 Cvičení

3.1. V $\mathcal{A}_3^{\mathbb{C}}$ jsou v reálné bázi dány bod $B = [1; -2; 3]$ a vektory $\mathbf{u} = (2; 1; -1)$, $\mathbf{v} = (3; 0; 1)$. Určete souřadnice bodů $C = B + i\mathbf{u}$, $\overline{C}$ a vektorů $\mathbf{w} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$, $\overline{\mathbf{w}}$.

{ $C = [1 + 2i; -2 + i; 3 - i]$, $\overline{C} = [1 - 2i; -2 - i; 3 + i]$,
$\mathbf{w} = (2 + 3i; 1; -1 + i)$, $\overline{\mathbf{w}} = (2 - 3i; 1; -1 - i)$ }

3.2. V $\mathcal{A}_2^{\mathbb{C}}$ jsou v reálné bázi dány bod $K = [2+i; 3-2i]$ a vektor $\mathbf{u} = (-1+3i; 3+2i)$. Určete parametrické i obecné rovnice přímky dané bodem K a vektorem $\mathbf{u}$.

{ Parametrické rovnice: $x = 2+i+t(-1+3i)$, $y = 3-2i+$
$t(3+2i)$. Obecné rovnice: $(3+2i)x+(1-3i)y-1+4i = 0$
}

3.3. Najděte reálné body přímek v $\mathcal{A}_2^{\mathbb{C}}$:

a) $p : ix + (3+2i)y - 1 = 0$,

b) p je určena body $A = [1+i; 2i]$, $B = [i; 1+2i]$,

c) $p : x = (1+i) + it$, $y = (1-i) + 2t$.

{ a) $[-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}]$, b) neexistují, c) $[\frac{1}{2}; -1]$ }

3.4. Určete rovnici reálné přímky procházející bodem $K = [3-2i; 1+i]$.

{ Reálná přímka je určena body K a $\overline{K}$: $x + 2y - 5 = 0$
}

3.5. V $\mathcal{A}_3^{\mathbb{C}}$ určete parametrické rovnice reálné přímky, která prochází imaginárním bodem $A = [2+i; -1+2i; 1-i]$.

{ $x = 3 - t$, $y = 1 - 2t$, $z = t$ }

3.6. V $\mathcal{A}_3^{\mathbb{C}}$ udejte příklad přímky p takové, že p a $\overline{p}$ jsou

a) různoběžné,

b) rovnoběžné,

c) mimoběžné.

3.7. V $\mathcal{A}_3^{\mathbb{C}}$ ukažte, že přímka $p : (1-4i)y + (1-i)z + 1 - 3i = 0\,, (1-3i)x - 2y + (3+3i)z = 0$ je různoběžná s přímkou s ní komplexně sdruženou a vypočtěte souřadnice jejich společného bodu a rovnici roviny jimi určené.

{ $[-\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}]$, $x - 8y - 3z - 6 = 0$ }

3.8. V $\mathcal{A}_3^{\mathbb{C}}$ určete rovnice reálné přímky, která leží v imaginární rovině $\alpha : (3-2i)x + (1+i)y - iz + 3 = 0$.

{ $x = t$, $y = -3 - 3t$, $z = -3 - 5t$ }

3.9. Určete reálný podprostor obsažený v podprostoru $\mathcal{A}_4^{\mathbb{C}}$:

a) $\mathcal{B} : (3-2i)x_1 + (1+i)x_2 - ix_3 + 5x_4 = 0$,

b) $\mathcal{C} : (1+i)x_1 + (2-i)x_2 - x_4 = 1$, $x_1 + x_2 + ix_3 - (1-i)x_4 = 0$,

c) $\mathcal{D} : x_1 = 1 + t + is$, $x_2 = it$, $x_3 = i + s$, $x_4 = (1+i) + (2+i)t$.

{ a) $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$, $3x_1 + x_2 + 5x_4 = 0$, b) bod $[\frac{1}{5}; \frac{1}{5}; -\frac{2}{5}; -\frac{2}{5}]$, c) bod $[2; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}]$ }

3.10. Určete vzájemnou polohu podprostorů v $\mathcal{A}_4^{\mathbb{C}}$:

a) $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ jsou podprostory z cvičení 3.9,

b) $\mathcal{B}$ je podprostor z cvičení 3.9 a $\mathcal{C} : X = [1; 0; 0; 1] + t(0; 1; 1; i)$.

{ a) podprostory se protínají v přímce, b) podprostory se protínají v bodě $[1; \frac{1}{13}(1+21i); \frac{1}{13}(1+21i); \frac{1}{13}(-8+i)]$ }

3.11. Nechť φ a ψ jsou lineární zobrazení z reálného vektorového prostoru V do reálného vektorového prostoru U. Dokažte, že zobrazení Φ z $V^{\mathbb{C}}$ do $U^{\mathbb{C}}$ definované předpisem $\Phi(\mathbf{x}+i\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{y}) + i(\varphi(\mathbf{y}) + \psi(\mathbf{x}))$ je lineární. Dále dokažte, že v reálných bázích je $A_\Phi = A_\varphi + iA_\psi$.

{ Návod: Postupujte jako v důkazech Vět 1.5 a 1.6 }

3.12. Dokažte, že je-li $f : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_m$ afinní zobrazení a $\psi : Z(\mathcal{A}_n) \to Z(\mathcal{A}_m)$ lineární zobrazení, je

$$F : \mathcal{A}_n^{\mathbb{C}} \to \mathcal{A}_m^{\mathbb{C}}$$

zadané předpisem

$$F(P + \mathbf{u} + i\mathbf{v}) = f(P) + \varphi_f(\mathbf{u}) - \psi(\mathbf{v}) + i(\varphi_f(\mathbf{v}) + \psi(\mathbf{u}))$$

afinní zobrazení a v reálných afinních souřadných soustavách v $\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$ a $\mathcal{A}_m^{\mathbb{C}}$ je

$$A_F = A_f + iA_\psi.$$

Kapitola 2

PROJEKTIVNÍ ROZŠÍŘENÍ AFINNÍHO PROSTORU

V teorii kuželoseček a kvadrik hrají důležitou úlohu nevlastní body, které si můžeme intuitivně představit jako body, ve kterých se protínají rovnoběžné přímky. Tyto body ovšem nepatří do afinního prostoru a při použití afinních souřadnic se nedají souřadnicově vyjádřit. Proto v této kapitole zavedeme pojem projektivního rozšíření afinního prostoru, v němž budeme moci pracovat také s nevlastními body, které můžeme vyjádřit rovněž pomocí souřadnic.

4 Projektivní prostory

V této kapitole V_{n+1} je $(n+1)$-rozměrný vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{T}$ (dále $\mathbb{T}$ bude buď těleso reálných nebo komplexních čísel).

Definice 4.1. Množinu $\mathcal{P}_n$ všech jednorozměrných podprostorů vektorového prostoru V_{n+1} nazveme n-rozměrným *projektivním prostorem* nad tělesem $\mathbb{T}$. Jeho prvky nazýváme body. V_{n+1} nazýváme *aritmetickým základem (nosičem)* prostoru $\mathcal{P}_n$. Vektor $\mathbf{x} \in V, \mathbf{x} \neq \mathbf{o}$, který generuje bod $X = \langle \mathbf{x} \rangle = \{\alpha\mathbf{x}, \alpha \in \mathbb{T}\} \in \mathcal{P}_n$ nazýváme *aritmetickým zástupcem* bodu X.

Poznámka 4.1. Každý bod $A \in \mathcal{P}_n$ má nekonečně mnoho aritmetických zástupců, protože jednodimenzionální podprostor má nekonečně mnoho bází. Je-li $\mathbf{a}$ aritmetickým zástupcem bodu A, tj. $A = \langle \mathbf{a} \rangle$, je i $\alpha\mathbf{a}, \alpha \in \mathbb{T}, \alpha \neq 0$, aritmetickým zástupcem bodu A. ♢

Poznámka 4.2. Přesněji by mělo být řečeno, že projektivním prostorem je dvojice $(\mathcal{P}_n, V_{n+1})$. Pokud nemůže dojít k záměně vektorového prostoru V_{n+1}, budeme psát jen $\mathcal{P}_n$. ♢

Definice 4.2. Body $A_1 = \langle \mathbf{a}_1 \rangle, \ldots, A_k = \langle \mathbf{a}_k \rangle$ nazveme *lineárně nezávislé (závislé)*, jestliže jsou lineárně nezávislé (závislé) vektory $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$. Řekneme, že bod $A = \langle \mathbf{a} \rangle$ je *lineární kombinací bodů* $A_1; \ldots; A_k$, jestliže vektor $\mathbf{a}$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$. Je-li $\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \ldots + \alpha_k \mathbf{a}_k$, píšeme formálně $A = \alpha_1 A_1 + \ldots + \alpha_k A_k$.

Poznámka 4.3. Z vlastností vektorových prostorů vyplývá, že v $\mathcal{P}_n$ existuje nejvýše $(n+1)$ lineárně nezávislých bodů. ♢

Poznámka 4.4. Lineárně nezávislé body budeme také nazývat *body v obecné poloze*. ♢

Definice 4.3. *Aritmetickou bází* projektivního prostoru $\mathcal{P}_n$ rozumíme libovolnou bázi $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n+1}$ vektorového prostoru V_{n+1}. *Geometrickou bází (projektivním repérem)* prostoru $\mathcal{P}_n$ rozumíme libovolnou $(n+2)$-tici bodů $\langle O_1; \ldots; O_{n+1}, E \rangle$ takových, že libovolných $(n+1)$ z nich je lineárně nezávislých. Body $O_1; \ldots; O_{n+1}$ nazýváme *základní* body a bod E *jednotkový* bod geometrické báze.

Věta 4.1. *Je-li* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n+1}$ *aritmetická báze prostoru* $\mathcal{P}_n$*, potom*

$$\langle \langle \mathbf{u}_1 \rangle, \ldots, \langle \mathbf{u}_{n+1} \rangle, \langle \mathbf{u}_1 + \ldots + \mathbf{u}_{n+1} \rangle \rangle$$

je geometrická báze $\mathcal{P}_n$*.*

Důkaz. Stačí ukázat, že pro libovolné i je $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{i-1}, \mathbf{u}_{i+1}, \ldots, \mathbf{u}_{n+1}, \mathbf{u}_1 + \ldots + \mathbf{u}_{n+1}$ soustava nezávislých vektorů. Nechť tedy

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \ldots + \alpha_{i-1} \mathbf{u}_{i-1} + \alpha_{i+1} \mathbf{u}_{i+1} + \ldots + \alpha_{n+1} \mathbf{u}_{n+1} + \alpha_{n+2}(\mathbf{u}_1 + \ldots + \mathbf{u}_{n+1}) = \mathbf{o}$$

$\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+2} \in \mathbb{T}$. Vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n+1}$ jsou lineárně nezávislé, a tedy musí být

$$\alpha_1 + \alpha_{n+2} = \ldots = \alpha_{i-1} + \alpha_{n+2} = \alpha_{n+2} = \alpha_{i+1} + \alpha_{n+2} = \ldots = \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} = 0,$$

odtud $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{i-1} = \alpha_{i+1} = \ldots = \alpha_{n+1} = -\alpha_{n+2} = 0$. □

Věta 4.2. *Je-li* $\langle O_1; \ldots; O_{n+1}, E \rangle$ *geometrická báze* $\mathcal{P}_n$*, pak existuje aritmetická báze* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n+1}$ *taková, že* $O_1 = \langle \mathbf{u}_1 \rangle, \ldots, O_{n+1} = \langle \mathbf{u}_{n+1} \rangle, E = \langle \mathbf{u}_1 + \ldots + \mathbf{u}_{n+1} \rangle$*. Je-li* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n+1}$ *jiná aritmetická báze s touto vlastností, pak existuje* $\alpha \in \mathbb{T}$*,* $\alpha \neq 0$*, takové, že* $\mathbf{v}_i = \alpha \mathbf{u}_i$*,* $i = 1, \ldots, n+1$*.*

Důkaz. Nechť $\langle O_1; \ldots; O_{n+1}, E \rangle$ je geometrická báze. Uvažujme libovolné aritmetické zástupce $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{n+1}, \mathbf{w}$ těchto bodů. Vektory $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{n+1}$ musí být lineárně nezávislé, a tedy $\mathbf{w} = c_1 \mathbf{w}_1 + \cdots + c_{n+1} \mathbf{w}_{n+1}$. Navíc všechny koeficienty c_i jsou nenulové. Kdyby se totiž $c_i = 0$ pro některé i, potom by byly body $O_1; \ldots; O_{i-1}, O_{i+1}, \ldots, O_{n+1}, E$ lineárně závislé, což je spor s předpokladem, že $\langle O_1; \ldots; O_{n+1}, E \rangle$ tvoří geometrickou bázi. Položme nyní $\mathbf{u}_i = c_i \mathbf{w}_i$, $\mathbf{u} = \mathbf{w}$. Potom je $O_i = \langle \mathbf{u}_i \rangle$ a $E = \langle \mathbf{u} \rangle =$

$\langle \mathbf{u}_1 + \ldots + \mathbf{u}_{n+1} \rangle$. Je-li $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n+1}$ jiná aritmetická báze s uvedenou vlastností, je $\mathbf{v}_1 = \alpha_1 \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n+1} = \alpha_{n+1}\mathbf{u}_{n+1}$, $\mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_{n+1} = \alpha_{n+2}(\mathbf{u}_1 + \ldots + \mathbf{u}_{n+1})$. Odtud dostaneme

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \ldots + \alpha_{n+1}\mathbf{u}_{n+1} = \alpha_{n+2}(\mathbf{u}_1 + \ldots + \mathbf{u}_{n+1})$$

a z nezávislosti vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n+1}$ je

$$\alpha_1 - \alpha_{n+2} = \ldots = \alpha_{n+1} - \alpha_{n+2} = 0\,,$$

tedy $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{n+1} = \alpha_{n+2} = \alpha$. □

Definice 4.4. Nechť $X \in \mathcal{P}_n$ je bod, $\langle O_1; \ldots; O_{n+1}, E \rangle$ je geometrická báze $\mathcal{P}_n$ taková, že $O_1 = \langle \mathbf{u}_1 \rangle, \ldots, O_{n+1} = \langle \mathbf{u}_{n+1} \rangle, E = \langle \mathbf{u}_1 + \ldots + \mathbf{u}_{n+1} \rangle$. Nechť $X = \langle \mathbf{x} \rangle$, kde

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{u}_1 + \ldots + x_{n+1}\mathbf{u}_{n+1}$$

$x_i \in \mathbb{T}$. Potom uspořádanou $(n+1)$-tici $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ prvků z $\mathbb{T}$ nazveme *projektivními homogenními souřadnicemi bodu* X vzhledem ke geometrické bázi $\langle O_1, \ldots, O_{n+1}, E \rangle$.

Věta 4.3. *Nechť bod $X \in \mathcal{P}_n$ má vzhledem k libovolné geometrické bázi $\langle O_1; \ldots; O_{n+1}, E \rangle$ projektivní homogenní souřadnice $(x_1; \ldots; x_{n+1})$. Potom*

(i) *alespoň jedno z čísel $x_1; \ldots; x_{n+1}$ je nenulové,*

(ii) *$(y_1; \ldots; y_{n+1})$ jsou také projektivní homogenní souřadnice bodu X vzhledem ke geometrické bázi $\langle O_1; \ldots; O_{n+1}, E \rangle$ tehdy a jenom tehdy, když existuje $\alpha \in \mathbb{T}, \alpha \neq 0$, takové, že $y_i = \alpha x_i, i = 1, \ldots, n+1$.*

Důkaz. (i) Je-li $X = \langle \mathbf{x} \rangle$, je $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$, a tedy alespoň jedna souřadnice vektoru $\mathbf{x}$ vzhledem k aritmetické bázi $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n+1}$ generované geometrickou bází $\langle O_1; \ldots; O_{n+1}, E \rangle$ musí být nenulová.

(ii) Je-li $X = \langle \mathbf{x} \rangle$ a současně $X = \langle \mathbf{y} \rangle$, existuje takový nenulový prvek β z $\mathbb{T}$, že $\mathbf{y} = \beta \mathbf{x}$. Dále můžeme uvažovat jinou aritmetickou bázi $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n+1}$ generovanou geometrickou bází $\langle O_1; \ldots; O_{n+1}, E \rangle$. Podle Věty 4.2 existuje nenulové $\gamma \in \mathbb{T}$ takové, že $\mathbf{v}_i = \gamma \mathbf{u}_i$. Potom $\mathbf{y} = y_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + y_{n+1}\mathbf{v}_{n+1}$ je ekvivalentní $\mathbf{x} = \frac{\gamma}{\beta}(y_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + y_{n+1}\mathbf{u}_{n+1})$ a odtud vyplývá $y_i = \alpha x_i$, kde $\alpha = \frac{\beta}{\gamma}$. □

Věta 4.4. *Body $A_1; \ldots; A_k$ jsou lineárně nezávislé tehdy a jenom tehdy, když matice, jejíž řádky či sloupce tvoří souřadnice bodů $A_1; \ldots; A_k$ vzhledem k nějaké geometrické bázi, má hodnost k.*

Důkaz. Převede se na lineární nezávislost aritmetických zástupců. □

Definice 4.5. Nechť $(\mathcal{P}_n, V_{n+1})$ je projektivní prostor a W_{k+1} je $(k+1)$-rozměrný podprostor ve V_{n+1}, pak množinu všech bodů projektivního prostoru $\mathcal{P}_n$, jejichž aritmetičtí zástupci patří do W_{k+1}, nazveme *k-rozměrným projektivním podprostorem* prostoru $\mathcal{P}_n$. Jednorozměrný podprostor nazýváme *přímka*, dvourozměrný *rovina* a $(n-1)$–rozměrný *nadrovina* v $\mathcal{P}_n$.

Věta 4.5. *Nechť $(\mathcal{Q}_k, W_{k+1})$ a $(\mathcal{R}_l, U_{l+1})$ jsou dva podprostory projektivního prostoru $(\mathcal{P}_n, V_{n+1})$. Pak platí:*

(i) *množina $\mathcal{Q}_k + \mathcal{R}_l = \{\langle \mathbf{u}\rangle | \mathbf{o} \neq \mathbf{u} \in W_{k+1} + U_{l+1}\}$ je projektivním podprostorem v $\mathcal{P}_n$,*

(ii) *je-li $W_{k+1} \cap U_{l+1} \neq \{\mathbf{o}\}$, je $\mathcal{Q}_k \cap \mathcal{R}_l$ projektivním podprostorem v $\mathcal{P}_n$, přičemž $\mathcal{Q}_k \cap \mathcal{R}_l = \{\langle \mathbf{u}\rangle | \mathbf{o} \neq \mathbf{u} \in W_{k+1} \cap U_{l+1}\}$.*

Důkaz. Vyplývá okamžitě z definice projektivního podprostoru. □

Poznámka 4.5. Při označení z Věty 4.5 nazýváme podprostor $\mathcal{Q}_k + \mathcal{R}_l$ *součtem (spojením)* a $\mathcal{Q}_k \cap \mathcal{R}_l$ nazýváme *průnikem* projektivních podprostorů $\mathcal{Q}_k$ a $\mathcal{R}_l$. Z vlastností součtu a průniku vektorových podprostorů je zřejmé, že $\mathcal{Q}_k + \mathcal{R}_l$ obsahuje jako podmnožinu množinové sjednocení $\mathcal{Q}_k$ a $\mathcal{R}_l$.

Z Věty 4.5 také vyplývá, že dva různé podprostory projektivního prostoru mohou mít neprázdný průnik, říkáme, že jsou *různoběžné* (v případě, že $W_{k+1} \cap U_{l+1} \neq \{\mathbf{o}\}$), nebo nemají společné body, říkáme, že jsou *mimoběžné* (v případě, že $W_{k+1} \cap U_{l+1} \equiv \{\mathbf{o}\}$). V projektivním prostoru tedy nemůžeme definovat pojem rovnoběžnosti.

Pro různoběžné podprostory dále platí $\dim(\mathcal{Q}_k + \mathcal{R}_l) = k + l - \dim(\mathcal{Q}_k \cap \mathcal{R}_l)$. ♢

Věta 4.6. *Nechť $\mathcal{Q}_k$ je k-rozměrný podprostor v $\mathcal{P}_n$. Pak*

(i) *v $\mathcal{Q}_k$ existuje $k+1$ lineárně nezávislých bodů,*

(ii) *libovolných $l \geq k+2$ bodů z $\mathcal{Q}_k$ je lineárně závislých,*

(iii) *jsou-li $A_1 = \langle \mathbf{a}_1\rangle, \ldots, A_{k+1} = \langle \mathbf{a}_{k+1}\rangle$ lineárně nezávislé body z $\mathcal{Q}_k$ a $X = \langle \mathbf{x}\rangle \in \mathcal{P}_n$, pak $X \in \mathcal{Q}_k$ právě tehdy, když $\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \lambda_{k+1}\mathbf{a}_{k+1}$ pro nějaká $\lambda_i \in \mathbb{T}$ a alespoň jedno $\lambda_i \neq 0$.*

Důkaz. Vlastnosti (i) a (ii) jsou zřejmé z lineární nezávislosti aritmetických zástupců.

(iii) Nechť $\mathcal{Q}_k$ má aritmetický základ W_{k+1}. Potom $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{k+1}$ je báze W_{k+1} a tedy, je-li $X = \langle \mathbf{x}\rangle \in \mathcal{Q}_k$, je $\mathbf{x} \neq \mathbf{o} \in W_{k+1}$ a existují $\lambda_i \in \mathbb{T}, i = 1, \ldots, k+1$ taková, že $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i \mathbf{a}_i$ a alespoň jedno λ_i je nenulové. □

Každý bod $X \in \mathcal{Q}_k$ lze napsat formálně jako

$$X = \lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_{k+1} A_{k+1}, \tag{4.1}$$

kde $A_1; \ldots; A_{k+1}$ jsou libovolné lineárně nezávislé body z $\mathcal{Q}_k$. Takovéto zadání k-rozměrného podprostoru pomocí lineárně nezávislých bodů budeme nazývat *parametrické* zadání podprostoru $\mathcal{Q}_k$.

Poznámka 4.6. Je-li bod $X \in \mathcal{Q}_k$ vyjádřen jako v (4.1), budeme říkat, že X je *projektivní kombinací* lineárně nezávislých bodů $A_1; \ldots; A_{k+1}$. Všimněme si, že u projektivní kombinace bodů klademe na koeficienty $\lambda_i \in \mathbb{T}$, $i = 1, \ldots, k+1$, jedinou podmínku, a to, aby alespoň jedno λ_i bylo nenulové. To je rozdíl proti afinní kombinaci bodů, kterou známe z afinní lineární geometrie, kde byla podmínka, aby součet

koeficientů byl roven jedné. Parametrického zápisu projektivního podprostoru budeme často používat v případě jednodimenzionálního podprostoru, tj. přímky. Je-li přímka p určena body $A, B \in \mathcal{P}_n$, $A \neq B$, potom $X \in p$ právě tehdy, když

$$X = \alpha A \ + \beta B$$

a alespoň jedno z čísel α, β je různé od nuly. ♢

Věta 4.7. *Nechť $\mathcal{P}_n$ je projektivní prostor a $\langle O_1; \dots ; O_{n+1}, E\rangle$ je jeho geometrická báze.*

(i) *Nechť* $M = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n+1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{l1} & \dots & a_{ln+1} \end{pmatrix}$ *je matice nad $\mathbb{T}$, $h(M) \leq n$. Potom množina všech bodů X z $\mathcal{P}_n$, jejichž projektivní homogenní souřadnice $(x_1; \dots ; x_{n+1})$ vzhledem ke geometrické bázi $\langle O_1; \dots ; O_{n+1}, E\rangle$ vyhovují homogenní soustavě rovnic*

$$M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

tvoří $(n - h(M))$-rozměrný podprostor v $\mathcal{P}_n$.

(ii) *Každý podprostor v $\mathcal{P}_n$ lze zadat způsobem popsaným v* (i).

Důkaz. Ad (i). Nechť $O_i = \langle \mathbf{u}_i \rangle, E = \langle \sum_i \mathbf{u}_i \rangle$. Potom množina vektorů $\mathbf{x} \in V_{n+1}$, jejichž souřadnice vzhledem k bázi $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n+1}$ vyhovují soustavě (4.2), tvoří $((n+1) - h(M))$-rozměrný podprostor $W \subseteq V_{n+1}$, který určuje $(n - h(M))$-rozměrný podprostor $\mathcal{Q}_{\subseteq}\mathcal{P}_n$.

Ad (ii). Tato část byla dokázána v lineární algebře, kde bylo dokázáno, že každý podprostor vektorového prostoru se může v souřadnicích zadat jako řešení homogenní soustavy rovnic. □

Vyjádření podprostoru $\mathcal{Q}$ popsané v předchozí větě se nazývá *obecným* vyjádřením podprostoru.

Jako důsledek Věty 4.7 dostáváme, že obecné vyjádření nadroviny, tj. podprostoru dimenze $(n-1)$, je

$$a_1 x_1 + \dots + a_{n+1} x_{n+1} = 0, \quad (a_1, \dots, a_{n+1}) \neq (0, \dots, 0).$$

Poznámka 4.7. Všimněme si, že na rozdíl od obecného vyjádření podprostoru v afinním nebo euklidovském prostoru, je obecné vyjádření podprostoru v projektivním prostoru dáno homogenními rovnicemi. ♢

Poznámka 4.8. Z předchozího obecného vyjádření nadroviny okamžitě vyplývá, že dvě nadroviny v $\mathcal{P}_n$ buď splývají (v tom případě se jejich obecné rovnice liší o nenulový násobek), nebo mají společný podprostor dimenze $(n-2)$. V projektivním prostoru tedy není definován pojem rovnoběžnosti nadrovin. ♢

Přechod od jednoho typu zadání podprostoru k druhému je následující. Nechť k-rozměrný podprostor $\mathcal{Q}_k$ je zadán obecným vyjádřením (4.2). Potom každé řešení soustavy (4.2) je tvaru $\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_{k+1}\mathbf{u}_{k+1}$, kde $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{k+1}$ je fundamentální systém řešení (4.2). Potom $X = c_1\langle\mathbf{u}_1\rangle + \ldots + c_{k+1}\langle\mathbf{u}_{k+1}\rangle$ je parametrické vyjádření $\mathcal{Q}_k$. Opačně, je-li zadáno parametrické vyjádření, musíme k danému fundamentálnímu systému řešení nalézt přislušný homogenní systém rovnic. Z algebry víme, že to lze provést vždy a tento systém rovnic je potom obecným vyjádřením podprostoru $\mathcal{Q}_k$.

Mějme nyní dvě geometrické báze v $\mathcal{P}_n$

$$\langle O_1; \ldots ; O_{n+1}, E\rangle\,, \tag{4.3}$$

$$\langle O'_1, \ldots, O'_{n+1}, E'\rangle \tag{4.4}$$

takové, že $O_i = \langle\mathbf{e}_i\rangle, E = \langle\sum_i \mathbf{e}_i\rangle, O'_i = \langle\mathbf{e}'_i\rangle, E' = \langle\sum_i \mathbf{e}'_i\rangle$. Potom vektory $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n+1}$ a $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_{n+1}$ tvoří dvě báze ve V_{n+1}, a tedy každý vektor $\mathbf{e}'_i$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n+1}$. Maticově to můžeme zapsat formálně ve tvaru

$$(\mathbf{e}'_1 \ldots \mathbf{e}'_{n+1}) = (\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_{n+1})Q\,, \tag{4.5}$$

kde matice Q je takzvaná matice přechodu od báze $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n+1}$ k bázi $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_{n+1}$ a je tvořena souřadnicemi vektorů $\mathbf{e}'_i$ vzhledem k druhé bázi $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n+1}$ uspořádanými do sloupců. Potom vektor $\mathbf{x} \in V$, který generuje bod $X \in \mathcal{P}_n$, můžeme vzhledem k první bázi vyjádřit maticově jako

$$\mathbf{x} = (\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_{n+1}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$$

a vzhledem k druhé jako

$$\mathbf{x} = (\mathbf{e}'_1 \ldots \mathbf{e}'_{n+1}) \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Dosadíme nyní za $(\mathbf{e}'_1 \ldots \mathbf{e}'_{n+1})$ z (4.5) a dostaneme

$$\mathbf{x} = (\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_{n+1})\, Q \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Máme tedy dvě vyjádření vektoru $\mathbf{x}$ vzhledem k první bázi. Protože souřadnicová vyjádření bodu X vzhledem k téže geometrické bázi se mohou lišit o nenulový násobek, dostaneme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \alpha\, Q \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_{n+1} \end{pmatrix},$$

$\alpha \neq 0 \in \mathbb{T}$. Matice $\alpha\, Q$ se nazývá *matice přechodu* od první geometrické báze k druhé geometrické bázi. V jejich sloupcích jsou souřadnice bodů O'_i vyjádřené vzhledem ke staré geometrické bázi. Matice $\alpha\, Q$ je určena až na nenulový násobek. Budeme-li $(X) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$ značit sloupcovou matici projektivních homogenních souřadnic vzhledem ke staré geometrické bázi a $(X') = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_{n+1} \end{pmatrix}$ vzhledem k nové geometrické bázi, je $(X) = \alpha\, Q(X')$ maticový zápis transformačních rovnic v projektivním prostoru.

Úloha 4.1. V $\mathcal{P}_3$ je dána geometrická báze $\langle O_1, O_2, O_3, O_4, E\rangle$. Určete obecné i parametrické vyjádření roviny procházející body $O_1 = (1;0;0;0)$, $O_2 = (0;1;0;0)$ a $A = (2;1;1;-1)$.

Řešení: Parametrické vyjádření $\rho \equiv (O_1, O_2, A)$ je $\rho : X = \alpha_1 O_1 + \alpha_2 O_2 + \alpha_3 A$, tj

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 \qquad + 2\alpha_3\,, \\ x_2 &= \qquad \alpha_2 + \alpha_3\,, \\ x_3 &= \qquad\quad \alpha_3\,, \\ x_4 &= \qquad -\alpha_3\,. \end{aligned}$$

Obecná rovnice má tvar $\rho : a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0$. Souřadnice O_1, O_2, A musí být řešením, tedy

$$\begin{aligned} a_1 \qquad\qquad\quad &= 0\,, \\ a_2 \qquad\quad &= 0\,, \\ 2a_1 + a_2 + a_3 - a_4 &= 0\,. \end{aligned}$$

Odtud

$$\rho : x_3 + x_4 = 0\,.$$

Poznámka: Obecná rovnice roviny v $\mathcal{P}_3$, která je určena body $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4})$, $i = 1, 2, 3$, je také $\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = 0$. Odtud $\rho : \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -x_3 - x_4 = 0\,.$

Úloha 4.2. V $\mathcal{P}_3$ je dána geometrická báze $\langle O_1, O_2, O_3, O_4, E\rangle$. Určete transformační rovnice při přechodu k nové geometrické bázi $O'_1 = (1;1;0;0)$, $O'_2 = (0;1;1;0)$, $O'_3 = (0;0;1;1)$, $O'_4 = (0;0;0;1)$, $E' = \sum_{i=1}^{4} O'_i$.

Řešení: Vzhledem k první bázi máme $X = x_1O_1+x_2O_2+x_3O_3+x_4O_4$. Vzhledem k nové bázi je $X = x'_1O'_1 + x'_2O'_2 + x'_3O'_3 + x'_4O'_4$ a dosazením dostaneme

$$\begin{aligned} X &= x'_1O'_1 + x'_2O'_2 + x'_3O'_3 + x'_4O'_4 = \\ &= x'_1(O_1 + O_2) + x'_2(O_2 + O_3) + x'_3(O_3 + O_4) + x'_4O_4 = \\ &= x'_1O_1 + (x'_1 + x'_2)O_2 + (x'_2 + x'_3)O_3 + (x'_3 + x'_4)O_4\,. \end{aligned}$$

Tedy X má vzhledem ke staré bázi také souřadnice $X = (x'_1; x'_1+x'_2; x'_2+x'_3; x'_3+x'_4)$. Protože bod je svými projektivními homogenními souřadnicemi dán až na nenulový násobek, jsou transformační rovnice tvaru

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha x'_1\,, \\ x_2 &= \alpha x'_1 + \alpha x'_2\,, \\ x_3 &= \qquad \alpha x'_2 + \alpha x'_3\,, \\ x_4 &= \qquad\qquad \alpha x'_3 + \alpha x'_4\,, \end{aligned}$$

kde $\alpha \neq 0 \in \mathbb{T}$.

5 Přechod od projektivního prostoru k afinnímu

Nechť $\mathcal{P}_n$ je n-rozměrný projektivní prostor a V_{n+1} jeho aritmetický základ. Nechť $\mathcal{N}$ je nadrovina (tj. podprostor dimenze $(n-1)$) v $\mathcal{P}_n$ určený vektorovým podprostorem $U_n \subset V_{n+1}$. Dále budeme $\mathcal{N}$ nazývat *nadrovinou nevlastních bodů*.

Zvolme geometrickou bázi $O_1; \ldots; O_n \in \mathcal{N}, O_{n+1}, E \notin \mathcal{N}$, $O_i = \langle \mathbf{e}_i \rangle$, $E = \langle \sum_i \mathbf{e}_i \rangle$, $i = 1, \ldots, n+1$. Označme $\mathcal{A}_n := \mathcal{P}_n - \mathcal{N}$. Potom ve zvolené geometrické bázi má $\mathcal{N}$ obecné rovnice $x_{n+1} = 0$. Nechť $X = \langle \mathbf{x} \rangle, Y = \langle \mathbf{y} \rangle \in \mathcal{A}_n$. Potom

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_{n+1}\mathbf{e}_{n+1}\,, \qquad x_{n+1} \neq 0\,, \\ \mathbf{y} &= y_1\mathbf{e}_1 + \cdots + y_{n+1}\mathbf{e}_{n+1}\,, \qquad y_{n+1} \neq 0\,. \end{aligned}$$

Položme $\bar{x}_i = \frac{x_i}{x_{n+1}}$, $\bar{y}_i = \frac{y_i}{y_{n+1}}$, $i = 1, \ldots, n$, a $\overrightarrow{XY} = (\bar{y}_1 - \bar{x}_1)\mathbf{e}_1 + \ldots + (\bar{y}_n - \bar{x}_n)\mathbf{e}_n$. Je zřejmé, že je takto definováno zobrazení $^{\rightarrow} : \mathcal{A}_n \times \mathcal{A}_n \to U_n$. Aby trojice $(\mathcal{A}_n, U_n, ^{\rightarrow})$ tvořila afinní prostor, musíme dokázat, že platí následující axiomy afinního prostoru

1. pro každý bod X z $\mathcal{A}_n$ a každý vektor $\mathbf{u}$ z U_n existuje právě jeden bod Y z $\mathcal{A}_n$ takový, že $\overrightarrow{XY} = \mathbf{u}$,
2. pro každé tři body X, Y, Z z $\mathcal{A}_n$ platí $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{XZ}$.

Ad 1) Nechť $X = (x_1, \ldots, x_{n+1}), \mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{e}_n$. Hledáme $Y \in \mathcal{A}_n$ tak, aby $\overrightarrow{XY} = \mathbf{u}$, tedy aby

$$\frac{y_i}{y_{n+1}} - \frac{x_i}{x_{n+1}} = \alpha_i\,, \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

Známe-li $x_1, \ldots, x_{n+1}$ a $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, jsou těmito rovnicemi určeny $y_1, \ldots, y_{n+1}$ až na nenulové násobky, a tedy bod Y je určen jednoznačně svými projektivními homogenními souřadnicemi.

Ad 2) Pro každé tři body $X, Y, Z \in \mathcal{A}_n$ o souřadnicovém vyjádření $X = (x_1; \ldots ; x_{n+1})$, $Y = (y_1; \ldots ; y_{n+1})$, $Z = (z_1; \ldots ; z_{n+1})$ máme

$$\begin{aligned}\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} &= \left(\frac{y_1}{y_{n+1}} - \frac{x_1}{x_{n+1}}, \ldots, \frac{y_n}{y_{n+1}} - \frac{x_n}{x_{n+1}}\right) + \\ &+ \left(\frac{z_1}{z_{n+1}} - \frac{y_1}{y_{n+1}}, \ldots, \frac{z_n}{z_{n+1}} - \frac{y_n}{y_{n+1}}\right) = \\ &= \left(\frac{z_1}{z_{n+1}} - \frac{x_1}{x_{n+1}}, \ldots, \frac{z_n}{z_{n+1}} - \frac{x_n}{x_{n+1}}\right) = \overrightarrow{XZ}.\end{aligned}$$

Tedy $(\mathcal{A}_n, U_n, \overrightarrow{\ })$ je afinní prostor se zaměřením U_n a protože dimenze U_n je rovna n, je i $\dim\mathcal{A}_n = n$. Přitom geometrická báze $\langle O_1; \ldots ; O_{n+1}, E\rangle$ přejde v afinní repér $\langle O_{n+1}; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\rangle$. Je-li bod $X \notin \mathcal{N}$ s projektivními homogenními souřadnicemi $(x_1; \ldots ; x_{n+1})$, potom jeho souřadnicové vyjádření vzhledem k odpovídajícímu afinnímu repéru je $\left[\frac{x_1}{x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{x_{n+1}}\right]$. Je-li $X = (x_1; \ldots ; x_n, 0) \in \mathcal{N}$ v projektivních homogenních souřadnicích, potom mu odpovídá v indukované afinní souřadné soustavě směr generovaný vektorem $(x_1; \ldots ; x_n)$ ze zaměření U_n.

Poznámka 5.1. Popsaná konstrukce závisela v podstatné míře na zvolené geometrické bázi. Dá se ovšem ukázat, že ať zvolíme body $O_1; \ldots ; O_n \in \mathcal{N}$ jakkoliv, vzniká popsanou konstrukcí afinní prostor totožný s předchozím.

6 Projektivní rozšíření afinního prostoru

Nechť $\mathcal{A}_n = (\mathcal{A}_n, V_n, \overrightarrow{\ })$ je n-rozměrný afinní prostor. Označme $\mathcal{N}_\mathcal{A}$ množinu všech jednodimenzionálních podprostorů (směrů) V_n, tj. $\mathcal{N}_\mathcal{A} = \{\langle\mathbf{u}\rangle | \mathbf{u} \neq \mathbf{o}, \mathbf{u} \in V\}$ je $(n-1)$–rozměrný projektivní prostor. Položme $\mathcal{P}_n = \mathcal{A}_n \cup \mathcal{N}_\mathcal{A}$. Máme tedy v $\mathcal{P}_n$ dva druhy bodů. Ty, které patří do $\mathcal{A}_n$, budeme nazývat *vlastní body* a ty, které patří do $\mathcal{N}_\mathcal{A}$, budeme nazývat *nevlastní body*. Dokážeme nyní, že $\mathcal{P}_n$ je n-rozměrný projektivní prostor.

Definujme $W_{n+1} = V_n \oplus \langle\mathbf{e}\rangle$, $\mathbf{e} \notin V_n$, vektorový prostor dimenze $(n+1)$ a $\mathcal{P}'_n$ jím určený n-rozměrný projektivní prostor. Musíme dokázat, že $\mathcal{P}_n$ a $\mathcal{P}'_n$ jsou izomorfní. Uvažujme zobrazení $\iota : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}'_n$ definované následujícím způsobem

$$\begin{cases}\iota(X) = \langle\mathbf{e} + \overrightarrow{OX}\rangle \text{ pro} X \in \mathcal{A}_n \text{ a pevný bod } O \in \mathcal{A}_n \\ \iota(\langle\mathbf{x}\rangle) = \langle\mathbf{x}\rangle \text{ pro } \langle\mathbf{x}\rangle \in \mathcal{N}_\mathcal{A}\,.\end{cases}$$

Nyní musíme dokázat, že ι je bijekce.

1) Injektivnost. Na $\mathcal{N}_\mathcal{A}$ jde o identitu, a tedy o prosté zobrazení. Nechť $X, Y \in \mathcal{A}_n$ jsou dva body takové, že $\iota(X) = \iota(Y)$. Potom $\langle \mathbf{e} + \overrightarrow{OX} \rangle = \langle \mathbf{e} + \overrightarrow{OY} \rangle$, a tedy existuje $\alpha \neq 0$ takové, že $\alpha(\mathbf{e} + \overrightarrow{OX}) = \mathbf{e} + \overrightarrow{OY}$ a odtud $(1-\alpha)\mathbf{e} + \alpha\overrightarrow{XO} + \overrightarrow{OY} = \mathbf{o}$. Součet $V \oplus \{\mathbf{e}\}$ je přímý, a tedy $(1-\alpha)\mathbf{e} = \mathbf{o}$ a $\alpha\overrightarrow{XO} + \overrightarrow{OY} = \mathbf{o}$. Odtud, protože $\mathbf{e} \neq \mathbf{o}$, je $\alpha = 1$ a $\overrightarrow{XO} + \overrightarrow{OY} = \overrightarrow{XY} = \mathbf{o}$, což implikuje $X = Y$. Je tedy ι prosté i na $\mathcal{A}_n$. Pro $X \in \mathcal{A}_n$ a $Y \in \mathcal{N}_\mathcal{A}$ je z definice $\iota(X) \neq \iota(Y)$, a tedy ι je prosté zobrazení.

2) Surjektivnost. Nechť $\mathbf{w} \in W_{n+1}$. Potom existují $\mathbf{v} \in V_n$ a $\beta \in \mathbb{T}$ taková, že $\mathbf{w} = \mathbf{v} + \beta\mathbf{e}$. a) Nechť $\beta = 0$, potom $\mathbf{w} = \mathbf{v}$ a $\iota(\langle \mathbf{v} \rangle) = \langle \mathbf{w} \rangle$. b) Nechť $\beta \neq 0$ a nechť $X \in \mathcal{A}_n$ tak, že $\overrightarrow{OX} = \frac{1}{\beta}\mathbf{v}$. Potom $\iota(X) = \langle \mathbf{e} + \overrightarrow{OX} \rangle = \langle \mathbf{e} + \frac{1}{\beta}\mathbf{v} \rangle = \langle \beta\mathbf{e} + \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{w} \rangle$. Protože $\mathbf{w} \in W_{n+1}$ bylo libovolné, je surjektivnost ι dokázána.

Definice 6.1. Projektivní prostor $\mathcal{P}_n = \mathcal{A}_n \cup \mathcal{N}_\mathcal{A}$ budeme nazývat *projektivní rozšíření* afinního prostoru $\mathcal{A}_n$ a označovat $\overline{\mathcal{A}}_n$.

Nechť $\mathcal{B}_k = (\mathcal{B}_k, U_k, \overrightarrow{\ })$ je k-rozměrný podprostor afinního prostoru $\mathcal{A}_n$. Potom projektivní rozšíření $\overline{\mathcal{B}}_k = \mathcal{B}_k \cup \mathcal{N}_\mathcal{B}$ afinního prostoru $\mathcal{B}_k$ je k-rozměrným projektivním podprostorem v projektivním rozšíření $\overline{\mathcal{A}}_n = \mathcal{A}_n \cup \mathcal{N}_\mathcal{A}$ afinního prostoru $\mathcal{A}_n$.

Nechť

$$\langle P; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle \tag{6.1}$$

je afinní repér v $\mathcal{A}_n$. Potom

$$\langle \langle \mathbf{e}_1 \rangle, \ldots, \langle \mathbf{e}_n \rangle, \langle \mathbf{e} \rangle, \langle \mathbf{e} + \sum_i \mathbf{e}_i \rangle \rangle \tag{6.2}$$

je geometrická báze projektivního prostoru $\overline{\mathcal{A}}_n$. Je-li bod $X \in \overline{\mathcal{A}}_n$ vlastní, tj. leží-li v $\mathcal{A}_n$, jsou jeho souřadnice vzhledem k afinnímu repéru (6.1) označovány $\bar{x}_1; \ldots; \bar{x}_n$. Tyto souřadnice budeme nazývat *afinní nehomogenní souřadnice* bodu X vzhledem k afinnímu repéru (6.1). Vzhledem k indukované geometrické bázi (6.2) má potom bod $X = \langle \mathbf{e} + \overrightarrow{PX} \rangle$ indukované projektivní homogenní souřadnice $(\bar{x}_1; \ldots; \bar{x}_n, 1)$, které jsou ale určeny až na nenulový násobek, a tedy jakákoliv uspořádaná $(n+1)$-tice $(x_1; \ldots; x_{n+1})$ prvků z $\mathbb{T}$ takových, že $x_{n+1} \neq 0$ a $\bar{x}_i = \frac{x_i}{x_{n+1}}$ je homogenními projektivními souřadnicemi vlastního bodu $X \in \overline{\mathcal{A}}_n$ určenými afinním repérem (6.1). Tyto souřadnice budeme nazývat *afinní homogenní souřadnice* bodu X vzhledem k afinnímu repéru (6.1).

Nechť nyní $X \in \overline{\mathcal{A}}_n$ je nevlastní bod, tj. $X = \langle \mathbf{x} \rangle$, kde $\mathbf{x}$ je nenulový vektor ze zaměření $\mathcal{A}_n$. Potom vzhledem k afinnímu repéru (6.1) má vektor $\mathbf{x}$ souřadnice $(\bar{x}_1; \ldots; \bar{x}_n)$ a v indukované geometrické bázi (6.2) na $\overline{\mathcal{A}}_n$ je bod $X = \langle \mathbf{x} + 0\mathbf{e} \rangle$ vyjádřen souřadnicemi $(\bar{x}_1; \ldots; \bar{x}_n, 0)$, které budeme nazývat *afinními homogenními souřadnicemi* nevlastního bodu vzhledem k afinnímu repéru (6.1).

Zavedení afinních homogenních souřadnic nám tedy umožňuje pracovat souřadnicově i s nevlastními body, což nehomogenní souřadnice neumožňovaly.

Úloha 6.1. Vzhledem k afinnímu repéru $\langle P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\rangle$ v $\mathcal{A}_3$ je dána přímka p obecným vyjádřením $p : 2x + y - z - 2 = 0;\ x - y + z + 1 = 0$. Určete rovnice přímky p v indukovaných afinních homogenních souřadnicích a určete souřadnice nevlastního bodu přímky p.

Řešení: V rovnicích přímky p položíme $x = \frac{x_1}{x_4}, y = \frac{x_2}{x_4}, z = \frac{x_3}{x_4}$ a rovnice vynásobíme x_4. Dostaneme obecné rovnice přímky p ve tvaru $p : 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0;\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Nevlastní bod přímky p je průnikem přímky p s nevlastní rovinou $x_4 = 0$. Dosazením $x_4 = 0$ do homogenních rovnic přímky dostaneme $P_\infty = (0; 1; 1; 0)$.

7 Cvičení

7.1. V $\mathcal{P}_3$ je dána geometrická báze $\langle O_1, O_2, O_3, O_4, E\rangle$.

a) Určete obecné vyjádření rovin $O_1O_2O_3$, O_1O_2E, O_3O_4E,

b) Určete parametrické i obecné vyjádření přímek O_1O_2, O_1E, O_4E.

{ a) $O_1O_2O_3 : x_4 = 0$, $O_1O_2E : x_3 - x_4 = 0$, $O_3O_4E : x_1 - x_2 = 0$,
b) O_1O_2 parametricky $x_1 = r, x_2 = s, x_3 = 0, x_4 = 0$, obecně $x_4 = 0, x_3 = 0$; O_1E parametricky $x_1 = r + s, x_2 = s, x_3 = s, x_4 = s$, obecně $x_2 - x_4 = 0, x_3 - x_4 = 0$; O_4E parametricky $x_1 = s, x_2 = s, x_3 = s, x_4 = r + s$, obecně $x_1 - x_2 = 0, x_1 - x_3 = 0$ }

7.2. V $\mathcal{P}_3$ je dána geometrická báze $\langle O_1, O_2, O_3, O_4, E\rangle$ a vzhledem k ní body $A = (-3; 5; 15; 1)$, $B = (0; 0; 7; 1)$, $C = (2; -1; 4; 1)$, $D = (4; -3; 0; 1)$. Ověřte, že přímky AB a CD mají společný bod a určete jeho souřadnice.

{ $P = (-3; 5; 22; 2)$ }

7.3. V $\mathcal{P}_3$ je dána geometrická báze $\langle O_1, O_2, O_3, O_4, E\rangle$ a vzhledem k ní bod $A = (2; 3; 1; 1)$ a přímky $p : x_1 + x_2 = 0, x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 = 0$, $q : x_1 + 3x_2 - x_4 = 0, x_2 + x_3 - 2x_4 = 0$. Určete rovnice přímky, která prochází bodem A a protíná přímky p, q.

{ $x_1 - 9x_2 + 5x_3 + 20x_4 = 0,\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 + 9x_4 = 0$ }

7.4. V $\mathcal{P}_3$ je dána geometrická báze $\langle O_1, O_2, O_3, O_4, E\rangle$ a vzhledem k ní body $A = (2; 3; 0; -4)$, $B = (0; 3; -4; 0)$, rovina $\rho : x_1 - 2x_3 + 3x_4 = 0$ a přímka $p : 2x_1 - 3x_3 = 0, x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0$. Určete parametrické rovnice přímky, která leží v rovině ρ a protíná přímky AB a p.

{ $X = \alpha(45; -36; 30; 5) + \beta(8; 27; -20; -16)$ }

Kapitola 3

BILINEÁRNÍ A KVADRATICKÉ FORMY

V této kapitole se budeme zabývat úvodem do algebraické teorie bilineárních a kvadratických forem, které jsou algebraickým základem analytické teorie kuželoseček a kvadrik.

8 Bilineární formy

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{T}$, kde $\mathbb{T}$ je těleso reálných nebo komplexních čísel.

Definice 8.1. Zobrazení $f : V \times V \to \mathbb{T}$ se nazývá *bilineární forma* na vektorovém prostoru V, jestliže pro každé tři vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ a každé $\alpha \in \mathbb{T}$ platí

(1) $f(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{z}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + f(\mathbf{y}, \mathbf{z})$,

(2) $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}+\mathbf{z}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{x}, \mathbf{z})$,

(3) $f(\alpha\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Podmínky (1)–(3) se dají také vyjádřit tak, že při pevně zvoleném vektoru $\mathbf{u} \in V$ jsou zobrazení $f(-, \mathbf{u}) : V \to \mathbb{T}$ a $f(\mathbf{u}, -) : V \to \mathbb{T}$ lineární. Je tedy f lineární v obou složkách a takovéto zobrazení se nazývá bilineární zobrazení.

Poznámka 8.1. Podmínky (1)–(3) z Definice 8.1 se dají vyjádřit ekvivalentně také podmínkami

(1') $f(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k, \mathbf{y}) = \alpha_1 f(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + \ldots + \alpha_k f(\mathbf{x}_k, \mathbf{y})$, $k \geq 2$,

(2') $f(\mathbf{x}, \alpha_1\mathbf{y}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{y}_k) = \alpha_1 f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) + \cdots + \alpha_k f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_k)$, $k \geq 2$. ♢

Poznámka 8.2. Zúžení bilineární formy f na podprostor V' je bilineární forma na V'. ♢

Příklad 8.1. Skalární součin na reálném vektorovém prostoru je příkladem bilineární formy.

Příklad 8.2. $f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, je takzvaná *nulová bilineární forma.*

Příklad 8.3. Nechť $V = \mathbb{R}^2$, zobrazení $f_i : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadaná předpisem

$f_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1 - 2x_2y_2 + 3x_1y_2\,,$

$f_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2\,,$

$f_3(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2\,,$

$f_4(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_2 - x_2y_1,$

jsou bilineární formy na V. Zobrazení

$f_5(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_2 - y_1 + x_1y_2$

není bilineární formou.

Definice 8.2. Řekneme, že bilineární forma f na V je *symetrická*, respektive *antisymetrická*, jestliže pro každé dva vektory $\mathbf{x},\mathbf{y} \in V$ platí $f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = f(\mathbf{y},\mathbf{x})$, respektive $f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -f(\mathbf{y},\mathbf{x})$.

Příklad 8.4. Skalární součin je příkladem symetrické bilineární formy. Bilineární formy f_2 a f_3 z Příkladu 8.3 jsou symetrické bilineární formy, zatímco f_4 je antisymetrická bilineární forma.

Definice 8.3. *Součtem* bilineárních forem f, g na V, respektive *násobkem* bilineární formy f prvkem $\alpha \in \mathbb{T}$, nazýváme zobrazení $h : V \times V \to \mathbb{T}$, respektive $k : V \times V \to \mathbb{T}$, taková, že pro $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$

$$h(\mathbf{x},\mathbf{y}) = f(\mathbf{x},\mathbf{y}) + g(\mathbf{x},\mathbf{y}),$$

respektive

$$k(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

Značíme potom $h = f + g$, $k = \alpha f$.

Poznámka 8.3. Součet i násobek bilineárních forem na V jsou opět bilineární formy na V a prostor bilineárních forem na V je vektorovým prostorem nad tělesem $\mathbb{T}$. ♢

Věta 8.1. *Ke každé bilineární formě f na V existují právě jedna symetrická bilineární forma f_S a právě jedna antisymetrická bilineární forma f_A na V takové, že*

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = f_S(\mathbf{x},\mathbf{y}) + f_A(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

Důkaz. Pro každé $\mathbf{x},\mathbf{y} \in V$ položme

$$f_S(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{2}(f(\mathbf{x},\mathbf{y}) + f(\mathbf{y},\mathbf{x})),$$

$$f_A(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{2}(f(\mathbf{x},\mathbf{y}) - f(\mathbf{y},\mathbf{x})).$$

Je zřejmé, že f_S je symetrická a f_A je antisymetrická bilineární forma a že $f = f_S + f_A$.

Nechť existuje jiná symetrická bilineární forma f'_S a antisymetrická bilineární forma f'_A takové, že $f = f'_S + f'_A$. Potom

$$f(\mathbf{y},\mathbf{x}) = f'_S(\mathbf{x},\mathbf{y}) - f'_A(\mathbf{x},\mathbf{y}),$$
$$f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = f'_S(\mathbf{x},\mathbf{y}) + f'_A(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

Sečtením dostaneme $f'_S(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{2}(f(\mathbf{x},\mathbf{y}) + f(\mathbf{y},\mathbf{x})) = f_S(\mathbf{x},\mathbf{y})$. Podobně odečtením dostaneme $f'_A = f_A$. □

Nechť $\mathcal{B} = \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \rangle$ je libovolná báze ve V. Potom $\mathbf{x} = x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n$, $\mathbf{y} = y_1\mathbf{u}_1 + \cdots + y_n\mathbf{u}_n$, kde $x_i, y_i \in \mathbb{T}$. Dosazením dostaneme

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = f(\sum_i x_i\mathbf{u}_i, \sum_j y_j\mathbf{u}_j) = \sum_i x_i \sum_j y_j f(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_j).$$

Označme $a_{ij} = f(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_j)$ a uvažujme matici $A_f = (a_{ij})$. Potom můžeme psát

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i,j} a_{ij}x_iy_j. \tag{8.1}$$

Definice 8.4. (8.1) je souřadnicovým vyjádřením bilineární formy f v bázi $\mathcal{B} = \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \rangle$, matice $A_f = (f(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_j))$ se nazývá *matice bilineární formy* f v bázi $\mathcal{B}$.

Poznámka 8.4. Bilineární forma f je symetrická (antisymetrická) bilineární forma právě tehdy, je-li A_f symetrická (antisymetrická) matice. ♢

Souřadnicové vyjádření vektoru $\mathbf{x} = (x_1; \dots; x_n)$ vzhledem k libovolné bázi $\mathcal{B} = \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \rangle$ budeme ztotožňovat s maticí $(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$. Potom bilineární formu f můžeme psát maticově ve tvaru

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (x_1 \dots x_n)_{\mathcal{B}} \, (a_{ij}) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = (\mathbf{x})^T A_f(\mathbf{y}) \,.$$

Příklad 8.5. V kanonické bázi na $\mathbb{R}^2$ jsou matice bilineárních forem $f_1, \dots, f_4$ z Příkladu 8.3

$$A_{f_1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_{f_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{f_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_{f_4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definice 8.5. *Hodností bilineární formy* f rozumíme hodnost matice formy A_f v libovolné bázi. Je-li A_f regulární matice, nazýváme bilineární formu f *regulární*, je-li A_f singulární, nazýváme i bilineární formu f *singulární*.

Věta 8.2. *Hodnost bilineární formy nezávisí na zvolené bázi.*

Důkaz. Mějme na V dvě báze

$$\mathcal{B} = \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \rangle, \tag{8.2}$$
$$\mathcal{B}' = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle \tag{8.3}$$

a nechť $(\mathbf{u})_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ a $(\mathbf{u})_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} u'_1 \\ \vdots \\ u'_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$ jsou příslušná souřadnicová vyjádření vektoru $\mathbf{u}$ vzhledem k těmto bázím. Nechť Q je matice přechodu od báze (8.2) k bázi (8.3), tj. pro souřadnice vektoru $\mathbf{u}$ platí

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = Q \begin{pmatrix} u'_1 \\ \vdots \\ u'_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} .$$

Potom bilineární forma f má vyjádření $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1 \dots x_n)_{\mathcal{B}}\, A_f \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ v bázi (8.2) a $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x'_1 \dots x'_n)_{\mathcal{B}'}\, B_f \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$ v bázi (8.3). Dosazením transformačních rovnic do vyjádření formy v bázi (8.2) a porovnáním s vyjádřením v bázi (8.3) dostaneme $B_f = Q^T A_f Q$, kde Q^T je transponovaná matice k matici Q. Potom $h(B_f) = h(A_f)$, protože Q je regulární matice. □

Definice 8.6. Nechť f je symetrická bilineární forma na V. *Singulárním vektorem* formy f rozumíme vektor $\mathbf{y}$ takový, že $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ pro každý vektor $\mathbf{x} \in V$.

Poznámka 8.5. V případě, že f není symetrická bilineární forma, musíme definovat zvlášť levé a pravé singulární vektory. ♢

Vyjádříme-li bilineární formu $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ v libovolné bázi, dostaneme z podmínky

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1 \dots x_n)\, A_f \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = 0$$

pro každý vektor $\mathbf{x}$ soustavu homogenních lineárních rovnic

$$A_f \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{o} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n &= 0 \end{aligned} , \tag{8.4}$$

kterou musí splňovat souřadnice singulárního vektoru $\mathbf{y}$. Singulární vektory tedy tvoří podprostor ve V, jehož dimenze je $n - h(A_f)$.

Věta 8.3. *Nechť V je reálný vektorový prostor a $V^{\mathbb{C}}$ jeho komplexní rozšíření. Ke každé bilineární formě f na V existuje právě jedna bilineární forma $f^{\mathbb{C}}$ na $V^{\mathbb{C}}$ taková, že $f^{\mathbb{C}}|V = f$.*

Důkaz. *Existence.* Nechť $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + i\mathbf{x}_2$, $\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + i\mathbf{y}_2 \in V^{\mathbb{C}}$ jsou dva vektory. Definujme

$$f^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) - f(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) + i(f(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2) + f(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1)) \,.$$

Snadno se vidí, že je takto definovaná bilineární forma na $V^{\mathbb{C}}$ taková, že $f^{\mathbb{C}}|V = f$.

Jednoznačnost. Je-li g jiná bilineární forma na $V^{\mathbb{C}}$ taková, že $g|V = f$, potom z linearity dostáváme

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) - g(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) + i(g(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2) + g(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1))$$

a odtud plyne $g = f^{\mathbb{C}}$. □

Definice 8.7. Bilineární forma $f^{\mathbb{C}}$ na $V^{\mathbb{C}}$ definovaná ve Větě 8.3 se nazývá *komplexní rozšíření* reálné bilineární formy f.

Nechť $\mathcal{B} = \langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \rangle$ je báze V. Ve Větě 1.2 jsme dokázali, že $\mathcal{B}$ je současně i bází ve $V^{\mathbb{C}}$. Je-li $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ bilineární forma na V , která má v bázi $\mathcal{B}$ souřadnicové vyjádření $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$, potom souřadnicové vyjádření $f^{\mathbb{C}}$ v této bázi je totožné. Pouze souřadnice x_i a y_j mohou nyní být komplexní čísla. Tedy v libovolné reálné bázi ve $V^{\mathbb{C}}$ má matice bilineární formy $f^{\mathbb{C}}$ reálné koeficienty, na rozdíl od matice libovolné bilineární formy na $V^{\mathbb{C}}$, která má matici definovanou obecně nad komplexními čísly.

Úloha 8.1. Nechť je v bázi $\langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_4 \rangle$ na V_4 dána bilineární forma f souřadnicovým vyjádřením

$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_2y_4 - x_3y_4 + x_4y_3 \,.$

Určete matici a hodnost formy.

Řešení: Koeficienty a_{ij} matice A_f formy jsou koeficienty u x_iy_j. Potom

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad h(f) = h(A_f) = 4 \,.$$

Úloha 8.2. Pro bilineární formu f z Úlohy 8.1 určete bilineární formy f_A a f_S. Určete jejich matice a hodnost.

Řešení: Podle Věty 8.1 je

$f_A(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{2}(f(\mathbf{x},\mathbf{y}) - f(\mathbf{y},\mathbf{x})) =$
$= -x_1y_2 + x_2y_1 + \frac{1}{2}x_1y_3 - \frac{1}{2}x_3y_1 + x_4y_3 - x_3y_4 + \frac{1}{2}x_2y_4 - \frac{1}{2}x_4y_2\,.$

Odtud $A_{f_A} = \frac{1}{2}(A_f - A_f^T) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $h(f_A) = 4$.

Podobně
$f_S(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{2}(f(\mathbf{x},\mathbf{y}) + f(\mathbf{y},\mathbf{x})) =$
$= \frac{1}{2}x_1y_3 + \frac{1}{2}x_3y_1 + x_2y_2 + \frac{1}{2}x_2y_4 + \frac{1}{2}x_4y_2\,.$

Odtud $A_{f_S} = \frac{1}{2}(A_f + A_f^T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $h(f_S) = 4$.

Úloha 8.3. Pro bilineární formu f_1 z Příkladu 8.3 určete její souřadnicové vyjádření a matici v nové bázi $\mathbf{v}_1 = (3;-1)$, $\mathbf{v}_2 = (1;-1)$ na $\mathbb{R}^2$.

Řešení: a) Transformační rovnice přechodu k novým souřadnicím jsou tvaru

$$\begin{array}{rclrrcl} x_1 &=& 3x_1' &+x_2', & y_1 &=& 3y_1' &+y_2', \\ x_2 &=& -x_1' &-x_2', & y_2 &=& -y_1' &-y_2'. \end{array}$$

Přímým dosazením dostaneme

$f_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1 - 2x_2y_2 + 3x_1y_2 = -2x_1'y_1' - 2x_2'y_1' - 8x_1'y_2' - 4x_2'y_2'\,,$

a matice formy v nové bázi je $\begin{pmatrix} -2 & -8 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$.

b) Maticový zápis. Transformační rovnice přechodu k nové bázi jsou

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}\,.$$

Dosazením do maticového vyjádření formy

$$f_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

dostaneme

$$f_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} x_1' & x_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} x_1' & x_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}\,.$$

c) Matice bilineární formy je $(a_{ij} = f(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j))$. Přímým dosazením souřadnic vektorů $\mathbf{v}_i$ do souřadnicového vyjádření formy dostaneme opět požadovanou matici.

Úloha 8.4. V bázi $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle$ na V_3 je dána symetrická bilineární forma f souřadnicovým vyjádřením

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) =& 4x_1y_1 + 5x_1y_2 + 3x_1y_3 + 5x_2y_1 - 6x_2y_2 + 16x_2y_3 \\ &+ 3x_3y_1 + 16x_3y_2 - 10x_3y_3 \end{aligned}$$

Určete její hodnost a singulární vektory.

Řešení: Matice formy je $A_f = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 5 & -6 & 16 \\ 3 & 16 & -10 \end{pmatrix}$. Potom $h(f) = h(A_f) = 2$. Podle (8.4) tvoří singulární vektory f podprostor řešení soustavy homogenních lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 0\,, \\ 5x_1 - 6x_2 + 16x_3 &= 0\,, \\ 3x_1 + 16x_2 - 10x_3 &= 0\,. \end{aligned}$$

Podprostor řešení je jednodimenzionální podprostor generovaný vektorem $(-2; 1; 1)$.

9 Kvadratické formy

Definice 9.1. Zobrazení $F : V \to \mathbb{T}$ se nazývá *kvadratická forma* na vektorovém prostoru V, jestliže existuje bilineární forma f taková, že pro každý vektor $\mathbf{x} \in V$ je $F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x})$. Říkáme potom, že bilineární forma f určuje kvadratickou formu F.

Příklad 9.1. Nulová kvadratická forma (tj. $F(\mathbf{x}) = 0$ pro všechna $\mathbf{x}$) je určena libovolnou antisymetrickou bilineární formou.

Příklad 9.2. Je-li V reálný euklidovský vektorový prostor, je zobrazení "velikost vektoru na druhou", kvadratickou formou určenou skalárním součinem.

Podobně jako pro bilineární formy můžeme definovat součet kvadratických forem a součin kvadratické formy s prvky z $\mathbb{T}$.

$$\begin{aligned} (F + G)(\mathbf{x}) &= F(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x}), \\ (\alpha F)(\mathbf{x}) &= \alpha F(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Věta 9.1. *Ke každé kvadratické formě existuje právě jedna symetrická bilineární forma, která ji určuje.*

Důkaz. *Existence.* Nechť kvadratická forma F je určena bilineární formou f. Potom $f = f_A + f_S$ a máme

$$F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = f_A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + f_S(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = f_S(\mathbf{x}, \mathbf{x})\,.$$

Jednoznačnost. Nechť f je symetrická bilineární forma určující F. Pak

$$F(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{x},\mathbf{x}) + 2f(\mathbf{x},\mathbf{y}) + f(\mathbf{y},\mathbf{y}),$$

a tedy

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{2}\{F(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y})\},$$

což je jednoznačně určená bilineární forma. □

Definice 9.2. Symetrická bilineární forma f určující kvadratickou formu F se nazývá *polární bilineární forma* k F.

Dále automaticky pro danou kvadratickou formu F je f její polární bilineární forma.

Příklad 9.3. Skalární součin je polární bilineární forma ke kvadratické formě dané velikostí vektoru na druhou.

Definice 9.3. *Hodností kvadratické formy* rozumíme hodnost příslušné polární bilineární formy. Říkáme, že kvadratická forma je *regulární* (*singulární*), je-li regulární (singulární) příslušná polární bilineární forma.
Singulárním vektorem kvadratické formy rozumíme singulární vektor příslušné polární bilineární formy.

Nechť $\mathcal{B} = \langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \rangle$ je báze V a

$$F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x},\mathbf{x}) = (x_1 \ldots x_n)\ (a_{ij}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\mathbf{x})^T A_F(\mathbf{x})$$

je souřadnicové vyjádření kvadratické formy F, kde A_F je symetrická matice nazývaná *matice kvadratické formy* F v bázi $\mathcal{B}$. Souřadnicově můžeme také psát

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}) = (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n)x_1 + \cdots + (a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n)x_n = \\ = F_1(\mathbf{x})x_1 + \cdots + F_n(\mathbf{x})x_n, \end{aligned}$$

kde $F_i(\mathbf{x}) = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n$ je takzvaná *i-tá lineární forma přidružená (asociovaná)* k F.

Ze souřadnicového vyjádření pro singulární vektory bilineární formy dostaneme, že vektor $\mathbf{x}$ je singulárním vektorem kvadratické formy F právě tehdy, když

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = 0, \end{aligned} \tag{9.1}$$

to jest právě tehdy, když $F_1(\mathbf{x}) = 0, \ldots, F_n(\mathbf{x}) = 0$.

Definice 9.4. Bázi $\mathcal{B} = \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \rangle$ vektorového prostoru V nazýváme *polární bází* kvadratické formy F, jestliže pro každé $i, j = 1, \dots, n,\ i \neq j$, platí $f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = 0$.

Věta 9.2. *Ke každé kvadratické formě existuje polární báze.*

Důkaz. Je-li F nulová forma, pak každá báze je polární.

Nechť tedy F není nulová kvadratická forma na V. Dále budeme postupovat matematickou indukcí.

1. Nechť $n = 1$. Potom každá báze je polární.

2. Nechť věta platí pro $(n-1)$. Ve V_n zvolme $\mathbf{u}_1$ tak, aby $F(\mathbf{u}_1) \neq 0$. Množina vektorů splňujících $f(\mathbf{x}, \mathbf{u}_1) = 0$ je $(n-1)$-dimenzionální podprostor ve V. Označme jej V_1. Potom zúžení $F|V_1$ je kvadratická forma na $(n-1)$-dimenzionálním prostoru V_1 a podle indukčního předpokladu existuje ve V_1 polární báze $F|V_1$. Označme ji $\mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$. Snadno se vidí, že $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ je polární bází F na V. □

Algoritmus hledání polární báze

Předpokládejme, že F není nulová kvadratická forma. Potom existuje vektor $\mathbf{u}_1 \in V$ takový, že $F(\mathbf{u}_1) \neq 0$. Množina vektorů splňujících $f(\mathbf{x}, \mathbf{u}_1) = 0$ je $(n-1)$-dimenzionální podprostor ve V. Označme jej V_1. Ve V_1 vybereme libovolný vektor $\mathbf{u}_2$ takový, že $F(\mathbf{u}_2) \neq 0$. Pokud takový vektor neexistuje, doplníme vektor $\mathbf{u}_1$ na bázi vektory z V_1 a taková báze již je polární. Pokud existuje vektor $\mathbf{u}_2 \in V_1$ takový, že $F(\mathbf{u}_2) \neq 0$, uvažujeme množinu vektorů splňujících $f(\mathbf{x}, \mathbf{u}_1) = 0, f(\mathbf{x}, \mathbf{u}_2) = 0$. Tato množina je $(n-2)$-dimenzionálním podprostorem ve V a označíme ji V_2. Pokud všechny vektory z V_2 nulují formu F, doplníme $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ na bázi vektory z V_2. Pokud existuje vektor $\mathbf{u}_3 \in V_2$ takový, že $F(\mathbf{u}_3) \neq 0$, uvažujeme množinu vektorů V_3 splňujících $f(\mathbf{x}, \mathbf{u}_1) = 0, f(\mathbf{x}, \mathbf{u}_2) = 0, f(\mathbf{x}, \mathbf{u}_3) = 0$. Tato množina je $(n-3)$-rozměrným podprostorem ve V a další vektor do hledané báze bereme z tohoto prostoru. Tímto způsobem pokračujeme tak dlouho, dokud pro nějaké k nejsou všechny hodnoty formy F na vektorech z V_k nulové.

Snadno se vidí, že matice kvadratické formy je diagonální tehdy a jenom tehdy, je-li odpovídající báze V polární. Souřadnicový tvar kvadratické formy s diagonální maticí se nazývá *kanonický tvar*.

V souřadnicovém vyjádření má potom Věta 9.2 tvar následující Věty 9.3.

Věta 9.3. *Ke každé kvadratické formě*

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

existuje taková lineární transformace souřadnic

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} q_{ij} y_j \,, \qquad i = 1, \dots, n \,,$$

že souřadnicové vyjádření F v souřadnicích $y_1; \dots ; y_n$ je tvaru

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} y_i^2,$$

tj. matice B_F kvadratické formy F je diagonální.

Algoritmus hledání polární báze potom odpovídá hledání takové lineární transformace souřadnic $x_i = \sum_{j=1}^{n} q_{ij} y_j$, že v souřadnicích y_i má forma diagonální matici. Tuto lineární transformaci hledáme následujícím způsobem: Nechť má nenulová kvadratická forma v nějaké bázi souřadnicové vyjádření

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j.$$

a) Předpokládejme, že existuje takové i, že $a_{ii} \neq 0$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že je to a_{11}. Potom

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n)^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \dots$$

Označme $y_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n$, $y_2 = x_2$, $\dots$, $y_n = x_n$. V nových souřadnicích $y_1; \dots ; y_n$ je

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{a_{11}} y_1^2 + G,$$

kde G je kvadratická forma $(n-1)$ proměnných $y_2, \dots, y_n$. Dále pokračujeme obdobným způsobem při úpravě kvadratické formy G a po konečném počtu kroků dostaneme kanonický tvar formy. Hledaná lineární transformace souřadnic je potom složením dílčích transformací.

b) Nechť všechna $a_{ii} = 0$. Potom existuje $a_{ij} \neq 0$ pro $i \neq j$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a_{12} \neq 0$. Potom lineární transformace $x_1 = y_1 + y_2$, $x_2 = y_1 - y_2$, $x_k = y_k$, $k = 3, \dots, n$, převede kvadratickou formu na tvar $F(\mathbf{x}) = a_{12}(y_1^2 - y_2^2) + ...$, což je tvar z případu a) a dále můžeme postupovat výše popsaným algoritmem.

Definice 9.5. Nechť F je kvadratická forma na reálném vektorovém prostoru. Říkáme, že F je

a) *pozitivně definitní*, jestliže pro každý $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ je $F(\mathbf{x}) > 0$,

b) *pozitivně semidefinitní*, jestliže pro každý $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ je $F(\mathbf{x}) \geq 0$,

c) *negativně definitní*, jestliže pro každý $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ je $F(\mathbf{x}) < 0$,

d) *negativně semidefinitní*, jestliže pro každý $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ je $F(\mathbf{x}) \leq 0$,

e) existují-li vektory $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ takové, že $F(\mathbf{y}) > 0$ a $F(\mathbf{z}) < 0$, říkáme, že F je *indefinitní*.

Typ kvadratické formy se snadno pozná, je-li forma vyjádřena v polární bázi, tj. je-li její souřadnicový zápis v kanonickém tvaru

$$F(\mathbf{x}) = a_{11}x_1^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \,.$$

Potom kvadratická forma F je pozitivně definitní, je-li $a_{ii} > 0$, pozitivně semidefinitní, je-li $a_{ii} \geq 0$, negativně definitní, je-li $a_{ii} < 0$ a negativně semidefinitní, je-li $a_{ii} \leq 0$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$. Forma je indefinitní, existují-li koeficienty $a_{ii} > 0$ a $a_{jj} < 0$.

Pro nenulové koeficienty a_{ii} v kanonickém tvaru kvadratické formy můžeme provést transformaci souřadnic

$$x_i = \frac{1}{\sqrt{|a_{ii}|}} y_i \,.$$

V nových souřadnicích jsou potom všechny koeficienty u 2. mocnin souřadnic 1, -1, případně 0. Vhodnou permutací souřadnic docílíme toho, že souřadnicové vyjádření kvadratické formy je tvaru

$$F(\mathbf{x}) = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \ldots - y_{p+q}^2,$$

$p + q \leq n$. Tento tvar se nazývá *normální tvar* kvadratické formy. Dvojice (p, q) se nazývá *signatura* kvadratické formy. Polární bázi, ve které má kvadratická forma normální tvar, budeme nazývat *normovanou polární bází*.

Poznámka 9.1. Pokud uvažujeme na euklidovském vektorovém prostoru kvadratickou formu určenou skalárním součinem, je normovaná polární báze takzvaná ortonormální báze tvořená jednotkovými, na sebe kolmými vektory, viz skriptum [6]. ♢

Následující věta je nejdůležitější větou algebraické teorie kvadratických forem a nazývá se *věta o setrvačnosti kvadratických forem.*

Věta 9.4. *Normální tvar kvadratické formy nezávisí na lineární transformaci souřadnic, která převádí danou kvadratickou formu do normálního tvaru.* □

Poznámka 9.2. Jinak řečeno, předchozí věta říká, že signatura kvadratické formy je jednoznačně určena kvadratickou formou a ne jejím souřadnicovým vyjádřením. Máme-li tedy dvě kvadratické formy vyjádřeny v souřadnicích a mají-li tyto formy stejnou signaturu, jedná se vlastně o tutéž formu vyjádřenou v různých bázích. ♢

Věta 9.5. *Nechť F je kvadratická forma na reálném vektorovém prostoru V, pak existuje právě jedna kvadratická forma $F^{\mathbb{C}}$ na $V^{\mathbb{C}}$ taková, že*

$$F^{\mathbb{C}}|V = F.$$

Důkaz. Vyplývá přímo z obdobné věty pro polární bilineární formu. □

Definice 9.6. Kvadratická forma $F^{\mathbb{C}}$ na $V^{\mathbb{C}}$ definovaná ve Větě 9.5 se nazývá *komplexní rozšíření* reálné kvadratické formy F.

Úloha 9.1. V kanonické bázi na $\mathbb{R}^3$ je dána kvadratická forma F. Určete její matici, hodnost a je–li forma singulární, určete její singulární vektory:

a) $F(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 10x_2x_3$,

b) $F(\mathbf{x}) = x_1x_2 + x_2x_3$.

Řešení: a) Matice kvadratické formy je $A_F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. Potom $h(F) = h(A_F) = 3$, forma je regulární a nemá nenulové singulární vektory.

b) Matice kvadratické formy je $A_F = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$. Potom $h(F) = h(A_F) = 2$ a forma je singulární. Podprostor singulárních vektorů je řešením homogenní soustavy rovnic

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x_2 &= 0\,, \\ \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{2}x_3 &= 0\,, \\ \tfrac{1}{2}x_2 &= 0\,. \end{aligned}$$

Řešením je podprostor $L((1;0;-1))$.

Úloha 9.2. Určete normální tvar kvadratických forem z Úlohy 9.1. Určete normovanou polární bázi, ve které má F normální tvar, a transformační rovnice přechodu od kanonické báze k normované polární bázi.

Řešení: I. metoda:

a) V $\mathbb{R}^3$ vybereme vektor $\mathbf{u}_1$ tak, aby $F(\mathbf{u}_1) \neq 0$. Zvolme $\mathbf{u}_1 = (1;0;0)$. Potom $F(\mathbf{u}_1) = 1$. Určíme podprostor V_1 jako podprostor řešení rovnice $f(\mathbf{u}_1, \mathbf{x}) = 0$, tj. řešení homogenní rovnice

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0\,.$$

Dostaneme $V_1 = L((1;1;0),(-1;0;1))$. Zvolme $\mathbf{u}_2 = (-1;-1;0)$, potom $F(\mathbf{u}_2) = -1$. Určíme podprostor V_2 jako prostor řešení rovnic $f(\mathbf{u}_1, \mathbf{x}) = 0$, $f(\mathbf{u}_2, \mathbf{x}) = 0$, tj. soustavy homogenních rovnic

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0\,, \\ -x_2 + 6x_3 &= 0\,. \end{aligned}$$

Dostaneme $V_2 = L((5;6;1))$. Protože $F((5;6;1)) = 36$, zvolíme $\mathbf{u}_3 = \frac{1}{6}(5;6;1)$. Báze $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ je normovaná polární báze a rovnice kvadratické formy F v této bázi jsou

$$F(\mathbf{y}) = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2\,.$$

Provedeme proto volbu nové báze $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_3$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_2$, ve které má forma F rovnice

$$F(\mathbf{t}) = t_1^2 + t_2^2 - t_3^2\,.$$

Transformační rovnice přechodu od kanonické báze k normované polární bázi $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ jsou potom

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{6} & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} .$$

b) Protože $F((1;0;0)) = 0$, zvolíme $\mathbf{u}_1 = (1;1;0)$. Máme $F(\mathbf{u}_1) = 1$ a V_1 je prostor řešení rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \,,$$

tj. $V_1 = L((1;-1;0),(1;0;-1))$. Zvolme $\mathbf{u}_2 = (1;-1;0)$. Máme $F(\mathbf{u}_2) = -1$ a V_2 je řešením homogenní soustavy

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \,, \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \,. \end{aligned}$$

$V_2 = L((1;0;-1))$ a $F((1;0;-1)) = 0$. Zvolíme $\mathbf{u}_3 = (1;0;-1)$ a báze $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ je normovaná polární báze, ve které jsou rovnice kvadratické formy

$$F(\mathbf{y}) = y_1^2 - y_2^2 \,.$$

Transformační rovnice přechodu od kanonické báze k normované polární bázi $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ jsou potom

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} .$$

II. metoda:

a) Protože $a_{11} \neq 0$, upravíme rovnici kvadratické formy tak, že všechny členy obsahující x_1 budou v druhé mocnině trojčlenu, tj.

$$F(\mathbf{x}) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 - x_2^2 + 12x_2x_3 \,.$$

Transformace

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - x_2 + x_3 \,, \\ y_2 &= x_2 \,, \\ y_3 &= x_3 \end{aligned}$$

převede formu na tvar

$$F(\mathbf{y}) = y_1^2 - y_2^2 + 12y_2y_3 \,,$$

který můžeme dále upravit

$$F(\mathbf{y}) = y_1^2 - (-y_2 + 6y_3)^2 + 36y_3^2 \,.$$

Transformace

$$\begin{aligned} z_1 &= y_1 \,, \\ z_2 &= -y_2 + 6y_3 \,, \\ z_3 &= y_3 \end{aligned}$$

převede formu na tvar

$$F(\mathbf{z}) = z_1^2 - z_2^2 + 36z_3^2\,,$$

který znormujeme transformací

$$\begin{aligned} z_1 &= t_1\,, \\ z_2 &= \quad t_3\,, \\ z_3 &= \quad\ \tfrac{1}{6}t_2\,, \end{aligned}$$

takže výsledný tvar bude

$$F(\mathbf{t}) = t_1^2 + t_2^2 - t_3^2\,.$$

Postupným skládáním dílčích transformací dostaneme celkovou transformaci

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{6} & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$$

a odtud je zřejmé, že normovaná polární báze je tvořena vektory $\mathbf{v}_1 = (1;0;0)$, $\mathbf{v}_2 = (\frac{5}{6};1;\frac{1}{6})$, $\mathbf{v}_3 = (-1;-1;0)$.

b) Protože všechna $a_{ii} = 0$ a $a_{23} \neq 0$, zvolíme transformaci

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1\,, \\ x_2 &= \quad y_2 \quad + y_3\,, \\ x_3 &= \quad y_2 \quad - y_3\,, \end{aligned}$$

která převede formu na tvar

$$F(\mathbf{y}) = y_1y_2 + y_1y_3 + y_2^2 - y_3^2\,,$$

který upravíme na tvar

$$F(\mathbf{y}) = (\frac{1}{2}y_1 + y_2)^2 - (\frac{1}{2}y_1 - y_3)^2\,.$$

Potom transformace

$$\begin{aligned} t_1 &= \tfrac{1}{2}y_1 \quad + y_2\,, \\ t_2 &= \tfrac{1}{2}y_1 \qquad\ \ - y_3\,, \\ t_3 &= \qquad\qquad\ \ y_3 \end{aligned}$$

převede formu na konečný tvar

$$F(\mathbf{t}) = t_1^2 - t_2^2\,.$$

Transformační rovnice přechodu od kanonické báze k normované polární bázi $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ jsou potom

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$$

a příslušná normovaná polární báze je $\mathbf{u}_1 = (0;1;1)$, $\mathbf{u}_2 = (2;-1;-1)$, $\mathbf{u}_3 = (2;0;-2)$.

Poznámka 9.3. Všimněme si, že v Úloze 9.2 jsou v případě a) výsledné transformace v obou metodách shodné. To je proto, že jsme v 1. metodě volili vektory do polární báze tak, aby odpovídaly příslušným postupným transformacím souřadnic, které jsme prováděli ve 2. metodě. V případě b) jsme v 1. metodě zvolili jinou polární bázi, která neodpovídá transformaci souřadnic z 2. metody. Výsledný normovaný tvar rovnic kvadratické formy je ovšem shodný, což odpovídá větě o setrvačnosti kvadratických forem.

10 Ortogonální transformace kvadratické formy

V této části skript nechť V_n je n–rozměrný euklidovský vektorový prostor, tj. V_n je reálný vektorový prostor se skalárním součinem. Připomeňme, že skalární součin je zobrazení

$$(-,-) : V_n \times V_n \to \mathbb{R}$$

takové, že

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{u},\mathbf{v}) = (\mathbf{v},\mathbf{u})\,,\\
&(\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{w}) = (\mathbf{u},\mathbf{w}) + (\mathbf{v},\mathbf{w})\,,\\
&(\alpha\mathbf{u},\mathbf{v}) = (\mathbf{u},\alpha\mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{u},\mathbf{v})\,,\\
&(\mathbf{u},\mathbf{u}) \geq 0, \quad (\mathbf{u},\mathbf{u}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{o}\,.
\end{aligned}$$

Je tedy skalární součin symetrická bilineární forma na V_n taková, že odpovídající kvadratická forma je pozitivně definitní. Normovaná polární báze příslušná ke kvadratické formě, která je určena skalárním součinem, se nazývá *ortonormální báze*. Připomeňme, že v libovolné ortonormální bázi má skalární součin souřadnicové vyjádření

$$(\mathbf{u},\mathbf{v}) = u_1v_1 + \cdots + u_nv_n\,,$$

kde $\mathbf{u} = (u_1,\ldots,u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1,\ldots,v_n)$. Ve shodě s Částí 8 můžeme psát maticově $(\mathbf{u},\mathbf{v}) = (\mathbf{u})^T E_n(\mathbf{v}) = (\mathbf{u})^T(\mathbf{v})$, kde E_n je jednotková matice řádu n a vektory jsme ztotožnili se sloupcovými maticemi jejich souřadnic.

Nechť nyní F je libovolná kvadratická forma na V_n. Zajímá nás, zda existuje ortonormální báze V_n taková, že v ní má F kanonický tvar. Odpověď je kladná. Důkaz existence i algoritmus hledání ortonormální báze, která je současně polární vzhledem k F, je založen na dvou větách z teorie matic (nebo ekvivalentně z teorie lineárních zobrazení). Nejdříve si připomeneme základní pojmy.

Nechť A je libovolná reálná čtvercová matice řádu n. Mějme na V_n pevně zvolenou bázi. Nenulový vektor $\mathbf{u} = (u_1,\ldots,u_n)$ se nazývá *vlastním vektorem* matice A, jestliže jeho souřadnice jsou řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= \lambda x_1\,,\\
&\ldots\\
a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n &= \lambda x_n,
\end{aligned} \tag{10.1}$$

pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$. Maticově můžeme soustavu (10.1) zapsat $A(\mathbf{u}) = \lambda E_n(\mathbf{u})$, což upravíme na tvar

$$(A - \lambda E_n)(\mathbf{u}) = (\mathbf{o})\,. \tag{10.2}$$

Protože podle předpokladu je $\mathbf{u}$ nenulový vektor, má soustava (10.2) nenulové řešení právě tehdy, když

$$|A - \lambda E_n| = 0\,. \tag{10.3}$$

Rovnice (10.3) je polynomiální rovnicí vzhledem k λ a nazývá se *charakteristická rovnice* matice A. Kořeny charakteristické rovnice se nazývají *vlastní (charakteristická) čísla (hodnoty)* matice A. Dosadíme–li reálné vlastní číslo do soustavy (10.1), je řešením homogenní soustavy (10.1) nenulový podprostor V_n. Každé nenulové řešení bude *vlastním vektorem* příslušným pro danou vlastní hodnotu. Každý vlastní vektor určuje jednodimenzionální podprostor vlastních vektorů, který nazýváme *vlastní směr* určený maticí A.

Pro studium kvadratických forem na euklidovském vektorovém prostoru mají zásadní význam následující dvě tvrzení z teorie matic, která si zde uvedeme bez důkazu.

Věta 10.1. *Nechť A je symetrická reálná matice řádu n. Pak všechny kořeny charakteristické rovnice $|A - \lambda E_n| = 0$ jsou reálné.* □

Poznámka 10.1. Protože v dimenzi 2 je charakteristická rovnice kvadratická, dokázali bychom Větu 10.1 v dimenzi 2 snadno z elementárních vlastností kvadratické rovnice. Tento důkaz provedeme později v kapitole o kuželosečkách. ♢

Věta 10.2. *Nechť A je symetrická reálná matice řádu n a λ je k–násobný kořen její charakteristické rovnice. Pak podprostor řešení homogenní soustavy pro výpočet vlastních vektorů příslušných λ má právě dimenzi k.* □

Věta 10.3. *Nechť $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou vlastní vektory, které přísluší různým vlastním číslům λ_1, λ_2 symetrické matice A. Pak $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou kolmé, tj. $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$.*

Důkaz. Protože A je symetrická matice, je

$$(A(\mathbf{u}), \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, A(\mathbf{v}))\,,$$

kde jako $A(\mathbf{u})$ rozumíme vektor, jehož souřadnice dostaneme vynásobením matice A sloupcovou maticí souřadnic vektoru $\mathbf{u}$. Jestliže $\mathbf{u}$ je vlastním vektorem pro λ_1, je $A(\mathbf{u}) = \lambda_1(\mathbf{u})$ a podobně $A(\mathbf{v}) = \lambda_2(\mathbf{v})$. Odtud

$$0 = (A(\mathbf{u}), \mathbf{v}) - (\mathbf{u}, A(\mathbf{v})) = \lambda_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \lambda_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

a protože $(\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0$ (z předpokladu, že λ_1, λ_2 jsou různá čísla), je $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$. □

Na základě Vět 10.1 – 10.3 nyní dokážeme, že ke každé kvadratické formě F na V_n existuje ortonormální polární báze. Nechť A_F je matice F v libovolné ortonormální bázi. A_F je symetrická a podle Věty 10.1 jsou všechny kořeny charakteristické rovnice pro A_F reálná čísla. Ukážeme si navíc, že charakteristická čísla nejsou závislá na zvolené ortonormální bázi.

Věta 10.4. *Nechť A_F a B_F jsou matice kvadratické formy F ve dvou různých ortonormálních bázích na V_n. Pak $|A_F - \lambda E_n| = |B_F - \lambda E_n|$.*

Důkaz. Podle důkazu Věty 8.2 je $B_F = Q^T A_F Q$, kde Q je matice přechodu od první báze k druhé bázi. Protože jsou naše báze ortonormální, je Q ortonormální matice, tj. $Q^T = Q^{-1}$ a $|Q| = \pm 1$. Tedy $B_F = Q^{-1} A_F Q$. Potom $|B_F - \lambda E_n| = |Q^{-1} A_F Q - \lambda Q^{-1} E_n Q| = |Q^{-1}(A_F - \lambda E_n)Q| = |Q^{-1}||A_F - \lambda E_n||Q| = |A_F - \lambda E_n|$. □

Poznámka 10.2. Z Věty 10.4 vyplývá, že charakteristická rovnice matice kvadratické formy je stejná v libovolné ortonormální bázi, můžeme tedy hovořit o *charakteristické rovnici* kvadratické formy. Dále je zřejmé, že i všechny kořeny charakteristické rovnice jsou nezávislé na zvolené ortonormální bázi a jsou to čísla, která jsou jednoznačně přiřazena dané kvadratické formě. Budeme je nazývat *charakteristická čísla* kvadratické formy. ♢

Věta 10.5. *Ke každé kvadratické formě F na euklidovském vektorovém prostoru V_n existuje taková ortonormální báze V_n, že v ní má F kanonické rovnice tvaru*

$$F(\mathbf{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2 \,, \tag{10.4}$$

kde λ_i, $i = 1, \ldots, n$, jsou charakteristická čísla kvadratické formy F.

Důkaz. Zvolme libovolnou ortonormální bázi na V_n a určeme charakteristická čísla λ_i kvadratické formy F, tj. matice A_F. Protože A_F je symetrická, jsou podle Věty 10.1 všechna λ_i reálná. Určeme bázi $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ prostoru V_n tak, že pro jednonásobný kořen λ_i je $\mathbf{e}_i$ jednotkový vlastní vektor příslušný k λ_i. Pro k–násobný kořen charakteristické rovnice ($k \geq 2$) můžeme podle Věty 10.2 vybrat v prostoru vlastních vektorů příslušných tomuto kořeni k jednotkových na sebe kolmých vektorů (např. Gramm–Schmidtovým ortogonalizačním procesem). Takto sestrojená báze $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ je podle Věty 10.3 ortonormální. Přitom $f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \lambda_i$, pro $i = j$, a $f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0$, pro $i \neq j$, $i, j = 0, \ldots, n$. Opravdu, z maticového zápisu je

$$f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}_i)^T A_F(\mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}_i)^T \lambda_j(\mathbf{e}_j) = \lambda_j(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \,.$$

Má tedy F v bázi $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ kanonické rovnice (10.4). Z Věty 10.4 potom vyplývá, že kanonické rovnice jsou nezávislé na původně zvolené ortonormální bázi. □

Úloha 10.1. V ortonormální bázi na V_3 je dána kvadratická forma F. Pomocí ortonormálních transformací určete kanonický tvar rovnic, typ formy (podle Definice 9.5), ortonormální polární bázi a transformační rovnice, které převádí rovnici formy na kanonický tvar:

a) $F(\mathbf{x}) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 10x_1x_3 + 4x_2x_3$,

b) $F(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

Řešení: a) Matice formy je $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & -2 & 2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Její charakteristická rovnice je $\lambda^3 - 36\lambda = 0$ s kořeny $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = -6$, $\lambda_3 = 0$. Podle Věty 10.5 je kanonická

rovnice F tvaru $6y_1^2 - 6y_2^2$, a tedy forma je indefinitní. Ortonormální polární báze formy F je dána jednotkovými vektory vlastních směrů. Pro λ_1 je vlastní směr prostor řešení homogenní soustavy

$$\begin{aligned} -5u_1 + 2u_2 - 5u_3 &= 0\,, \\ 2u_1 - 8u_2 + 2u_3 &= 0\,, \\ -5u_1 + 2u_2 - 5u_3 &= 0\,. \end{aligned}$$

Prostor řešení je $L((1;0;-1))$ a jeho jednotkový vektor je $\mathbf{e}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}};0;\frac{-1}{\sqrt{2}})$. Podobně pro λ_2 dostaneme vlastní směr $L((1;-1;1))$ s jednotkovým vektorem $\mathbf{e}_2 = (\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{-1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}})$. A konečně pro λ_3 dostaneme vlastní směr $L((1;2;1))$ s jednotkovým vektorem $\mathbf{e}_3 = (\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{2}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}})$. Takto sestrojená báze $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ je podle Věty 10.3 ortonormální a transformační rovnice přechodu k této bázi jsou

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_3\,, \\ x_2 &= \qquad -\frac{1}{\sqrt{3}}y_2 + \frac{2}{\sqrt{6}}y_3\,, \\ x_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_2 + \frac{2}{\sqrt{6}}y_3\,. \end{aligned}$$

b) Matice formy je $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Její charakteristická rovnice je $\lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda - 5 = 0$ s kořeny $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Kanonická rovnice F je tedy tvaru $5y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$ a forma je indefinitní. Pro λ_1 je vlastní směr $L((1;1;1))$ s jednotkovým vektorem $\mathbf{e}_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}})$. Pro $\lambda_2 = \lambda_3$ dostaneme dvoudimenzionální podprostor vlastních směrů $L((-1;1;0),(-1;0;1))$. Ortogonalizačním procesem vybereme ortogonální bázi tvořenou vektory $\mathbf{u}_2 = (-1;1;0)$ a $\mathbf{u}_3 = (-1;-1;2)$, které normujeme na vektory $\mathbf{e}_2 = (\frac{-1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}};0)$ a $\mathbf{e}_3 = (\frac{-1}{\sqrt{6}};\frac{-1}{\sqrt{6}};\frac{2}{\sqrt{6}})$. Takto sestrojená báze $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ je podle Věty 10.3 ortonormální a transformační rovnice přechodu k této bázi jsou

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 - \frac{1}{\sqrt{6}}y_3\,, \\ x_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 - \frac{1}{\sqrt{6}}y_3\,, \\ x_3 &= \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 \qquad\quad + \frac{2}{\sqrt{6}}y_3\,. \end{aligned}$$

11 Cvičení

11.1. Dokažte, že bilineární formy na V_n tvoří vektorový prostor. Určete jeho dimenzi a pro danou bázi $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ ve V_n udejte příklad báze prostoru bilineárních forem.

11.2. Dokažte, že symetrické (antisymetrické) bilineární formy na V_n tvoří vektorový podprostor v prostoru bilineárních forem. Určete jeho dimenzi.

11.3. Nechť jsou f a g dvě bilineární formy na V. Dokažte, že v libovolné bázi na V platí $A_{f+g} = A_f + A_g$ a $A_{\alpha f} = \alpha A_f$.

11.4. V kanonické bázi na $\mathbb{R}^3$ je dána bilineární forma f. Určete f_A a f_S.

a) $f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 2x_1y_1 + 4x_1y_2 - 2x_1y_3 + x_2y_2 - x_2y_3 + x_3y_2 + x_3y_3\,,$

b) $f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 2x_1y_2 + 4x_2y_3 + 6x_3y_1\,.$

{ a) $f_A = 2x_1y_2 - x_1y_3 - 2x_2y_1 + x_3y_1 + x_3y_2 - x_2y_3$,
$f_S = 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + 2x_1y_2 - x_1y_3 + 2x_2y_1 - x_3y_1$,
b) $f_A = x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_3 - 2x_3y_2 + 3x_3y_1 - 3x_1y_3$,
$f_S = x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2 + 3x_3y_1 + 3x_1y_3$ }

11.5. V kanonické bázi na $\mathbb{R}^3$ je dána bilineární forma

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_2y_3 - x_3y_3\,.$$

Určete rovnice bilineární formy f v bázi $\mathbf{u}_1 = (1;0;1)$, $\mathbf{u}_2 = (0;1;1)$ a $\mathbf{u}_3 = (1;1;0)$.

{ $f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -x_1y_2 + x_1y_3 + 2x_2y_1 + 4x_2y_2 + 2x_2y_3 + 4x_3y_1 + 5x_3y_2 + 3x_3y_3$ }

11.6. V kanonické bázi na $\mathbb{R}^3$ je dána symetrická bilineární forma

a) $f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1 + x_1y_3 + x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2 + 3x_3y_3\,,$

b) $f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_1 - x_3y_1\,.$

Určete podprostor singulárních vektorů.

{ a) Forma je regulární, nemá nenulové singulární vektory,
b) Forma má hodnost 2 a podprostor singulárních vektorů je generován vektorem $(1;-1;1)$ }

11.7. Dokažte, že pro bilineární formu $f^{\mathbb{C}}$ na $V_3^{\mathbb{C}}$ definovanou ve Větě 8.3 platí

$$f^{\mathbb{C}}(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}}) = \overline{f^{\mathbb{C}}(\mathbf{x},\mathbf{y})}\,.$$

11.8. Dokažte, že kvadratické formy na V_n tvoří vektorový prostor. Určete jeho dimenzi a pro danou bázi $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_n$ ve V_n udejte příklad báze prostoru kvadratických forem.

11.9. Najděte polární bilineární formu f kvadratické formy F, která má v kanonické bázi na $\mathbb{R}^3$ rovnice:

a) $F(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 - 6x_2x_3 + 3x_3^2\,,$

b) $F(\mathbf{x}) = 2x_1x_3 - 4x_2x_3\,,$

c) $F(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_2x_3\,.$

{ a) $f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1 + x_1y_2 + 2x_1y_3 + x_2y_1 + 2x_2y_2 - 3x_2y_3 + 2x_3y_1 - 3x_3y_2 + 3x_3y_3$,
b) $f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_3 - 2x_2y_3 + x_3y_1 - 2x_3y_2$,
c) $f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2$ }

11.10. V kanonické bázi na $\mathbb{R}^3$ je dána kvadratické forma F. Určete její signaturu a pro singulární formy určete podprostor singulárních vektorů:

a) $F(\mathbf{x}) = x_1x_3$,
b) $F(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$,
c) $F(\mathbf{x}) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$.

{ a) Signatura formy je (1,1), tj. forma je hodnosti 2, podprostor singulárních vektorů je generován vektorem $(0;1;0)$,
b) Signatura formy je (2,1), tj. forma je regulární a nemá nenulové singulární vektory,
c) Signatura formy je (1,2), tj. forma je regulární a nemá nenulové singulární vektory }

11.11. V nějaké bázi na reálném vektorovém prostoru V_4 je dána kvadratická forma F. Určete její normovanou polární bázi, normální tvar rovnic, typ formy (podle Definice 9.5) a transformační rovnice přechodu k normované polární bázi:

a) $F(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 4x_2x_3 + 4x_2x_4 + 3x_3x_4$,
b) $F(\mathbf{x}) = 3x_3^2 + 2x_4^2 + 4x_1x_4 + 4x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$,
c) $F(\mathbf{x}) = x_1x_3 + x_1x_4$.

{ a) $\mathbf{e}_1 = (1;0;0;0)$, $\mathbf{e}_2 = (-2;1;0;1)$,
$\mathbf{e}_3 = (\frac{-3}{2\sqrt{3}};\frac{-1}{2\sqrt{3}};\frac{1}{2\sqrt{3}};0)$, $\mathbf{e}_4 = (1;0;0;-1)$; $y_1^2+y_2^2-y_3^2-y_4^2$; forma je indefinitní; $x_1 = y_1 - 2y_2 - \frac{3}{2\sqrt{3}}y_3 + y_4$, $x_2 = y_2 - \frac{1}{2\sqrt{3}}y_3$, $x_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}}y_3$, $x_4 = y_2 - y_4$,
b) $\mathbf{e}_1 = (0;0;0;\frac{1}{\sqrt{2}})$, $\mathbf{e}_2 = (\frac{-1}{2\sqrt{3}};0;\frac{1}{\sqrt{3}};0)$,
$\mathbf{e}_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}};0;0;\frac{-1}{\sqrt{2}})$, $\mathbf{e}_4 = (\frac{-1}{4\sqrt{3}};\frac{3}{2\sqrt{3}};\frac{-1}{\sqrt{3}};0)$; $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$; forma je indefinitní; $x_1 = -\frac{-1}{2\sqrt{3}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_3 - \frac{1}{4\sqrt{3}}y_4$, $x_2 = \frac{3}{2\sqrt{3}}y_4$, $x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}y_4$, $x_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_3$,
c) $\mathbf{e}_1 = (1;0;1;0)$, $\mathbf{e}_2 = (0;1;0;1)$, $\mathbf{e}_3 = (1;0;-1;0)$, $\mathbf{e}_4 = (0;1;0;-1)$; $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$; forma je indefinitní; $x_1 = y_1 + y_3$, $x_2 = y_2 + y_4$, $x_3 = y_1 - y_3$, $x_4 = y_2 - y_4$ }

11.12. Určete charakteristickou rovnici, vlastní čísla a podprostory vlastních směrů matice A:

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$,

c) $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix}$, d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$,

e) $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

{ a) Charakteristická rovnice je $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = 0$; vlastní čísla jsou $\lambda_{1,2,3} = 2$; podprostor vlastních směrů je dvoudimenzionální podprostor $L((1;2;0),(0;0;1))$,
b) $\lambda^3 - \lambda^2 = 0$; $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = 0$; vlastní směr pro $\lambda_1 = 1$ je $L((1;1;1))$, pro $\lambda_{2,3} = 0$ je podprostor vlastních směrů jednodimenzionální $L((1;2;3))$,
c) $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 17\lambda - 13 = 0$; $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2+3i$, $\lambda_3 = 2-3i$; vlastní směr pro $\lambda_1 = 1$ je $L((1;1;2))$,
d) $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 32 = 0$; $\lambda_{1,2} = 4$, $\lambda_3 = -2$; podprostor vlastních směrů pro $\lambda_{1,2} = 4$ je dvoudimenzionální podprostor $L((1;0;2),(1;2;0))$, pro $\lambda_3 = -2$ je podprostor vlastních směrů jednodimenzionální $L((-2;1;1))$,
e) $\lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 = 0$; $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 9$; podprostor vlastních směrů pro $\lambda_1 = 3$ je jednodimenzionální podprostor $L((2;2;-1))$, pro $\lambda_2 = 6$ je podprostor vlastních směrů jednodimenzionální $L((1;-2;-2))$, pro $\lambda_3 = 9$ je podprostor vlastních směrů jednodimenzionální $L((-2;1;-2))$ }

11.13. V ortonormální bázi na euklidovském vektorovém prostoru V_3 je dána kvadratická forma F. Pomocí ortonormálních transformací určete kanonický tvar rovnic a typ formy (podle Definice 9.5):

a) $F(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3$,
b) $F(\mathbf{x}) = 7x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$,
c) $F(\mathbf{x}) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$,
d) $F(\mathbf{x}) = x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$,
e) $F(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$.

{ a) $3y_1^2 + 2y_2^2$, kladně semidefinitní forma,
b) $3y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2$, kladně definitní forma,
c) $6y_1^2 - 3y_2^2 - 3y_3^2$, indefinitní forma,
d) $3y_1^2 + 6y_2^2 - 2y_3^2$, indefinitní forma,
e) $y_1^2 + 4y_2^2 - 2y_3^2$, indefinitní forma }

11.14. Pro kvadratické formy z Cvičení 11.13 určete ortonormální polární bázi a transformaci souřadnic, která převádí formu do kanonického tvaru.

{ a) $\mathbf{e}_1 = (\frac{-1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}})$, $\mathbf{e}_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; \frac{1}{\sqrt{2}})$ a $\mathbf{e}_3 = (\frac{-1}{\sqrt{6}}; \frac{-2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}})$; $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 - \frac{1}{\sqrt{6}}y_3$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 - \frac{2}{\sqrt{6}}y_3$, $x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_3$,
b) $\mathbf{e}_1 = (\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3})$, $\mathbf{e}_2 = (-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$ a $\mathbf{e}_3 = (\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{3})$; $x_1 = \frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3$, $x_2 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 - \frac{2}{3}y_3$, $x_3 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3$,
c) $\mathbf{e}_1 = (-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$, $\mathbf{e}_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; \frac{1}{\sqrt{2}})$ a $\mathbf{e}_3 = (\frac{-1}{3\sqrt{2}}; \frac{4}{3\sqrt{2}}; \frac{4}{3\sqrt{2}})$; $x_1 = -\frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 - \frac{1}{3\sqrt{2}}y_3$, $x_2 = -\frac{1}{3}y_1 + \frac{4}{3\sqrt{2}}y_3$, $x_3 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 + \frac{4}{3\sqrt{2}}y_3$,
d) $\mathbf{e}_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{-1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}})$, $\mathbf{e}_2 = (\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}})$ a $\mathbf{e}_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; \frac{-1}{\sqrt{2}})$; $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_3$, $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}y_1 + \frac{2}{\sqrt{6}}y_2$, $x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_3$,
e) $\mathbf{e}_1 = (\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{2}{3})$, $\mathbf{e}_2 = (\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{3})$ a $\mathbf{e}_3 = (\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3})$; $x_1 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3$, $x_2 = \frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3$, $x_3 = -\frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3$}

11.15. V ortonormální bázi na V_4 je dána kvadratická forma

$$F(\mathbf{x}) = 2x_1x_2 + 2x_3x_4\,.$$

Pomocí ortonormálních transformací určete kanonický tvar rovnic, typ formy (podle Definice 9.5), ortonormální polární bázi a transformační rovnice, které převádějí rovnici formy na kanonický tvar.

{ $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$; indefinitní forma; $\mathbf{e}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0; 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0; 0; \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\mathbf{e}_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; 0)$, $\mathbf{e}_4 = (0; 0; \frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}})$; $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_3$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_3$, $x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_4$, $x_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_4$ }

Kapitola 4

TEORIE KUŽELOSEČEK

V této kapitole budeme studovat analytickou teorii kuželoseček v projektivní rovině a v projektivním rozšíření afinní a euklidovské roviny.

12 Kuželosečky v projektivní rovině

Nechť $\mathcal{P}_2$ je dvoudimenzionální reálný projektivní prostor s aritmetickým základem V_3. Nechť $V_3^{\mathbb{C}}$ je komplexní rozšíření prostoru V_3 definované v Části 1. Projektivní komplexní prostor s aritmetickým základem $V_3^{\mathbb{C}}$ budeme nazývat *komplexním rozšířením* projektivního prostoru $\mathcal{P}_2$ a označovat $\mathcal{P}_2^{\mathbb{C}}$. Reálnou projektivní rovinu $\mathcal{P}_2$ potom můžeme uvažovat jako podmnožinu (ne podprostor) v komplexní projektivní rovině $\mathcal{P}_2^{\mathbb{C}}$, totiž bod $X = \langle \mathbf{x} \rangle \in \mathcal{P}_2$ právě tehdy, když existuje jeho aritmetický zástupce $\mathbf{x} \in V_3 \subset V_3^{\mathbb{C}}$. Body X ležící v $\mathcal{P}_2 \subset \mathcal{P}_2^{\mathbb{C}}$ budeme nazývat *reálné* body a body z $\mathcal{P}_2^{\mathbb{C}}$ neležící v $\mathcal{P}_2$ budeme nazývat *imaginární* body.

Definice 12.1. Nechť F je nenulová kvadratická forma na V_3. Množinu bodů $X = \langle \mathbf{x} \rangle \in \mathcal{P}_2^{\mathbb{C}}$ takových, že $F^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = 0$, nazýváme *kuželosečkou* v projektivní rovině $\mathcal{P}_2^{\mathbb{C}}$ a značíme k.

Poznámka 12.1. Musíme ukázat, že naše definice má smysl, tj. že má smysl uvažovat body $X = \langle \mathbf{x} \rangle \in \mathcal{P}_2^{\mathbb{C}}$ splňující rovnici $F^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = 0$. Uvažujme libovolnou kvadratickou formu F na vektorovém prostoru V libovolné dimenze definovaném nad tělesem $\mathbb{T}$ reálných či komplexních čísel. Potom $F(\alpha\mathbf{x}) = \alpha^2 F(\mathbf{x})$ pro všechna $\alpha \in \mathbb{T}$. Odtud, je-li $F(\mathbf{x}) = 0$ pro nějaký nenulový vektor $\mathbf{x}$, je $F(\alpha\mathbf{x}) = 0$ pro všechna α, a tedy opravdu rovnice $F(\mathbf{x}) = 0$ určuje v $\mathcal{P}_2^{\mathbb{C}}$ množinu bodů. ♢

Poznámka 12.2. Snadno se nahlédne, že dvě reálné nenulové kvadratické formy F a G určují stejnou kuželosečku právě tehdy, když existuje $\alpha \neq 0 \in \mathbb{R}$ takové, že $G = \alpha F$. To znamená, že rovnice kuželosečky $F^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = 0$ je dána až na nenulový násobek. ♢

Uvažujme nyní geometrickou bázi

$$\langle O_1 = \langle \mathbf{u}_1 \rangle,\, O_2 = \langle \mathbf{u}_2 \rangle,\, O_3 = \langle \mathbf{u}_3 \rangle,\, E = \langle \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 \rangle \rangle \tag{12.1}$$

prostoru $\mathcal{P}_2$. Z definice geometrické báze a vlastností komplexního rozšíření vektorového prostoru vyplývá, že (12.1) je současně i geometrickou bází projektivního prostoru $\mathcal{P}_2^{\mathbb{C}}$. Přitom bod X je reálný právě tehdy, když jeho projektivní homogenní souřadnice vzhledem ke geometrické bázi (12.1) jsou reálná čísla a je imaginární právě tehdy, když alespoň jedna souřadnice je komplexní číslo s nenulovou imaginární částí. Vyjádřeme nyní rovnici kuželosečky $k : F^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = 0$ v geometrické bázi (12.1). Nechť bod X má v bázi (12.1) projektivní homogenní souřadnice (x_1, x_2, x_3). Potom bod $X \in k$ právě tehdy, když

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j = 0, \tag{12.2}$$

kde $A = (a_{ij}) = (f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j))$ je matice kvadratické formy F v bázi $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ prostoru V_3. Dále budeme, kromě rovnice (12.2), používat i zápis

$$k : \; a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0$$

a při označení (X) jako sloupcové matice projektivních homogenních souřadnic, tj. $(X) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, můžeme psát

$$k : \; (x_1 \; x_2 \; x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

nebo zkráceně

$$k : \; (X)^T A (X) = 0\,.$$

Poznámka 12.3. Protože jsme v definici kuželosečky použili komplexní rozšíření reálné kvadratické formy, jsou všechny koeficienty a_{ij} v rovnici (12.2) reálná čísla, zatímco proměnné souřadnice mohou být i čísla komplexní. Při použití libovolné kvadratické formy bychom dostali kuželosečky, jejichž reálná část by neodpovídala kuželosečkám definovaným v syntetické geometrii jako množiny bodů daných vlastností. Je-li $k \cap \mathcal{P}_2 = \emptyset$, tj. k neobsahuje žádný reálný bod, říkáme, že k je *formálně reálná* nebo *imaginární kuželosečka*. Příkladem je kuželosečka o rovnicích

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0\,.$$

♢

Definice 12.2. *Hodností* kuželosečky $k: F^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = 0$ rozumíme hodnost kvadratické formy F, to jest její matice A v libovolné bázi. Matici A budeme nazývat *maticí* kuželosečky v dané geometrické bázi a determinant $|A|$ nazýváme *diskriminantem* kuželosečky. Je-li kvadratická forma F regulární, nazveme kuželosečku k *regulární kuželosečkou* a je-li F singulární kvadratická forma, nazveme kuželosečku k *singulární* nebo *složenou kuželosečkou*. Ve starší literatuře se pro singulární kuželosečky používaly také názvy *degenerovaná* nebo *zvrhlá* kuželosečka.

Poznámka 12.4. Regulární kuželosečka je tedy hodnosti 3. Singulární kuželosečky mohou být hodnosti 1 nebo 2. ♢

Věta 12.1. *Hodnost kuželosečky nezávisí na zvolené geometrické bázi.*

Důkaz. Věta 12.1 je přímým důsledkem Věty 8.2. □

Věta 12.2. *Nechť je dáno pět různých reálných bodů $A_i = \langle \mathbf{a}_i \rangle \in \mathcal{P}_2^{\mathbb{C}}$, $i = 1, \ldots, 5$, takových, že žádné čtyři z nich neleží na jedné přímce. Pak existuje právě jedna kuželosečka $k: F^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = 0$ taková, že $A_i \in k$.*

Důkaz. 1. *Existence.* V libovolné aritmetické bázi V_3 je reálná kvadratická forma F dána 6 koeficienty $a_{ij} \in \mathbb{R}$ (plyne ze symetrie matice A_F). Uvažujme soustavu

$$F(\mathbf{a}_i) = 0 \tag{12.3}$$

5 rovnic pro 6 neznámých koeficientů a_{ij}. Tato homogenní soustava má vždy nenulové reálné řešení, tj. vždy existuje nenulová kvadratická forma splňující (12.3), a tedy vždy existuje kuželosečka $k: F^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = 0$ taková, že $A_i \in k$, $\forall i = 1, \ldots, 5$.

2. *Jednoznačnost.* Rovnice kuželosečky jsou dány až na nenulový násobek. Soustava (12.3) tedy bude určovat jednoznačně rovnici kuželosečky, má-li řešení hodnost 1, tj. má-li soustava (12.3) hodnost 5. To ale nastane právě tehdy, když žádné 4 body A_i neleží na jedné přímce, jak si snadno ukážeme následující úvahou. Předpokládejme, že nějaké 4 body leží na přímce. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že jsou to body $A_1, \ldots, A_4$. Potom $A_3 = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$, $\alpha_i \neq 0$, $A_4 = \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2$, $\beta_i \neq 0$, a odtud $F(\mathbf{a}_3) = 0$ je ekvivalentní s $f(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = 0$ a totéž pro $F(\mathbf{a}_4) = 0$. To vyplývá z $0 = F(\mathbf{a}_3) = f(\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_3) = \alpha_1^2 F(\mathbf{a}_1) + 2\alpha_1\alpha_2 f(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) + \alpha_2^2 F(\mathbf{a}_2) = 2\alpha_1\alpha_2 f(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ a totéž pro $F(\mathbf{a}_4) = 0$. Tedy 3. a 4. rovnice v soustavě jsou závislé a soustava má hodnost menší než 5.

Leží-li na jedné přímce nejvýše trojice bodů, např. A_1, A_2, A_3, pak v soustavě (12.3) nahradíme rovnici $F(\mathbf{a}_3) = 0$ rovnicí $f(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = 0$, která je s rovnicemi $F(\mathbf{a}_1) = 0$ a $F(\mathbf{a}_2) = 0$ nezávislá. Rovnice $f(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = 0$ vyjadřuje fakt, že každý bod přímky A_1A_2 leží na kuželosečce, která je potom singulární. □

Poznámka 12.5. Tvrzení Věty 12.2 se dá zobecnit tak, že kuželosečka je určena 5 nezávislými podmínkami, kde jako podmínku rozumíme takovou informaci o kuželosečce, která v souřadnicích vede na lineární rovnici, kde jako neznámé vystupují koeficienty matice kuželosečky. ♢

Definice 12.3. Nechť $k: F^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = 0$ je kuželosečka. Body $P = \langle \mathbf{p} \rangle, Q = \langle \mathbf{q} \rangle \in \mathcal{P}_2^{\mathbb{C}}$ se nazývají *polárně sdružené* nebo *konjugované* vzhledem ke kuželosečce k, jestliže $f^{\mathbb{C}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0$.

Poznámka 12.6. V Definici 12.3 má smysl hovořit o bodech splňujících podmínku $f^{\mathbb{C}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0$, protože pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_3^{\mathbb{C}}$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ platí $f^{\mathbb{C}}(\alpha\mathbf{x}, \beta\mathbf{y}) = \alpha\beta f^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. ♢

Definice 12.4. Bod P nazveme *singulárním bodem* kuželosečky k, je-li polárně sdružen vzhledem ke k se všemi body roviny. Bod, který leží na kuželosečce k a není jejím singulárním bodem, nazveme *regulárním bodem* kuželosečky k.

Věta 12.3. *Nechť $k: F^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = 0$ je kuželosečka a P je její singulární bod. Nechť $Q \in k$ a $Q \neq P$. Potom:*

(1) *Bod P leží na k.*

(2) *Všechny body přímky PQ leží na k.*

Důkaz. (1) Bod $P = \langle \mathbf{p} \rangle$ je singulárním bodem kuželosečky k a je tedy polárně sdružen se všemi body roviny, a tedy i sám se sebou, tj. $f^{\mathbb{C}}(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = 0$, a tedy $P \in k$.

(2) Přímka PQ má parametrické vyjádření $X = \alpha P + \beta Q$, $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. Potom $F^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = f^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \alpha^2 f^{\mathbb{C}}(\mathbf{p}, \mathbf{p}) + 2\alpha\beta f^{\mathbb{C}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \beta^2 f^{\mathbb{C}}(\mathbf{q}, \mathbf{q}) = 0$, tj. $X \in k$ pro libovolné hodnoty $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. □

Věta 12.4. *Nechť kuželosečka $k: F^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = 0$ má v nějaké geometrické bázi v $\mathcal{P}_2^{\mathbb{C}}$ rovnici (12.2), potom bod X je singulárním bodem k právě tehdy, když jsou jeho projektivní homogenní souřadnice (x_1, x_2, x_3) řešením lineární soustavy rovnic*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0\,, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0\,, \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 &= 0\,, \end{aligned}$$

tj. $F_1(\mathbf{x}) = 0$, $F_2(\mathbf{x}) = 0$, $F_3(\mathbf{x}) = 0$.

Důkaz. Z definice singulárního bodu kuželosečky k vyplývá, že X je singulárním bodem právě tehdy, když libovolný jeho aritmetický zástupce $\mathbf{x}$ je singulárním vektorem kvadratické formy $F^{\mathbb{C}}$, tj. polární bilineární formy $f^{\mathbb{C}}$. Naše tvrzení nyní vyplývá z (9.1). □

Věta 12.5. *Regulární kuželosečka nemá singulární body, singulární kuželosečka hodnosti 2 má právě jeden reálný singulární bod a singulární kuželosečka hodnosti 1 má reálnou přímku singulárních bodů.*

Důkaz. Důkaz vyplývá z počtu řešení soustavy homogenních lineárních rovnic z Věty 12.4. □

Věta 12.6. *Nechť $k : F^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = 0$ je kuželosečka a $P = \langle \mathbf{p} \rangle$ je bod, který není singulárním bodem k. Množina všech bodů $X = \langle \mathbf{x} \rangle$ polárně sdružených s bodem P je přímka s rovnicí $p : f^{\mathbb{C}}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = 0$ nebo*

$$F_1(\mathbf{p})\, x_1 + F_2(\mathbf{p})\, x_2 + F_3(\mathbf{p})\, x_3 = 0\,.$$

Důkaz. Protože P není singulární bod k, není rovnice $f^{\mathbb{C}}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = 0$ splněna identicky a pro pevně zvolené $\mathbf{p}$ je $f^{\mathbb{C}}(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ nenulová lineární forma na $V_3^{\mathbb{C}}$ a množina vektorů, které ji nulují, je vektorový podprostor dimenze 2. Tento podprostor je aritmetickým základem přímky p. □

Definice 12.5. Přímku p z Věty 12.6 budeme nazývat *polárou* bodu P vzhledem ke kuželosečce k a naopak bod P budeme nazývat *pólem* přímky p.

Poznámka 12.7. Nechť má kuželosečka k rovnici (12.2). Potom rovnice poláry bodu $P = (p_1, p_2, p_3)$ vzhledem ke k je

$$p : (a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{13}p_3)x_1 + (a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + a_{23}p_3)x_2 + \\ +(a_{13}p_1 + a_{23}p_2 + a_{33}p_3)x_3 = 0$$

nebo zkráceně

$$p : F_1(\mathbf{p})x_1 + F_2(\mathbf{p})x_2 + F_3(\mathbf{p})x_3 = 0\,.$$

♢

Věta 12.7. *Nechť $k : F^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = 0$ je kuželosečka. Leží-li nesingulární bod $P = \langle \mathbf{p} \rangle$ na poláře nesingulárního bodu $Q = \langle \mathbf{q} \rangle$, pak bod Q leží na poláře bodu P.*

Důkaz. Je-li $F^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = 0$ rovnice k, je podle Věty 12.6 rovnice poláry bodu P přímka $p : f^{\mathbb{C}}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = 0$, a tedy $Q \in p \Leftrightarrow f^{\mathbb{C}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0$. Ze symetrie bilineární formy f je potom $f^{\mathbb{C}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = 0$, což znamená, že P leží na poláře bodu Q. □

Poznámka 12.8. Pro regulární kuželosečku k je přiřazení pólu a poláry vzájemně jednoznačné zobrazení množiny bodů $\mathcal{P}_2^{\mathbb{C}}$ na množinu přímek. Opravdu, je-li $p : a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ obecné vyjádření nějaké přímky p, potom souřadnice jejího pólu splňují soustavu rovnic $F_1(\mathbf{p}) = \alpha a_1$, $F_2(\mathbf{p}) = \alpha a_2$, $F_3(\mathbf{p}) = \alpha a_3$, kde $\alpha \neq 0$ je číslo. Tato soustava lineárních rovnic pro neznámé souřadnice bodu P má jednoparametrické řešení (závislé na parametru α) právě tehdy, když je matice A regulární. Vztah mezi pólem a polární přímkou je projevem obecnější zákonitosti, která se nazývá *princip duality*. ♢

Věta 12.8. *Nechť k je kuželosečka a p je přímka. Potom buď p je podmnožina k, nebo p a k mají společné právě dva body. Přitom pro reálnou přímku jsou tyto body reálné různé, nebo komplexně sdružené, nebo reálné splývající a pro imaginární přímku jsou imaginární různé, nebo imaginární splývající.*

Důkaz. Nechť p je určena body $A = \langle \mathbf{a} \rangle, B = \langle \mathbf{b} \rangle$, $A \neq B$, tj. $p : X = \alpha A + \beta B$, $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. Předpokládejme, že bod $X = \langle \mathbf{x} \rangle$ leží v průniku p a k. Potom musí být splněna rovnice

$$\alpha^2 f^{\mathbb{C}}(\mathbf{a}, \mathbf{a}) + 2\alpha\beta f^{\mathbb{C}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \beta^2 f^{\mathbb{C}}(\mathbf{b}, \mathbf{b}) = 0\,. \tag{12.4}$$

Je-li $f^{\mathbb{C}}(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = f^{\mathbb{C}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = f^{\mathbb{C}}(\mathbf{b}, \mathbf{b}) = 0$ ($A, B \in k$ a A, B jsou polárně sdruženy vzhledem ke k), je rovnice (12.4) splněna identicky a přímka p je podmnožinou k. Je-li $f^{\mathbb{C}}(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \neq 0$ (podobně pro $f^{\mathbb{C}}(\mathbf{b}, \mathbf{b}) \neq 0$), je $\beta \neq 0$ ($\alpha \neq 0$) a rovnice (12.4) je kvadratickou rovnicí pro $\frac{\alpha}{\beta}$ ($\frac{\beta}{\alpha}$). Pro reálnou přímku uvažujeme body A, B reálné a kvadratická rovnice (12.4) má reálné koeficienty. Dvojice reálných různých průsečíků potom odpovídá dvěma reálným různým kořenům této rovnice, dvojice komplexně sdružených průsečíků odpovídá dvěma komplexně sdruženým kořenům a splývající reálné průsečíky odpovídají dvojnásobnému kořenu. Je–li p imaginární přímka, musí být minimálně jeden z bodů A, B imaginární a kvadratická rovnice (12.4) má komplexní koeficienty. Dvojici různých kořenů potom odpovídají dva různé imaginární průsečíky a dvojnásobnému kořenu odpovídají splývající imaginární průsečíky.

Konečně, je-li $f^{\mathbb{C}}(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = f^{\mathbb{C}}(\mathbf{b}, \mathbf{b}) = 0$ a $f^{\mathbb{C}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq 0$, dostaneme $\alpha\beta = 0$, tj. $\alpha = 0$ a $\beta \neq 0$ nebo $\beta = 0$ a $\alpha \neq 0$, což odpovídá případu, kdy právě body A, B leží v průniku p a k. □

Definice 12.6. Přímku p, která není přímkou singulárních bodů kuželosečky k, nazýváme *tečnou kuželosečky* k právě když platí buď $p \subset k$, nebo p protíná k v dvojnásobném (regulárním) bodě. Regulární bod, který je průnikem kuželosečky a její tečny, se nazývá *bodem dotyku*.

Věta 12.9. *Nechť P je regulární bod kuželosečky $k : F^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = 0$. Potom polára bodu P je tečnou kuželosečky k s bodem dotyku P. Naopak každá tečna kuželosečky k, na níž leží alespoň jeden bod, který není singulárním bodem k, je polárou nějakého regulárního bodu k ležícího na p.*

Důkaz. Nechť $P = \langle \mathbf{p} \rangle \in k$ je regulární bod a $p : f^{\mathbb{C}}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = 0$ je jeho polára vzhledem ke k. Potom $P \in p$, protože $f^{\mathbb{C}}(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = 0$, a tedy $P \in p \cap k$. Hledejme další body průniku $p \cap k$. Nechť $Q = \langle \mathbf{q} \rangle \in p$, $P \neq Q$. Potom $p : X = \alpha P + \beta Q$, $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. $X \in p \cap k$ právě tehdy, když

$$\alpha^2 f^{\mathbb{C}}(\mathbf{p}, \mathbf{p}) + 2\alpha\beta f^{\mathbb{C}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \beta^2 f^{\mathbb{C}}(\mathbf{q}, \mathbf{q}) = 0\,, \tag{12.5}$$

což je ekvivalentní s $\beta^2 f^{\mathbb{C}}(\mathbf{q}, \mathbf{q}) = 0$. Je-li $\beta = 0$, je $X = \alpha P$ a jediným bodem průniku je bod P. Je-li $f^{\mathbb{C}}(\mathbf{q}, \mathbf{q}) = 0$, je $X \in p \cap k$ pro libovolné α, β, a tedy $p \subset k$. Ukázali jsme tedy, že polára regulárního bodu kuželosečky k je tečnou s bodem dotyku v P.

Nechť nyní t je tečna kuželosečky k taková, že na ní leží alespoň jeden bod, který není singulárním bodem k. Z definice tečny vyplývá, že existuje regulární

bod $P \in p \cap k$. Nechť $Q \in t$, $Q \neq P$, je libovolný bod a $t : X = \alpha P + \beta Q$, $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. Musíme ukázat, že Q je polárně sdružen s P vzhledem ke k. Nechť nejdříve $t \subset k$. Rovnice (12.5) se v tomto případě redukuje v $\alpha\beta f^{\mathbb{C}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0$ a musí být splněna pro všechna α, β. Odtud $f^{\mathbb{C}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0$, a tedy Q leží na poláře P. Dále nechť $p \cap k$ je jediný dvojnásobný bod P. Potom se rovnice (12.5) redukuje v rovnici $2\alpha\beta f^{\mathbb{C}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \beta^2 f^{\mathbb{C}}(\mathbf{q}, \mathbf{q}) = 0$, $\alpha \neq 0$, která musí mít dvojnásobný kořen pro $\frac{\beta}{\alpha}$. To je možné jen v případě, že $f^{\mathbb{C}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0$, tj. Q leží na poláře bodu P. □

Poznámka 12.9. Geometrická interpretace poláry pro regulární kuželosečky nyní vyplývá z Věty 12.7. Je–li bod P nesingulární bod, který neleží na kuželosečce, potom polára bodu P vzhledem ke kuželosečce k je spojnice bodů dotyku tečen, sestrojených ke kuželosečce z bodu P. Tato vlastnost poláry se dá velice výhodně využít pro určování rovnic tečen kuželosečky procházejících daným bodem (viz následující Úloha 12.3). Pro singulární kuželosečky obsahuje polára libovolného (nesingulárního) bodu všechny singulární body kuželosečky. ♢

Úloha 12.1. V dané geometrické bázi je dána kuželosečka

$k : 4x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0$

a bod $P = (-3; 5; 1)$. Určete poláru bodu P vzhledem ke kuželosečce k.

Řešení: Podle Věty 12.6 pro poláru bodu P platí $f^{\mathbb{C}}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = 0$ a z Poznámky 12.7 plyne

$p : -\frac{11}{2}x_1 - 7x_2 + \frac{7}{2}x_3 = 0,$

což upravíme na tvar

$p : 11x_1 + 14x_2 - 7x_3 = 0.$

Úloha 12.2. V dané geometrické bázi je dána kuželosečka

$k : 3x_1^2 + 5x_2^2 + 10x_3^2 - 6x_1x_2 - 4x_1x_3 - 6x_2x_3 = 0$

a přímka $p : x_1 - 6x_2 + 8x_3 = 0$. Určete pól P přímky p vzhledem ke kuželosečce k.

Řešení: Podle Poznámky 12.8 jsou souřadnice pólu P přímky p řešením soustavy lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 &= \alpha\,, \\ -3x_1 + 5x_2 - 3x_3 &= -6\alpha\,, \\ -2x_1 - 3x_2 + 10x_3 &= 8\alpha\,, \end{aligned}$$

a tedy $x_1 = \alpha$, $x_2 = 0$, $x_3 = \alpha$,. Volbou $\alpha = 1$ dostaneme souřadnice pólu $P = (1; 0; 1)$.

Úloha 12.3. V dané geometrické bázi je dána kuželosečka

$k : 2x_1^2 + x_2^2 - 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3 = 0$

a bod $P = (3; 4; 1)$. Sestrojte tečny kuželosečky k, které procházejí bodem P.

Řešení: I. metoda:

Předpokládejme, že bod $T = (t_1; t_2; t_3)$ je bodem dotyku hledané tečny, tj. $T \in k$ a P leží na poláře bodu T. Podmínka $T \in k$ má v souřadnicích vyjádření

$$2t_1^2 + t_2^2 - 3t_3^2 - 4t_1t_2 - 2t_1t_3 + 6t_2t_3 = 0$$

a podmínka, aby P ležel na poláře bodu T, tj. $(T)^T A(P) = 0$, vede na rovnici

$$-3t_1 + t_2 + 6t_3 = 0\,.$$

Dosazením $t_2 = 3t_1 - 6t_3$ do první rovnice dostaneme

$$-t_1^2 - 3t_3^2 + 4t_1t_3 = 0\,.$$

Ověříme, že $t_3 = 0$ nevede na řešení naší úlohy, a upravíme na

$$(\tfrac{t_1}{t_3})^2 - 4\tfrac{t_1}{t_3} + 3 = 0\,.$$

Potom $(\frac{t_1}{t_3}) = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$ a odtud $T_1 = (3; 3; 1)$ a $T_2 = (1; -3; 1)$. Hledané tečny jsou potom poláry

$$t_1 : x_1 - 3x_3 = 0,\ t_2 : 7x_1 - 2x_2 - 13x_3 = 0\,.$$

II. metoda:

Předpokládejme, že má tečna obecnou rovnici $t : a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$. Z předpokladu, že $P \in t$, dostaneme $3a_1 + 4a_2 + a_3 = 0$, tj. $a_3 = -3a_1 - 4a_2$. Tedy $t : a_1x_1 + a_2x_2 - (3a_1 + 4a_2)x_3 = 0$. Protože $P \notin k$, je podmínka, že t je tečna kuželosečky k, ekvivalentní tomu, že $t \cap k$ je dvojnásobný bod. Vyjádříme-li z rovnice tečny x_1 a dosadíme do rovnice kuželosečky, dostaneme

$$\begin{aligned}(a_1^2 + 4a_1a_2 + 2a_2^2)x_2^2 + (9a_1^2 + 40a_1a_2 + 32a_2^2)x_3^2 \\ +(-6a_1^2 - 26a_1a_2 - 16a_2^2)x_2x_3 = 0\,.\end{aligned}$$

t je tečnou k právě tehdy, když diskriminant této kvadratické rovnice pro $\frac{x_2}{x_3}$ je roven nule, tj. $D = 8a_1a_2 + 28a_2^2 = 0$. Odtud dostáváme dvě řešení. První řešení je $a_2 = 0$ a a_1 libovolné, pak $a_3 = -3a_1$ a volbou $a_1 = 1$ dostaneme tečnu $t_1 : x_1 - 3x_3 = 0$. Druhé řešení je $a_1 = 7$ a $a_2 = -2$, pak $a_3 = -13$ a dostaneme tečnu $t_2 : 7x_1 - 2x_2 - 13x_3 = 0$.

III. metoda:

Podle Poznámky 12.9 prochází polára bodu P body dotyku hledaných tečen. Polára bodu P je

$$p : -3x_1 + x_2 + 6x_3 = 0\,.$$

$p \cap k$ vede na kvadratickou rovnici (viz I. metoda)

$$(\tfrac{x_1}{x_3})^2 - 4\tfrac{x_1}{x_3} + 3 = 0\,.$$

Dostaneme $(\frac{x_1}{x_3}) = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$ a odtud $T_1 = (3; 3; 1)$ a $T_2 = (1; -3; 1)$. Tečny jsou potom poláry bodů T_1 a T_2, tj.

$$t_1 : x_1 - 3x_3 = 0 \text{ a } t_2 : 7x_1 - 2x_2 - 13x_3 = 0\,.$$

Úloha 12.4. Určete rovnici kuželosečky k, která prochází body $A_1 = (1;1;0)$, $A_2 = (0;1;1)$, $A_3 = (1;0;1)$, $A_4 = (1;-1;1)$ a $A_5 = (1;-1;-1)$.

Řešení: Do obecné rovnice kuželosečky

$k : a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0$

dosadíme postupně souřadnice bodů A_i a dostaneme soustavu pěti lineárních homogenních rovnic pro koeficienty kuželosečky

$$\begin{aligned}
a_{11} + a_{22} \qquad + 2a_{12} \qquad\qquad &= 0\,,\\
a_{22} + a_{33} \qquad\qquad + 2a_{23} &= 0\,,\\
a_{11} \qquad + a_{33} \qquad + 2a_{13} \qquad &= 0\,,\\
a_{11} + a_{22} + a_{33} - 2a_{12} + 2a_{13} - 2a_{23} &= 0\,,\\
a_{11} + a_{22} + a_{33} - 2a_{12} - 2a_{13} + 2a_{23} &= 0\,.
\end{aligned}$$

Zvolíme-li volnou neznámou $a_{23} = \frac{2}{3}$, dostaneme

$k : x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 3x_1x_3 + 3x_2x_3 = 0\,.$

Úloha 12.5. Určete rovnici kuželosečky k, která prochází body $A_1 = (0;0;1)$, $A_2 = (0;-1;1)$, $A_3 = (-1;0;3)$ a dotýká se přímky $t : 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0$ v bodě $T = (1;-2;1)$.

Řešení: Do obecné rovnice kuželosečky

$k : a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0$

dosadíme postupně souřadnice bodů A_i a dostaneme soustavu tří lineárních homogenních rovnic pro koeficienty kuželosečky

$$\begin{aligned}
a_{33} \qquad\qquad\qquad &= 0\,,\\
a_{22} + a_{33} \qquad\qquad - 2a_{23} &= 0\,,\\
a_{11} \qquad + 9a_{33} \qquad - 6a_{13} \qquad &= 0\,.
\end{aligned}$$

Podmínka, že T je bod dotyku tečny t, tj. pól přímky t, vede na soustavu tří lineárních nehomogenních rovnic (viz Poznámka 12.7 a Poznámka 12.8, kde volíme $\alpha = 1$)

$$\begin{aligned}
a_{11} \qquad\qquad - 2a_{12} + a_{13} \qquad &= 4\,,\\
-2a_{22} \qquad + a_{12} \qquad + a_{23} &= 3\,,\\
a_{33} \qquad - 2a_{13} + a_{23} &= 2\,.
\end{aligned}$$

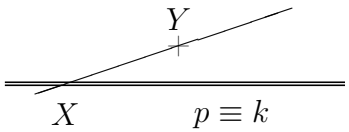
Řešením všech rovnic dostaneme rovnici kuželosečky

$k : 6x_1^2 - x_2^2 + 3x_1x_2 + 2x_1x_3 - x_2x_3 = 0\,.$

13 Projektivní klasifikace kuželoseček

Věta 13.1. *Singulární kuželosečka hodnosti 1 je tvořena jednou reálnou (dvojnásobnou) přímkou.*

Důkaz. Kuželosečka hodnosti 1 má reálnou přímku p singulárních bodů (viz Věta 12.5). Kuželosečka již potom nemůže obsahovat žádný jiný bod. Kdyby byl totiž bod $Y \notin p$ dalším bodem kuželosečky, patřily by všechny body přímek XY, $X \in p$, kuželosečce (Věta 12.3), což by znamenalo, že každý bod roviny by byl bodem kuželosečky, a to je spor s Definicí 12.1. Kuželosečka tedy obsahuje pouze body přímky p. □

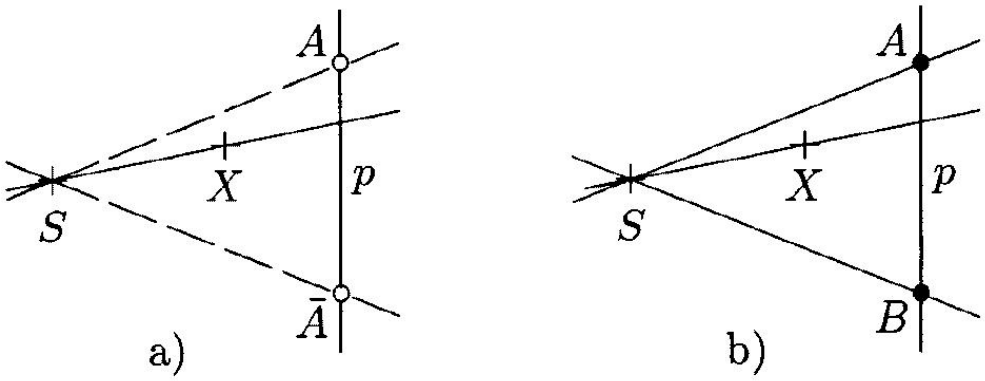


Obrázek 13.1

Věta 13.2. *Singulární kuželosečka hodnosti 2 je složena ze dvou přímek, které jsou buď komplexně sdružené nebo reálné různé.*

Důkaz. Kuželosečka hodnosti 2 má právě jeden reálný singulární bod S (viz Věta 12.5). Uvažujme reálnou přímku p, která neobsahuje singulární bod S. Přímka p nemůže být částí kuželosečky, protože v tom případě by podle Věty 12.3 ležely na kuželosečce všechny přímky spojující singulární bod s libovolným bodem na p, a tedy celá rovina by byla součástí kuželosečky, což je ve sporu s Definicí 12.1.

Také možnost, že průnik p a kuželosečky je dvojnásobný bod, je vyloučena. Pokud by byl dvojnásobný bod singulárním bodem kuželosečky, dostali bychom se do sporu s počtem singulárních bodů. Pokud by byl dvojnásobný bod regulárním bodem kuželosečky, byla by přímka p tečnou kuželosečky v tomto bodě a podle Poznámky 12.9 by musela přímka p procházet bodem S, což je ve sporu s předpokladem.



Obrázek 13.2

Podle Věty 12.8 je tedy průnik kuželosečky a přímky p dvojice bodů, které jsou buď komplexně sdružené (na Obrázku 13.2 a) jsou označeny jako A, $\bar{A}$), nebo reálné různé. (na Obrázku 13.2 b) jsou průsečíky označeny A, B). Spojnice singulárního bodu s těmito průsečíky leží podle Věty 12.3 na kuželosečce a jsou to buď dvě komplexně sdružené přímky, nebo dvě reálné různé přímky.

Žádný jiný bod již na kuželosečce neleží. Kdyby totiž existoval bod X, který leží na kuželosečce a neleží na žádné z výše popsaných přímek, potom by přímka SX ležela na kuželosečce a průnik $SX \cap p$ by byl třetí průsečík kuželosečky a přímky p, což je ve sporu s Větou 12.8. □

Definice 13.1. Přímky, které tvoří singulární kuželosečku, se nazývají *tvořícími přímkami* kuželosečky.

Věta 13.3. (Projektivní klasifikace kuželoseček) *Ke každé kuželosečce*

$$k : F^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = 0$$

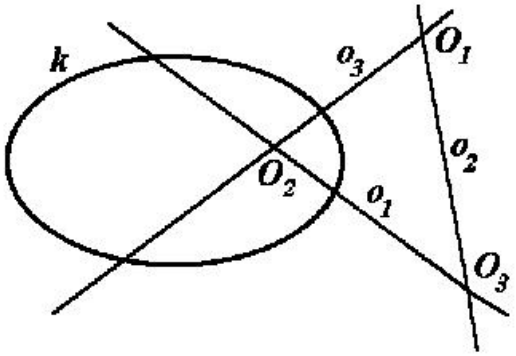
existuje taková reálná geometrická báze prostoru $\mathcal{P}_2^{\mathbb{C}}$, že v této bázi má kuželosečka k právě jednu z následujících rovnic

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0\,, \tag{Pk1}$$
$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0\,, \tag{Pk2}$$
$$x_1^2 + x_2^2 = 0\,, \tag{Pk3}$$
$$x_1^2 - x_2^2 = 0\,, \tag{Pk4}$$
$$x_1^2 = 0\,. \tag{Pk5}$$

Důkaz. F je nenulová kvadratická forma na V_3. Podle Věty 9.2 k ní existuje polární báze $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$. Položme $O_i = \langle \mathbf{e}'_i \rangle$. Potom v geometrické bázi O_1, O_2, O_3, $E' = \langle \sum_{i=1}^{3} \mathbf{e}'_i \rangle$ má kuželosečka k kanonickou rovnici $k : \sum_{i=1}^{3} a_{ii} x_i^2 = 0$, kde $a_{ii} = F(\mathbf{e}'_i)$. Změňme pořadí bodů O_i tak, aby v kanonických rovnicích byly nejdříve koeficienty kladné, potom záporné a nakonec nuly. Pokud je mezi koeficienty více záporných znamének než kladných, vynásobíme nejdříve rovnici kuželosečky -1 (to znamená, že od kvadratické formy F přejdeme ke kvadratické formě $-F$). Nenulové koeficienty nakonec normujeme změnou jednotkového bodu E tak, že změníme aritmetické zástupce bodů O_i následujícím způsobem: $\mathbf{e}_i = \frac{1}{\sqrt{|a_{ii}|}} \mathbf{e}'_i$. Potom v bázi $\langle O_1 = \langle \mathbf{e}_1 \rangle, O_2 = \langle \mathbf{e}_2 \rangle, O_3 = \langle \mathbf{e}_3 \rangle, E = \langle \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{e}_i \rangle \rangle$ má kuželosečka k požadovanou rovnici. □

Definice 13.2. Rovnici kuželosečky k z Věty 13.3 nazýváme *normální rovnicí* kuželosečky. Geometrickou bázi, ve které nabývá rovnice kuželosečky normální tvar, nazýváme *normovaná polární báze* kuželosečky k.

Poznámka 13.1. V praxi je většinou kuželosečka zadána v souřadnicích vzhledem k nějaké geometrické bázi. Určit normální tvar rovnice potom znamená převést určující kvadratickou formu na normální tvar algoritmem popsaným v Části 9 a příslušnou polární bázi potom poznáme z tvaru transformačních rovnic, které převádějí danou kvadratickou formu na normální tvar. ♢



Obrázek 13.3

Poznámka 13.2. V polární bázi kuželosečky k jsou libovolné dva různé základní body polárně sdružené vzhledem ke k. Tyto body tvoří takzvaný *polární trojúhelník* kuželosečky k. Pro regulární kuželosečku leží každá strana polárního trojúhelníka na poláře protějšího vrcholu (viz Obrázek 13.3). Pro singulární kuželosečku hodnosti dva je vždy jeden vrchol polárního trojúhelníka singulární bod kuželosečky a pro singulární kuželosečku hodnosti jedna jsou vždy dva vrcholy polárního trojúhelníka singulární body kuželosečky. ♢

Poznámka 13.3. Snadno se vidí, že kuželosečka určená rovnicí (Pk1) je regulární kuželosečka, která neobsahuje žádný reálný bod. Jedná se tedy o imaginární regulární kuželosečku. (Pk2) určuje reálnou regulární kuželosečku. (Pk3) a (Pk4) určují singulární kuželosečky hodnosti 2, které jsou tvořeny dvojicí tvořících přímek. Přitom pro (Pk3) jsou tyto přímky komplexně sdružené a pro (Pk4) reálné. (Pk3) obsahuje jediný reálný bod, a to průsečík komplexně sdružených tvořících přímek. (Pk5) je singulární kuželosečka hodnosti 1, která je tvořena jednou (reálnou) dvojnásobnou tvořící přímkou. ♢

Úloha 13.1. V dané geometrické bázi $\langle O_1, O_2, O_3, E\rangle$ je dána kuželosečka

$k : x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 = 0\,.$

Určete normovanou polární bázi kuželosečky k, normální tvar rovnice, typ kuželosečky (viz Poznámka 13.3) a transformační rovnice, které převádějí rovnici k na normální tvar.

Řešení: I. metoda:

Postupujeme podle důkazu Věty 13.3. Protože $O_1 = \langle \mathbf{e}_1\rangle$ neleží na k, zvolíme jej jako první základní bod O'_1 do nové báze. Určíme poláru o'_1 bodu O'_1, $o'_1 : x_1 + x_3 = 0$. Bod O'_2 vybíráme na o'_1. Zvolme $O'_2 = (1; 0; -1) \notin k$. Určíme poláru o'_2 bodu O'_2, $o'_2 : -2x_2 + x_3 = 0$. Poslední základní bod O'_3 musí být průsečík $o'_1 \cap o'_2$, tj. $O'_3 = (-2; 1; 2)$. V geometrické bázi $\langle O'_1, O'_2, O'_3, E'\rangle$, kde $E' = \langle \mathbf{e}'_1 + \mathbf{e}'_2 + \mathbf{e}'_3 = (0; 1; 1)\rangle$, bude mít kuželosečka kanonickou rovnici

$k : x_1'^2 - x_2'^2 + 3x_3'^2 = 0\,.$

Tuto polární bázi nyní znormujeme tak, že vyměníme nejdříve pořadí bodů O'_2 a O'_3 a změníme vektor, který určuje O'_3 na O'_3 $= \langle(-\frac{2}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{2}{\sqrt{3}})\rangle$. V geometrické bázi

$\langle O'_1, O'_3, O'_2, E''\rangle$, kde nový jednotkový bod $E'' = \langle \mathbf{e}'_1 + \mathbf{e}'_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{e}'_3 = (\frac{2\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}})\rangle$, bude mít kuželosečka normální rovnici

$k : x_1''^2 + x_2''^2 - x_3''^2 = 0\,.$

Kuželosečka je tedy reálná regulární. Ze souřadnicového vyjádření základních bodů poznáme tvar transformačních rovnic. Protože $O'_1 = \langle(1;0;0)\rangle$, $O'_3 = \langle(-\frac{2}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{2}{\sqrt{3}})\rangle$ a $O'_2 = \langle(1;0;-1)\rangle$ (pozor na pořadí bodů v bázi), jsou příslušné transformační rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1'' - \frac{2}{\sqrt{3}}x_2'' + x_3''\,,\\ x_2 &= \quad\; + \frac{1}{\sqrt{3}}x_2''\,,\\ x_3 &= \quad\; + \frac{2}{\sqrt{3}}x_2'' - x_3''\,. \end{aligned}$$

II. metoda:

Levou stranu rovnice kuželosečky v původní bázi upravíme na tvar

$x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 = (x_1 + x_3)^2 - x_3^2 - x_2^2 + 4x_2x_3 =$
$= (x_1 + x_3)^2 - (x_2 - 2x_3)^2 + 3x_3^2.$

Potom transformace souřadnic

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \quad\; + \;\; x_3\,,\\ x'_2 &= \quad\; + \;\; x_3\,,\\ x'_3 &= \quad\; + x_2 - 2x_3 \end{aligned}$$

převede rovnici k na kanonický tvar

$k : x_1'^2 + 3x_2'^2 - x_3'^2 = 0\,.$

Kanonickou rovnici znormujeme transformací

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1''\,,\\ x'_2 &= \quad\; + \frac{1}{\sqrt{3}}x_2''\,,\\ x'_3 &= \quad\; + x_3'' \end{aligned}$$

na konečný normální tvar

$k : x_1''^2 + x_2''^2 - x_3''^2 = 0\,.$

Složením dvou dílčích transformací souřadnic dostaneme celkové transformační rovnice

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1'' - \frac{1}{\sqrt{3}}x_2''\,,\\ x_2 &= \quad\; + \frac{2}{\sqrt{3}}x_2'' + x_3''\,,\\ x_3 &= \quad\; + \frac{1}{\sqrt{3}}x_2''\,. \end{aligned}$$

Z transformačních rovnic se potom určí odpovídající normovaná geometrická báze kuželosečky $O'_1 = \langle(1;0;0)\rangle$, $O'_2 = \langle(-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{2}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}})\rangle$, $O'_2 = \langle(0;1;0)\rangle$, $E' = \langle \mathbf{e}'_1 + \mathbf{e}'_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{e}'_3 = (\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}})\rangle$.

Poznámka 13.4. Všimněme si, že v předchozí úloze jsme dostali v obou metodách různé normované polární báze a různé transformační rovnice. Výsledný normální tvar rovnic kuželosečky je ale v obou metodách shodný.

14 Afinní vlastnosti kuželoseček

V této a další části uvažujeme $\mathcal{A}_2$ reálnou afinní rovinu, $\mathcal{A}_2^{\mathbb{C}}$ její komplexní rozšíření a $\overline{\mathcal{A}_2^{\mathbb{C}}}$ projektivní rozšíření $\mathcal{A}_2^{\mathbb{C}}$. Jako kuželosečku v $\mathcal{A}_2$ potom rozumíme kuželosečku v $\overline{\mathcal{A}_2^{\mathbb{C}}}$.

Uvažujme na $\mathcal{A}_2$ afinní souřadnou soustavu určenou afinním repérem

$$\langle O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\rangle\,. \tag{14.1}$$

V indukovaných afinních homogenních souřadnicích (x_1, x_2, x_3) má kuželosečka v $\mathcal{A}_2$ rovnici

$$k : \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j = 0\,, \tag{14.2}$$

$a_{ij} \in \mathbb{R}$, což píšeme maticově jako

$$k : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = 0$$

a zkráceně, při označení $(X) = \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$, pouze $(X)^T A(X) = 0$.

Při přechodu k nehomogenním souřadnicím pro vlastní body $[\bar{x}_1;\bar{x}_2]$, $\bar{x}_1 = \frac{x_1}{x_3}$, $\bar{x}_2 = \frac{x_2}{x_3}$, můžeme tuto rovnici přepsat do tvaru

$$k : \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\bar{x}_i\bar{x}_j + 2\sum_{i=1}^{2} a_{i3}\bar{x}_i + a_{33} = 0\,,$$

nebo, při obvyklejším označení nehomogenních souřadnic $X = [x;y]$,

$$k : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0\,. \tag{14.3}$$

Maticově, při označení matice nehomogenních souřadnic bodu X jako $(\bar{X}) = \begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}$,

$$k : \begin{pmatrix} x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} a_{13} & a_{23}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix} + a_{33} = 0\,, \tag{14.4}$$

což píšeme symbolicky, při označení matice $\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$, vektoru $(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}$ a konstanty $a = a_{33}$, maticově

$$k : (\bar{X})^T \bar{A}(\bar{X}) + 2(\mathbf{a})^T(\bar{X}) + a = 0\,. \tag{14.5}$$

Uvědomme si, že rovnice (14.4) a (14.5) určují pouze vlastní body kuželosečky. Pokud budeme pracovat s nevlastními body, musíme použít afinních homogenních souřadnic a rovnici kuželosečky (14.2).

Definice 14.1. Bod S se nazývá *střed* kuželosečky k, je-li vzhledem ke k polárně sdružen se všemi nevlastními body.

Poznámka 14.1. Každý singulární bod kuželosečky je jejím středem. Střed kuželosečky, který není jejím singulárním bodem, má za svou poláru nevlastní přímku. ♢

Věta 14.1. *Nechť má kuželosečka k v afinních homogenních souřadnicích vzhledem k afinnímu repéru (14.1) rovnici $k : (X)^T A(X) = 0$. Bod $S = (s_1; s_2; s_3)$ je středem kuželosečky k právě tehdy, když platí*

$$\begin{aligned} a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + a_{13}s_3 &= 0\,, \\ a_{12}s_1 + a_{22}s_2 + a_{23}s_3 &= 0\,, \end{aligned} \tag{14.6}$$

tj. $F_1(\mathbf{s}) = 0$, $F_2(\mathbf{s}) = 0$.

Důkaz. Nechť S je středem k, tj. S je polárně sdružen se všemi nevlastními body. Označme $O_i = \langle \mathbf{e}_i \rangle$ nevlastní bod, který je určen i–tým směrovým vektorem afinního repéru. Potom afinní homogenní souřadnice O_i mají na i-tém místě jedničku a jinak nuly, $i = 1, 2$. Podmínka, že S a O_i jsou polárně sdruženy, je $(S)^T A(O_i) = 0$, což je v souřadnicích ekvivalentní rovnici

$$a_{i1}s_1 + a_{i2}s_2 + a_{i3}s_3 = 0\,.$$

Naopak, nechť afinní homogenní souřadnice S splňují soustavu (14.6). Je-li navíc $F_3(\mathbf{s}) = a_{31}s_1 + a_{32}s_2 + a_{33}s_3 = 0$, je S singulárním bodem k (viz Věta 12.4), a tedy středem. Je-li $F_3(\mathbf{s}) \neq 0$, je polára bodu S dána obecnou rovnicí $F_3(\mathbf{s})x_3 = 0$ (viz Poznámka 12.7), a to je rovnice nevlastní přímky. Tedy S je polárně sdružen se všemi nevlastními body a je středem k. □

Poznámka 14.2. Soustava (14.6) má v homogenních souřadnicích vždy nenulové řešení. Podle hodnosti soustavy (14.6) může mít kuželosečka právě jeden reálný střed, reálnou přímku středů, nebo každý bod roviny je středem. Poslední možnost nastává pouze tehdy, když jediný nenulový koeficient matice kuželosečky je a_{33}, tj. pouze tehdy, je–li kuželosečka tvořena dvojnásobnou nevlastní přímkou.

Přepsáním soustavy (14.6) do nehomogenních souřadnic dostaneme soustavu pro výpočet vlastních středů kuželosečky k

$$\begin{aligned} a_{11}\bar{s}_1 + a_{12}\bar{s}_2 + a_{13} &= 0\,, \\ a_{12}\bar{s}_1 + a_{22}\bar{s}_2 + a_{23} &= 0\,, \end{aligned} \tag{14.7}$$

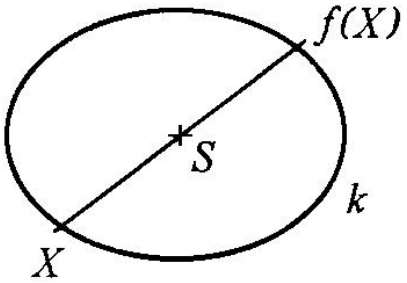
kterou maticově zapisujeme $\bar{A}(\bar{S}) + (\mathbf{a}) = (\mathbf{o})$. Nehomogenní soustava (14.7) nemusí mít řešení, tj. kuželosečka k nemusí mít vlastní střed. ♢

Definice 14.2. Kuželosečka, která má alespoň jeden vlastní střed, se nazývá *středová kuželosečka*. Kuželosečka, která nemá vlastní střed, se nazývá *nestředová kuželosečka*.

Geometrické vlastnosti středových kuželoseček objasňuje následující Věta 14.2.

Věta 14.2. *Středová kuželosečka je středově symetrická podle každého vlastního středu.*

Důkaz. Nechť S je vlastním středem kuželosečky k určené rovnicí (14.7), tj. $(\bar{S})$ splňuje rovnici $\bar{A}(\bar{S})+(\mathbf{a}) = (\mathbf{o})$. Středová symetrie podle bodu $\bar{S}$ má maticové vyjádření $(\overline{f(X)}) = -(\bar{X}) + 2(\bar{S})$. Dosadíme-li $(\overline{f(X)})$ do levé strany (14.5), dostaneme $(\bar{X})^T\bar{A}(\bar{X}) + 2(\mathbf{a})^T(\bar{X}) + a - 4[(\bar{S})^T\bar{A} \ + (\mathbf{a})^T](\bar{X}) + 4[(\bar{S})^T\bar{A} + (\mathbf{a})^T](\bar{S})$. Snadno se vidí, že tento výraz je roven nule pro každé $(\bar{X})$ splňující (14.5) a $(\bar{S})$ splňující podmínku pro vlastní střed k. □



Obrázek 14.1

Definice 14.3. Nechť $k : F^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = 0$ je kuželosečka a Q je nevlastní bod, který není bodem kuželosečky k. Poláru bodu Q budeme nazývat *průměrem* kuželosečky k.

Věta 14.3. *Je–li přímka p průměrem kuželosečky k, pak obsahuje všechny středy kuželosečky k.*

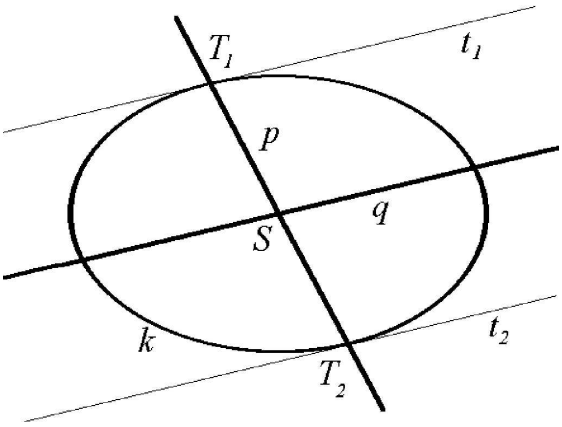
Důkaz. Tato věta je přímým důsledkem Věty 12.7 a definice středu kuželosečky. □

Definice 14.4. Říkáme, že dva směry určené vektory **u**, **v** jsou *polárně sdruženy* vzhledem ke kuželosečce k, jsou-li vzhledem ke k polárně sdruženy nevlastní body určené těmito směry.

Dva průměry, jejichž zaměření jsou polárně sdružena vzhledem ke kuželosečce k, se nazývají *sdružené průměry* kuželosečky k.

Poznámka 14.3. Z Věty 12.7 vyplývá, jaký je geometrický význam polárně sdružených průměrů pro regulární kuželosečky.

Sestrojíme–li tečny v průsečících jednoho průměru s kuželosečkou, jsou tyto tečny rovnoběžné se sdruženým průměrem. Jedná se vlastně o speciální případ popsaný v Poznámce 12.9, kdy pól P přímky p je nevlastním bodem průměru q. Obrázek 14.2 je potom speciálním případem zobrazeným na Obrázku 12.1. Obecně platí, že kuželosečka je šikmo symetrická podle svého reálného průměru ve směru polárně sdruženého průměru. Důkaz tohoto tvrzení ponecháme na čtenáři jako cvičení. ♢



Obrázek 14.2

Definice 14.5. Tečnu v nevlastním regulárním bodě kuželosečky k nazýváme *asymptotou* kuželosečky k.

Věta 14.4. *Každá regulární kuželosečka má nejvýše dvě asymptoty.*

Důkaz. Protože nevlastní přímka není tvořící přímkou kuželosečky, obsahuje kuželosečka buď dva nevlastní komplexně sdružené body, nebo dva nevlastní reálné různé body, nebo jeden nevlastní dvojnásobný reálný bod (viz Věta 12.8). V prvním případě má kuželosečka dvě komplexně sdružené asymptoty, ve druhém dvě reálné různé asymptoty a ve třetím jednu asymptotu, která je nevlastní přímkou. □

Věta 14.5. *Nechť k je kuželosečka, která neobsahuje nevlastní přímku jako svou tvořící přímku, a nechť vzhledem k nějakému afinnímu repéru má k rovnici* (14.4). *Potom*

(1) *kuželosečka k má dva různé reálné nevlastní body právě tehdy, když $|\bar{A}| < 0$,*

(2) *kuželosečka k má dva komplexně sdružené nevlastní body právě tehdy, když $|\bar{A}| > 0$,*

(3) *kuželosečka k má jeden dvojnásobný reálný nevlastní bod právě tehdy, když $|\bar{A}| = 0$.*

Důkaz. Jestliže nevlastní přímka není součástí kuželosečky k, je matice $\bar{A}$ nenulová (vzhledem k libovolnému afinnímu repéru (14.1)). Určit nevlastní body kuželosečky k znamená vyřešit v afinních homogenních souřadnicích soustavu rovnic danou rovnicí kuželosečky (14.2) a rovnicí nevlastní přímky $x_3 = 0$. Dostaneme rovnici

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0\,. \tag{14.8}$$

Je–li $a_{ii} = 0$, $i = 1, 2$, je $a_{12} \neq 0$ a $|\bar{A}| < 0$. Naše rovnice má potom dvě reálná řešení (1;0) a (0;1), tj. kuželosečka má dva nevlastní body (1;0;0) a (0;1;0).

Je–li $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2$, pro nějaké i, vydělíme rovnici (14.8) souřadnicí x_j, $i \neq j$, $j = 1, 2$. Pro $\frac{x_i}{x_j}$ dostaneme kvadratickou rovnici, jejíž diskriminant je $D = 4(a_{12}^2 - a_{11}a_{22}) = -4|\bar{A}|$. Odtud vyplývá tvrzení věty. □

Úloha 14.1. Určete středy kuželosečky k

a) $k : 3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$,

b) $k : x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$,

c) $k : x^2 + 6xy + 9y^2 + 4x + 12y - 5 = 0$.

Řešení: a) Matice kuželosečky je $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ a podle (14.7) je soustava pro výpočet vlastních středů

$$3\bar{s}_1 - \bar{s}_2 + 2 = 0\,,$$
$$-\bar{s}_1 + 3\bar{s}_2 + 2 = 0\,.$$

Tato soustava má jediné řešení $\bar{s}_1 = -1$, $\bar{s}_2 = -1$ a kuželosečka má jediný vlastní střed $S = [-1; -1]$.

b) Soustava pro výpočet vlastních středů je

$$\bar{s}_1 - \bar{s}_2 - 2 = 0\,,$$
$$-\bar{s}_1 + \bar{s}_2 - 3 = 0\,.$$

Tato soustava nemá řešení, kuželosečka tedy nemá vlastní střed. Soustavu převedeme do homogenních souřadnic

$$s_1 - s_2 - 2s_3 = 0\,,$$
$$-s_1 + s_2 - 3s_3 = 0\,.$$

Tato soustava má jednodimenzionální podprostor řešení generovaný vektorem (1;1;0). Kuželosečka má tedy jeden nevlastní střed ve směru vektoru (1;1).

c) Soustava pro výpočet vlastních středů je

$$\bar{s}_1 + 3\bar{s}_2 + 2 = 0\,,$$
$$3\bar{s}_1 + 9\bar{s}_2 + 6 = 0\,.$$

Tato soustava má hodnost jedna a určuje přímku o obecné rovnici $x + 3y + 2 = 0$, která je přímkou středů dané kuželosečky.

Úloha 14.2. Určete dvojici sdružených průměrů kuželosečky

$k : 3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0,$

z nichž jeden prochází bodem $A = [1; -2]$.

Řešení: Určíme střed S kuželosečky k, $S = [-1; -1]$. Přímka $p \equiv AS$ je průměrem kuželosečky, který prochází bodem A; $p : x + 2y + 3 = 0$. Nevlastní bod Q přímky p (určený směrovým vektorem přímky p) je $Q = (2; -1; 0)$. Polára q bodu Q je průměrem sdruženým s průměrem p; $q : 7x - 5y + 2 = 0$.

Úloha 14.3. Určete nevlastní body a asymptoty kuželosečky

$k : 3x^2 + 2xy - y^2 + 8x + 10y + 14 = 0\,.$

Řešení: Určíme rovnici kuželosečky v afinních homogenních souřadnicích:

$k : 3x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 + 8x_1x_3 + 10x_2x_3 + 14x_3^2 = 0\,.$

Položíme $x_3 = 0$ a pro nevlastní body kuželosečky dostaneme rovnici

$3x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 = 0\,,$

kterou řešíme pro podíl souřadnic $\frac{x_1}{x_2}$. Dostaneme $(\frac{x_1}{x_2})_1 = -1$ a $(\frac{x_1}{x_2})_2 = \frac{1}{3}$. Nevlastní body kuželosečky jsou body $A_1 = (-1; 1; 0)$ a $A_2 = (1; 3; 0)$. Asymptoty jsou potom poláry bodů A_1 a A_2, tj. $a_1 : 2x + 2y - 1 = 0$ a $a_2 : 6x - 2y + 19 = 0$.

15 Afinní klasifikace kuželoseček

Definice 15.1. Kuželosečku, která má s nevlastní přímkou společné právě dva komplexně sdružené body, budeme nazývat kuželosečkou *eliptického typu*. Kuželosečku, která má s nevlastní přímkou společné právě dva reálné různé body, budeme nazývat kuželosečkou *hyperbolického typu* a kuželosečku, která má s nevlastní přímkou společný právě jeden dvojnásobný bod, budeme nazývat kuželosečkou *parabolického typu*.

Regulární kuželosečku, která má s nevlastní přímkou společné právě dva komplexně sdružené body, budeme nazývat *elipsou*. Regulární kuželosečku, která má s nevlastní přímkou společné právě dva reálné různé body, budeme nazývat *hyperbolou* a regulární kuželosečku, která má s nevlastní přímkou společný právě jeden dvojnásobný bod, budeme nazývat *parabolou*.

Poznámka 15.1. Aplikujeme–li nyní Definici 15.1 na projektivní typy kuželoseček (viz Poznámka 13.3), dostaneme následující afinní typy kuželoseček:

Formálně reálná regulární kuželosečka nemá žádný reálný nevlastní bod a je to tedy elipsa, kterou budeme nazývat *imaginární elipsou*.

Reálná regulární kuželosečka se nyní rozdělí na tři typy podle počtu a druhu nevlastních bodů. Bude to (reálná) *elipsa, hyperbola a parabola*. Elipsa a hyperbola jsou kuželosečky středové, zatímco parabola je nestředová. Hyperbola má dvě reálné asymptoty. Asymptoty elipsy jsou komplexně sdružené přímky a parabola má jednu

nevlastní asymptotu. Reálná elipsa, hyperbola a parabola se tedy liší pouze tím, že elipsa neprotíná reálně nevlastní přímku, hyperbola ji reálně protíná ve dvojici různých bodů a parabola se nevlastní přímky dotýká.

U kuželosečky, která je složena ze dvou reálných různých přímek, mohou nastat tři případy. Buď je jedna z tvořících přímek nevlastní (takovou kuželosečku nelze zadat v nehomogenních souřadnicích), nebo jsou obě tvořící přímky vlastní. V tomto případě může být jejich společný bod vlastní (různoběžné přímky – kuželosečka hyperbolického typu), nebo nevlastní (rovnoběžky – kuželosečka parabolického typu).

U kuželosečky, která je složena ze dvou komplexně sdružených přímek, rozlišujeme dvě možnosti. Společný reálný bod těchto dvou přímek je buď vlastní (komplexně sdružené různoběžky – kuželosečka eliptického typu), nebo nevlastní (komplexně sdružené rovnoběžky – kuželosečka parabolického typu).

Kuželosečka, která je tvořena jedinou dvojnásobnou tvořící přímkou, je buď nevlastní (nedá se v nehomogenních souřadnicích vyjádřit), nebo vlastní (kuželosečka parabolického typu). ♢

Věta 15.1. *Nechť kuželosečka k, která neobsahuje nevlastní přímku jako svou tvořící přímku, je v nějaké afinní souřadné soustavě zadána rovnicí* (14.2). *Pak k je*

(1) *imaginární elipsou, právě když $|A| \neq 0$, $|\bar{A}| > 0$ a na k neexistují reálné body,*

(2) *(reálnou) elipsou, právě když $|A| \neq 0$, $|\bar{A}| > 0$ a na k existují reálné body,*

(3) *hyperbolou, právě když $|A| \neq 0$ a $|\bar{A}| < 0$,*

(4) *parabolou, právě když $|A| \neq 0$ a $|\bar{A}| = 0$.*

Důkaz. Podmínka, že kuželosečka je regulární je v souřadnicích ekvivalentní tomu, že diskriminant kuželosečky je nenulový, tj $|A| \neq 0$. Pro určení typu kuželosečky stačí zjistit počet a typ nevlastních bodů, které na kuželosečce leží. Věta 15.1 nyní vyplývá z Věty 14.5. Při $|\bar{A}| > 0$ musíme ještě navíc rozlišovat, zda se jedná o imaginární nebo reálnou elipsu. □

Věta 15.2. *Kuželosečka k, která neobsahuje nevlastní přímku jako svou tvořící přímku, je složena*

(1) *ze dvou reálných různoběžných přímek, právě když $h(A) = 2$ a $|\bar{A}| < 0$,*

(2) *ze dvou komplexně sdružených různoběžných přímek, právě když $h(A) = 2$ a $|\bar{A}| > 0$,*

(3) *ze dvou reálných rovnoběžných přímek, právě když $h(A) = 2$, $|\bar{A}| = 0$ a existují reálné body ležící na k,*

(4) *ze dvou komplexně sdružených rovnoběžných přímek, právě když $h(A) = 2$, $|\bar{A}| = 0$ a neexistují reálné vlastní body ležící na k,*

(5) *z jedné dvojnásobné přímky, právě když $h(A) = 1$.*

Důkaz. Tato věta vyplývá z Poznámky 15.1 a Věty 14.5. □

Poznámka 15.2. Z předchozích dvou vět vyplývá, že k určení typu kuželosečky, která neobsahuje jako svou tvořící přímku nevlastní přímku, stačí znát hodnost kuželosečky a znaménko determinantu matice $\bar{A}$. Jisté problémy nastanou pouze v případě elipsy a rovnoběžných přímek, kdy musíme ještě navíc rozlišit reálné a imaginární případy. ♢

Věta 15.3. *Ke každé kuželosečce k existuje nejméně jedna dvojice různých nevlastních bodů, které jsou vzhledem ke k polárně sdruženy.*

Důkaz. Nechť nejdříve k obsahuje nevlastní přímku jako svou tvořící přímku. Potom libovolná dvojice nevlastních bodů v obecné poloze splňuje podmínky věty.

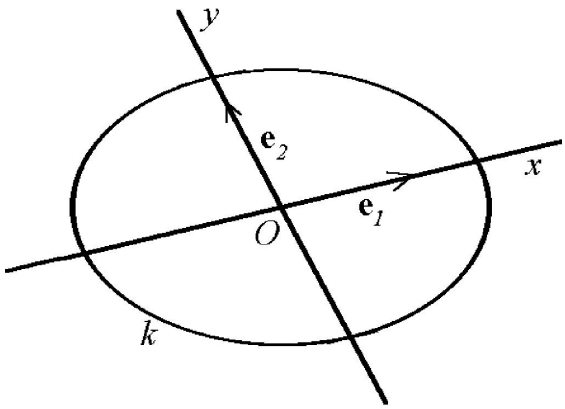
Nechť nyní nevlastní přímka není součástí k. Zvolme libovolný nevlastní bod O_1, který neleží na k, a označme o_1 jeho poláru. Označme O_2 nevlastní bod o_1. Potom O_1, O_2, $O_1 \neq O_2$, je dvojice nevlastních bodů v obecné poloze, které jsou polárně sdruženy vzhledem ke k. □

Věta 15.4. *Nechť $\langle O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ je takový afinní repér, že vektory $\mathbf{e}_1$ a $\mathbf{e}_2$ určují dva nevlastní body polárně sdružené vzhledem ke kuželosečce k. Potom vzhledem k tomuto afinnímu repéru je v rovnici kuželosečky k $a_{12} = 0$.*

Důkaz. V afinních homogenních souřadnicích je $O_1 = \langle \mathbf{e}_1 \rangle = (1; 0; 0)$ a $O_2 = \langle \mathbf{e}_2 \rangle = (0; 1; 0)$. Podmínka polární sdruženosti je $(O_1)^T A (O_2) = 0$, což je ekvivalentní $a_{12} = 0$. □

Věta 15.5. *Je-li počátek afinního repéru vlastním středem kuželosečky k, je v rovnici k vzhledem k tomuto afinnímu repéru $a_{13} = a_{23} = 0$.*

Důkaz. Nechť je počátek O afinního repéru vlastním středem kuželosečky k. V afinních homogenních souřadnicích je $O = (0; 0; 1)$. O je polárně sdružen se všemi nevlastními body, a tedy i s body $O_i = \langle \mathbf{e}_i \rangle$, $i = 1, 2$. Protože $O_1 = (1; 0; 0)$ a $O_2 = (0; 1; 0)$, dostaneme z podmínky $(O)^T A (O_i) = 0$ tvrzení Věty 15.5. □



Obrázek 15.1

Důsledek 15.1. Zvolíme–li nyní afinní repér tak, že počátek je středem kuželosečky a osy souřadné jsou sdružené průměry (viz Obrázek 15.1), má vzhledem k tomuto afinnímu repéru kuželosečka k kanonickou rovnici

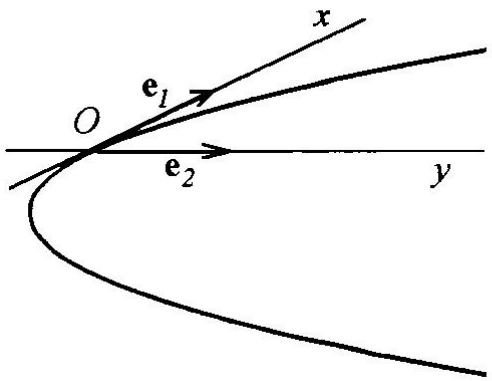
$$k : a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0. \tag{15.1}$$

Věta 15.6. *Jestliže regulární kuželosečka k nemá žádný vlastní střed, můžeme zvolit afinní repér $\langle O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\rangle$ tak, že O leží na kuželosečce, $\mathbf{e}_1$ je směrový vektor tečny ke k v bodě O a $\mathbf{e}_2$ je vektor určující nevlastní střed k. Potom vzhledem k tomuto afinnímu repéru má k homogenní rovnici tvaru*

$$x_1^2 + 2px_2x_3 = 0\,, \tag{15.2}$$

tj. nehomogenní rovnici

$$x^2 + 2py = 0\,. \tag{15.3}$$



Obrázek 15.2

Důkaz. Nechť je afinní repér zvolen podle Věty 15.6 (viz Obrázek 15.2). Protože $O \in k$, $O = (0;0;1)$, je $a_{33} = 0$. O je polárně sdružen s nevlastním bodem $O_1 = \langle \mathbf{e}_1\rangle$, protože O_1 je bodem tečny sestrojené v O. Odtud $a_{13} = 0$. Body O_1 a $O_2 = \langle \mathbf{e}_2\rangle$ jsou polárně sdruženy, protože O_2 je střed k. Odtud $a_{12} = 0$. Matice kuželosečky je tedy $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{23} & 0 \end{pmatrix}$. Podmínka, že kuželosečka nemá vlastní střed, je ekvivalentní tomu, že nehomogenní soustava rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x \qquad\quad &= 0\,, \\ a_{22}y + a_{23} &= 0 \end{aligned}$$

nemá řešení, a to je možné právě tehdy, když $a_{22} = 0$, $a_{11} \neq 0 \neq a_{23}$. Celkově tedy $k : a_{11}x^2 + 2a_{23}y = 0$ a vydělením rovnice koeficientem a_{11} při označení $p = \frac{a_{23}}{a_{11}}$ dostaneme tvrzení Věty 15.6. □

Definice 15.2. Rovnici (15.1) nebo (15.2) kuželosečky k budeme nazývat *afinní kanonickou rovnicí*. Afinní repér, vzhledem ke kterému má kuželosečka k kanonickou rovnici, budeme nazývat *polární afinní repér* kuželosečky k.

Věta 15.7. (Afinní klasifikace kuželoseček) *Ke každé kuželosečce k existuje takový afinní repér, že vzhledem k němu má k jednu z následujících rovnic:*

(homogenní souřadnice)	*(nehomogenní souřadnice)*	
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0\,,$	$x^2 + y^2 + 1 = 0\,,$	(Ak1)
$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0\,,$	$x^2 + y^2 - 1 = 0\,,$	(Ak2)
$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0\,,$	$x^2 - y^2 - 1 = 0\,,$	(Ak3)
$x_1^2 + 2x_2x_3 = 0\,,$	$x^2 + 2y = 0\,,$	(Ak4)
$x_1^2 + x_2^2 = 0\,,$	$x^2 + y^2 = 0\,,$	(Ak5)
$x_1^2 - x_2^2 = 0\,,$	$x^2 - y^2 = 0\,,$	(Ak6)
$x_1^2 + x_3^2 = 0\,,$	$x^2 + 1 = 0\,,$	(Ak7)
$x_1^2 - x_3^2 = 0\,,$	$x^2 - 1 = 0\,,$	(Ak8)
$x_1x_3 = 0\,,$	*nelze vyjádřit,*	(Ak9)
$x_1^2 = 0\,,$	$x^2 = 0\,,$	(Ak10)
$x_3^2 = 0\,,$	*nelze vyjádřit.*	(Ak11)

Důkaz. Nechť je nejdříve kuželosečka k středová. Podle Důsledku 15.1 můžeme zvolit afinní repér (14.1) tak, že vzhledem k němu má k rovnici $a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2 = 0$. Je–li $a_{33} \neq 0$, vydělíme tuto rovnici k číslem $|a_{33}|$ a výslednou rovnici znormujeme vhodnou volbou násobků směrových vektorů, konkrétně pro nenulový koeficient a_{ii} volíme $\mathbf{u}_i = \sqrt{\frac{|a_{33}|}{|a_{ii}|}}\,\mathbf{e}_i$ a v afinním repéru, kde směrové vektory jsou vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$, jsou v rovnici k jako koeficienty pouze 0, 1 nebo -1. Případnou výměnou souřadných směrů nebo vynásobením -1 dostaneme jednu z rovnic (Ak1) – (Ak3), (Ak7) – (Ak8) nebo (Ak11).

Je–li $a_{33} = 0$, normujeme výše popsaným způsobem rovnici přímo a dostaneme (Ak5) – (Ak6) nebo (Ak10).

Pro regulární nestředovou kuželosečku můžeme podle Věty 15.6 zvolit afinní repér tak, že v něm má k rovnici $x^2 + 2py = 0$, $p \neq 0 \in \mathbb{R}$. Vyměníme–li vektor $\mathbf{e}_2$ jeho $\frac{1}{p}$ násobkem, dostaneme v novém afinním repéru rovnici k ve tvaru (Ak4).

Obsahuje–li k jako svou tvořící přímku nevlastní přímku a je hodnosti 2, můžeme zvolit afinní repér tak, že vlastní tvořící přímka je druhá souřadná osa, potom má k homogenní rovnici (Ak9).

Je–li k tvořena dvojnásobnou nevlastní přímkou, má v libovolném afinním repéru rovnici (Ak11). □

Definice 15.3. Rovnici kuželosečky k z Věty 15.7 budeme nazývat *afinní normální rovnicí*. Afinní repér, vzhledem ke kterému má kuželosečka k normální rovnici, budeme nazývat *normovaný polární afinní repér* kuželosečky k.

Poznámka 15.3. Snadno se vidí, že kuželosečka (Ak1) je imaginární elipsa, (Ak2) je reálná elipsa, (Ak3) je hyperbola, (Ak4) parabola, (Ak5) je dvojice komplexně sdružených tvořících různoběžných přímek, (Ak6) je dvojice reálných různoběžných přímek, (Ak7) je dvojice komplexně sdružených rovnoběžných přímek, (Ak8) je dvojice reálných rovnoběžných přímek, (Ak9) je tvořena jednou vlastní a jednou nevlastní tvořící přímkou, (Ak10) je dvojnásobná vlastní tvořící přímka a (Ak11) je dvojnásobná nevlastní tvořící přímka. ♢

Poznámka 15.4. V praxi je kuželosečka většinou zadána svou rovnicí v nehomogenních souřadnicích. Pro určení normální rovnice máme dvě metody. První je založena na hledání normovaného polárního afinního repéru kuželosečky tak, jak je to popsáno ve Větách 15.4 – 15.6. Transformační rovnice přechodu k polárnímu repéru potom převedou rovnici kuželosečky na jeden z tvarů Věty 15.7. Druhá metoda je založena na postupné úpravě rovnice kuželosečky. V afinních nehomogenních souřadnicích je levá strana rovnice kuželosečky součtem kvadratické části (s maticí $\bar{A}$), lineární části a konstanty. Nejdříve převedeme kvadratickou část do kanonického tvaru postupem popsaným v Části 5. To odpovídá přechodu k afinnímu repéru, kde počátek se nemění a směry souřadné jsou polárně sdružené vzhledem ke kuželosečce. Potom odstraníme lineární členy (pokud to lze) přechodem na druhou mocninu dvojčlenu. To odpovídá posunu počátku souřadného repéru. Nakonec výslednou kanonickou rovnici normujeme vhodným vynásobením směrových vektorů. Složením dílčích transformací dostaneme výslednou transformaci, která převádí rovnici kuželosečky do normálního tvaru (nebo jeho násobku) a z transformačních rovnic poznáme, jaký je normovaný polární afinní repér kuželosečky. Konkrétní způsob bude jasný z řešené Úlohy 15.2. ♢

Úloha 15.1. Určete afinní typ kuželosečky k (viz Poznámka 15.1)

a) $k : 3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$,

b) $k : x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$,

c) $k : x^2 + 2xy + y^2 - x - y = 0$.

Řešení: a) Determinant matice kuželosečky je $|A| = -64 \neq 0$. Kuželosečka je tedy regulární. Determinant $|\bar{A}| = 8 > 0$ a podle Věty 15.1 se jedná o elipsu. Protože např. reálný bod [-2;0] splňuje rovnici kuželosečky, je elipsa reálná.

b) Determinant matice kuželosečky je $|A| = -25 \neq 0$. Kuželosečka je tedy regulární. Determinant $|\bar{A}| = 0$ a podle Věty 15.1 se jedná o parabolu.

b) Determinant matice kuželosečky je $|A| = 0$. Kuželosečka je tedy singulární a její hodnost je $h(A) = 2$. Determinant $|\bar{A}| = 0$ a podle Věty 15.2 se jedná o dvojici rovnoběžných přímek. Protože [0;0] leží na k, jsou to reálné rovnoběžky.

Úloha 15.2. Pomocí afinních transformací souřadnic určete normální tvar rovnic kuželoseček z Úlohy 15.1

Řešení: I. metoda (hledání polárního afinního repéru, viz Věty 15.4 – 15.6):

a) Kuželosečka má vlastní střed $S = [-1; -1]$. Směry určené vektory $\mathbf{e}_1 = (1; 0)$ a $\mathbf{e}_2 = (1; 3)$ jsou polárně sdružené vzhledem ke k. Transformační rovnice přechodu k novému afinnímu repéru $\langle S; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ jsou

$$\begin{aligned} x &= x' + y' - 1\,, \\ y &= \quad 3y' - 1\,. \end{aligned}$$

Jejich dosazením do rovnice kuželosečky dostaneme kanonický tvar rovnice

$k : 3x'^2 + 24y'^2 - 8 = 0\,.$

Tuto rovnici nejdříve vydělíme 8 a transformací $x' = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x''$, $y' = \frac{1}{\sqrt{3}}y''$ ji převedeme na normální tvar

$k : (x'')^2 + (y'')^2 - 1 = 0\,.$

Složením dílčích transformací souřadnic dostaneme výslednou transformaci ve tvaru

$$\begin{aligned} x &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x'' + \frac{1}{\sqrt{3}}y'' - 1\,, \\ y &= \qquad\quad \frac{3}{\sqrt{3}}y'' - 1\,, \end{aligned}$$

která převede rovnici kuželosečky do násobku normálního tvaru. Odpovídající normovaný polární afinní repér je tvořen bodem $S = [-1; -1]$ a vektory $\mathbf{e}'_1 = (\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}; 0)$, $\mathbf{e}'_2 = (\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{3}{\sqrt{3}})$.

b) Kuželosečka nemá vlastní střed. Nevlastní střed je určen směrem $\mathbf{e}_2 = (1; 1)$. Jako počátek zvolíme libovolný bod kuželosečky, např. bod $O = [3; 0]$. Tečna v tomto bodě má rovnici $o : x - 6y - 3 = 0$ a její směrový vektor je $\mathbf{e}_1 = (6; 1)$. Transformační rovnice přechodu k repéru $\langle O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ jsou tedy

$$\begin{aligned} x &= 6x' + y' + 3\,, \\ y &= \quad x' + y'\,. \end{aligned}$$

Jejich dosazením do rovnice kuželosečky dostaneme kanonický tvar rovnice

$k : 25x'^2 - 10y' = 0\,.$

Tuto rovnici nejdříve vydělíme 25 a transformací $x' = x''$, $y' = 5y''$ ji převedeme na normální tvar

$k : (x'')^2 - 2y'' = 0\,.$

Složením dílčích transformací souřadnic dostaneme výslednou transformaci ve tvaru

$$\begin{aligned} x &= 6x'' + 5y'' + 3\,, \\ y &= \quad x'' + 5y''\,, \end{aligned}$$

která převede rovnici kuželosečky do násobku normálního tvaru. Odpovídající normovaný polární afinní repér je tvořen bodem $O = [3; 0]$ a vektory $\mathbf{e}'_1 = (6; 1)$, $\mathbf{e}'_2 = (5; 5)$.

c) Kuželosečka má vlastní přímku středů $2x + 2y - 1 = 0$. Zvolíme za počátek libovolný z nich, např. $S = [1/2; 0]$. Směry určené vektory $\mathbf{e}_1 = (1; 0)$ a $\mathbf{e}_2 = (1; -1)$ jsou polárně sdružené vzhledem ke k. Transformační rovnice přechodu k novému afinnímu repéru $\langle S; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ jsou

$$\begin{aligned} x &= x' + y' + \frac{1}{2}\,, \\ y &= \quad -y'\,. \end{aligned}$$

Jejich dosazením do rovnice kuželosečky dostaneme kanonický tvar rovnic

$k : x'^2 - \frac{1}{4} = 0\,.$

Tuto rovnici nejdříve vynásobíme 4 a transformací $x' = \frac{1}{2}x''$, $y' = y''$ ji převedeme na normální tvar

$k : (x'')^2 - 1 = 0\,.$

Složením dílčích transformací souřadnic dostaneme výslednou transformaci ve tvaru

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}x'' + y'' + \frac{1}{2}\,, \\ y &= \quad\quad -y''\,, \end{aligned}$$

která převede rovnici kuželosečky do násobku normálního tvaru. Odpovídající normovaný polární afinní repér je tvořen bodem $S = [\frac{1}{2}; 0]$ a vektory $\mathbf{e}'_1 = (\frac{1}{2}; 0)$, $\mathbf{e}'_2 = (1; -1)$.

II. metoda (úprava rovnic):

a) Rovnici kuželosečky upravíme na tvar

$k : 3(x - \frac{1}{3}y)^2 + \frac{8}{3}y^2 + 4x + 4y - 4 = 0\,.$

Potom transformace

$$\begin{aligned} x &= x' + \frac{1}{3}y'\,, \\ y &= \quad\quad y' \end{aligned}$$

převede rovnici kuželosečky na tvar

$k : 3x'^2 + \frac{8}{3}y'^2 + 4x' + \frac{16}{3}y' - 4 = 0\ .$

Tuto rovnici upravíme na tvar

$k : 3(x' + \frac{2}{3})^2 + \frac{8}{3}(y' + 1)^2 - 8 = 0\ .$

Transformace

$$\begin{aligned} x' &= x'' \quad - \frac{2}{3}\,, \\ y' &= \quad y'' - 1 \end{aligned}$$

převede rovnici kuželosečky do kanonického tvaru

$k : 3(x'')^2 + \frac{8}{3}(y'')^2 - 8 = 0$,
který nejdříve vydělíme 8 a transformací

$$\begin{aligned} x'' &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\bar{x}\,, \\ y'' &= \qquad\quad \sqrt{3}\bar{y} \end{aligned}$$

převedeme do konečného normálního tvaru
$k : \bar{x}^2 + \bar{y}^2 - 1 = 0$.
Složením postupných transformací dostaneme výslednou transformaci souřadnic

$$\begin{aligned} x &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\bar{x} + \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{y} - 1\,, \\ y &= \qquad\quad \sqrt{3}\bar{y} - 1\,, \end{aligned}$$

která převádí rovnici kuželosečky do násobku normálního tvaru. Z transformačních rovnic vidíme, že příslušný normovaný polární afinní repér má počátek $S = [-1; -1]$ a směrové vektory $\mathbf{e}_1 = (\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}; 0)$, $\mathbf{e}_2 = (\frac{1}{\sqrt{3}}; \sqrt{3})$.

b) Rovnici kuželosečky upravíme na tvar
$k : (x - y)^2 - 4x - 6y + 3 = 0$.
Potom transformace

$$\begin{aligned} x &= x' + y'\,, \\ y &= \quad y' \end{aligned}$$

převede rovnici kuželosečky na tvar
$k : x'^2 - 4x' - 10y' + 3 = 0$.
Tuto rovnici upravíme na tvar
$k : (x' - 2)^2 - (10y' + 1) = 0$.
Transformace

$$\begin{aligned} x' &= x'' \qquad\quad + 2\,, \\ y' &= \quad \frac{1}{5}y'' - \frac{1}{10} \end{aligned}$$

převede rovnici kuželosečky do normálního tvaru
$k : (x'')^2 - 2y'' = 0$.
Složením postupných transformací dostaneme výslednou transformaci souřadnic

$$\begin{aligned} x &= x'' + \frac{1}{5}y'' - \frac{19}{10}\,, \\ y &= \quad \frac{1}{5}y'' - \frac{1}{10}\,, \end{aligned}$$

která převádí rovnici kuželosečky do normálního tvaru. Z transformačních rovnic vidíme, že příslušný normovaný polární afinní repér má počátek $S = [-\frac{19}{10}; -\frac{1}{10}]$ a směrové vektory $\mathbf{e}_1 = (1; 0)$, $\mathbf{e}_2 = (\frac{1}{5}; \frac{1}{5})$.

c) Rovnici kuželosečky upravíme na tvar

$k : (x + y)^2 - x - y = 0\,.$

Potom transformace

$$\begin{aligned} x &= x' - y'\,, \\ y &= \quad\ y' \end{aligned}$$

převede rovnici kuželosečky na tvar

$k : x'^2 - x' = 0\ .$

Tuto rovnici upravíme na tvar

$k : (x' - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} = 0\ .$

Transformace

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{2}x'' \quad + \frac{1}{2}\,, \\ y' &= \quad\ y'' \end{aligned}$$

převede rovnici kuželosečky do násobku normálního tvaru

$k : \frac{1}{4}(x'')^2 - \frac{1}{4} = 0\ .$

Složením postupných transformací dostaneme výslednou transformaci souřadnic

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}x'' - y'' + \frac{1}{2}\,, \\ y &= \quad\ y''\,, \end{aligned}$$

která převádí rovnici kuželosečky do násobku normálního tvaru. Z transformačních rovnic vidíme, že příslušný normovaný polární afinní repér má počátek $S = [\frac{1}{2}; 0]$ a směrové vektory $\mathbf{e}_1 = (\frac{1}{2}; 0)$, $\mathbf{e}_2 = (-1; 1)$.

16 Metrické vlastnosti kuželoseček

Ve zbytku této kapitoly uvažujeme $\mathcal{E}_2$ reálnou euklidovskou rovinu, $\mathcal{E}_2^{\mathbb{C}}$ její komplexní rozšíření a $\overline{\mathcal{E}_2^{\mathbb{C}}}$ projektivní rozšíření $\mathcal{E}_2^{\mathbb{C}}$. Jako kuželosečku v $\mathcal{E}_2$ potom rozumíme kuželosečku v $\overline{\mathcal{E}_2^{\mathbb{C}}}$.

Uvažujme na $\mathcal{E}_2$ kartézskou souřadnou soustavu určenou ortonormálním (kartézským) repérem

$$\langle O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle. \tag{16.1}$$

V indukovaných kartézských homogenních souřadnicích v $\mathcal{E}_2$ má kuželosečka k obvyklou rovnici

$$k : \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j = 0\,, \tag{16.2}$$

a v nehomogenních kartézských souřadnicích (při častějším označení nehomogenních souřadnic $X = [x; y]$) má kuželosečka k rovnici

$$k : \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_{33} = 0\,, \tag{16.3}$$

tj.

$$k : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0\,. \tag{16.4}$$

Maticově, při stejném označení jako v Části 14,

$$k : (\bar{X})^T \bar{A} (\bar{X}) + 2(\mathbf{a})^T (\bar{X}) + a = 0\,. \tag{16.5}$$

Úmluva. V praxi se setkáváme téměř výhradně s kuželosečkami, jejichž rovnice jsou zadány v nehomogenních souřadnicích. Takto se nedají bez dalšího upřesnění zadat kuželosečky, jejichž součástí je nevlastní přímka. Dále tedy budeme předpokládat, že žádná kuželosečka nemá za svou tvořící přímku nevlastní přímku. V souřadnicovém vyjádření to znamená, že matice $\bar{A}$ je nenulová.

Definice 16.1. Směr určený nenulovým reálným vektorem $\mathbf{u}$ se nazývá *hlavním směrem* kuželosečky k, je-li vzhledem ke k polárně sdružen s kolmým směrem.

Poznámka 16.1. Z Definice 16.1 vyplývá, že směr určující nevlastní singulární bod kuželosečky nebo nevlastní střed kuželosečky je hlavním směrem kuželosečky.

Věta 16.1. *Ke každé kuželosečce existují alespoň dva na sebe navzájem kolmé hlavní směry. Má–li kuželosečka k vzhledem k nějakému ortonormálnímu repéru souřadnicovou rovnici (16.5), jsou hlavní směry kuželosečky vlastními směry matice* $\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$, *tj. nenulový vektor* $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ *určuje hlavní směr kuželosečky k právě tehdy, když pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$ platí*

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)u_1 + a_{12}u_2 &= 0\,, \\ a_{12}u_1 + (a_{22} - \lambda)u_2 &= 0\,. \end{aligned} \tag{16.6}$$

Důkaz. 1. Nechť $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \neq \mathbf{o}$ určuje singulární nevlastní bod $P_\infty = \langle \mathbf{u} \rangle$ kuželosečky k. Potom $(F_1(\mathbf{u}), F_2(\mathbf{u})) = \mathbf{o} = 0\mathbf{u}$, což je soustava (16.6) pro $\lambda = 0$.

2. Nechť $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \neq \mathbf{o}$ je hlavní směr kuželosečky k a nevlastní bod $P_\infty = \langle \mathbf{u} \rangle$ není singulárním bodem k. Předpokládejme nejdříve, že P_∞ je nevlastním středem (který není singulárním bodem) kuželosečky. Potom polára bodu P_∞ je nevlastní přímka (viz Poznámka 14.1), tj. $(F_1(\mathbf{u}), F_2(\mathbf{u})) = \mathbf{o}$ a podobně jako pro singulární bod dostáváme, že $\mathbf{u}$ je řešením soustavy (16.6) pro $\lambda = 0$.

Nyní nechť $P_\infty = \langle \mathbf{u} \rangle$ není středem k. Potom vlastní polára bodu P_∞ má rovnici

$$p : F_1(\mathbf{u})x_1 + F_2(\mathbf{u})x_2 + F_3(\mathbf{u})x_3 = 0\,, \quad (F_1(\mathbf{u}), F_2(\mathbf{u})) \neq \mathbf{o}\,,$$

a vektor $\mathbf{u}$ je polárně sdružen se směrovým vektorem přímky p. Z předpokladu, že $\mathbf{u}$ určuje hlavní směr, vyplývá, že $\mathbf{u}$ je kolmý na p, a tedy nenulové vektory $(F_1(\mathbf{u}), F_2(\mathbf{u}))$ a $\mathbf{u}$ jsou lineárně závislé, tj. existuje $\lambda \neq 0$ takové, že $(F_1(\mathbf{u}), F_2(\mathbf{u})) = \lambda\mathbf{u}$, což je po rozepsání soustava

$$\begin{aligned} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 &= \lambda u_1\,, \\ a_{12}u_1 + a_{22}u_2 &= \lambda u_2\,, \end{aligned}$$

která je ekvivalentní soustavě (16.6).

Charakteristická rovnice soustavy (16.6) je

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = 0\,, \tag{16.7}$$

jejíž diskriminant je $D = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0$. To znamená, že charakteristická rovnice má vždy reálná řešení (to je obecná vlastnost všech symetrických matic, viz Věta 10.1).

Charakteristická rovnice má dvojnásobný nenulový kořen právě tehdy, když $a_{12} = 0$, a $a_{11} = a_{22} \neq 0$. Potom a_{11} je dvojnásobným kořenem a soustava (16.6) je splněna identicky, tj. každý směr je hlavním směrem kuželosečky a můžeme si mezi nimi vybrat libovolnou dvojici na sebe kolmých hlavních směrů.

Je–li $D > 0$, pak má charakteristická rovnice dvojici reálných různých kořenů λ_1 a λ_2. Označme jako $\mathbf{u}_i$ vlastní vektor, který odpovídá λ_i, tj. souřadnice $\mathbf{u}_i$ jsou řešením soustavy (16.6). Potom $\mathbf{u}_i = (-a_{12}; a_{11} - \lambda_i)$ a $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = a_{12}^2 + a_{11}^2 - a_{11}(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1\lambda_2$. Použitím kořenových vztahů pro kořeny charakteristické rovnice dostaneme $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = 0$, tj. $\mathbf{u}_1$ a $\mathbf{u}_2$ jsou na sebe kolmé. □

Poznámka 16.2. Z důkazu předchozí věty vyplývá, že směr, který určuje nevlastní střed, je i hlavním směrem, který odpovídá hlavnímu číslu $\lambda = 0$. Opravdu z (14.7) vyplývá, že kuželosečka má nevlastní střed právě tehdy, je–li $|\bar{A}| = 0$ a z tvaru charakteristické rovnice (16.7) pak vyplývá, že jedním hlavním číslem musí být 0. Z (14.6) a (16.6) pak vyplývá, že soustavy pro výpočet nevlastního středu a hlavního směru jsou totožné. ♢

V předchozí větě jsme použili souřadnicového vyjádření kuželosečky v nějakém kartézském repéru. Ukážeme si, že je důkaz nezávislý na zvoleném repéru. Zvolme jiný ortonormální repér $\langle O'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2 \rangle$ a označme $(X) = Q(X') + (O')$ maticový zápis transformace souřadnic při přechodu od prvního repéru k druhému. Bude–li vzhledem k novému repéru maticová rovnice kuželosečky

$$(\bar{X}')^T \bar{B}(\bar{X}') + 2(\mathbf{b})^T(\bar{X}') + b = 0,$$

dostaneme přímým dosazením $\bar{B} = Q^T \bar{A} Q$.

Věta 16.2. *Nechť je rovnice kuželosečky k vzhledem ke zvolenému ortonormálnímu repéru* (16.1) *dána* (16.5). *Potom $|\bar{A} - \lambda E_2|$ se nezmění při přechodu k novému ortonormálnímu repéru.*

Důkaz. Při přechodu k novému ortonormálnímu repéru je matice $\bar{B} = Q^T \bar{A} Q$, kde Q je matice přechodu. Protože Q je ortonormální matice, je podle Věty 10.4 $|\bar{B} - \lambda E_2| = |\bar{A} - \lambda E_2|$. □

Rovnice $|\bar{A} - \lambda E_2| = 0$ je tedy nezávislá na zvoleném ortonormálním repéru a budeme ji nazývat *charakteristická rovnice* kuželosečky k. Podobně také její kořeny λ_1 a λ_2 jsou na zvoleném kartézském repéru nezávislé a budeme je nazývat *hlavní čísla* kuželosečky k.

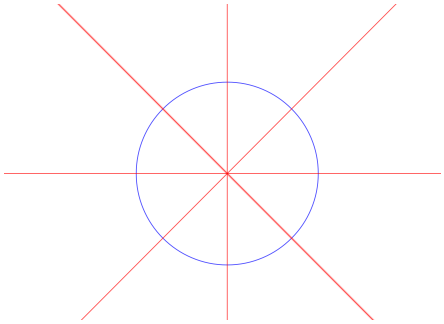
Definice 16.2. Je-li P nevlastní nesingulární bod určený hlavním směrem kuželosečky k, pak poláru bodu P, pokud je to vlastní přímka, nazýváme *osou* kuželosečky k. Je–li nevlastní bod hlavního směru kuželosečky nevlastním singulárním bodem kuželosečky, pak definujeme jako osu kuželosečky libovolnou vlastní přímku, která je kolmá na tento hlavní směr.

Vlastní průsečík kuželosečky s její osou se nazývá *vrchol kuželosečky*.

Poznámka 16.3. Kuželosečka je osově (kolmo) symetrická podle každé své osy. Toto tvrzení je důsledkem šikmé symetrie kuželosečky podle svého průměru ve směru polárně sdruženého průměru (viz Poznámka 14.3). ♢

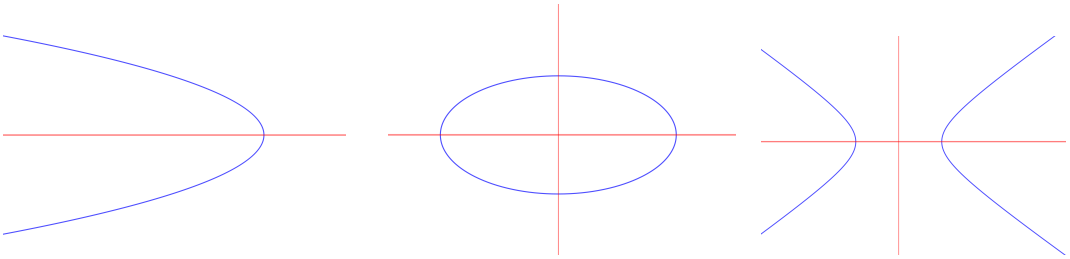
Poznámka 16.4. V případě, že každý směr je hlavním směrem kuželosečky, má kuželosečka nekonečně mnoho os. V tomto případě má kuželosečka právě jeden vlastní střed. To vyplývá z toho, že charakteristická rovnice má dvojnásobný nenulový kořen, tj. $|\bar{A}| \neq 0$, a tedy soustava (14.7) pro výpočet vlastních středů má právě jedno řešení. Potom každá reálná přímka procházející středem je osou symetrie kuželosečky, která má tedy nekonečně mnoho os symetrie. Takovéto kuželosečky budeme nazývat *zobecněné kružnice* a v následující Části 17 uvidíme, které kuželosečky to jsou. Na Obrázku 16.1 je nakresleno několik os pro reálnou kružnici. Na tomto a dalších obrázcích je kuželosečka vykreslena modře a její osy červeně.

Z definice osy kuželosečky vyplývá, že každá osa, která je polárou nesingulárního nevlastního bodu (který není nevlastním středem kuželosečky), obsahuje všechny středy kuželosečky.



Obrázek 16.1: Osy kružnice

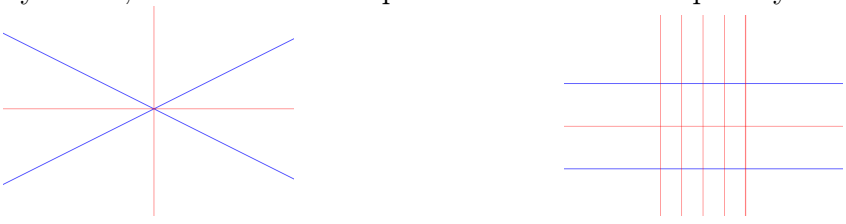
Regulární kuželosečka, která není zobecněnou kružnicí, může mít jednu osu (nevlastní přímka se dotýká kuželosečky – jde o parabolu), nebo dvě osy. Tato situace je zakreslena na Obrázku 16.2 pro parabolu (jedna osa), reálnou elipsu a hyperbolu (dvě osy).



Obrázek 16.2: Osy paraboly, reálné elipsy a hyperboly

Singulární kuželosečka, která má právě jeden vlastní střed (dvojice různoběžných přímek reálných nebo komplexně sdružených), má vždy dvě osy, viz Obrázek 16.3 pro reálné různoběžné přímky.

V případě, že má kuželosečka přímku vlastních středů (dvojice rovnoběžných přímek nebo dvojnásobná přímka), je jedna osa přímka středů a další osy jsou libovolné kolmice na přímku středů. V tomto případě má tedy kuželosečka také nekonečně mnoho os symetrie, viz Obrázek 16.3 pro reálné rovnoběžné přímky. ♢



Obrázek 16.3: Osy různoběžných a rovnoběžných reálných přímek

Poznámka 16.5. Pokud není osa součástí kuželosečky (dvojnásobná vlastní přímka), leží na každé ose nejvýše dva vrcholy, které mohou být reálné různé, komplexně

sdružené, nebo mohou splývat do jediného bodu (různoběžné přímky). V některých případech jsou průsečíky osy a kuželosečky nevlastní body, které za vrcholy nepočítáme. U paraboly je to jednonásobný nevlastní průsečík, u rovnoběžných přímek protíná osa, která je tvořena přímkou středů, nevlastní přímku v dvojnásobném singulárním bodě. ♢

Úloha 16.1. Určete charakteristickou rovnici, hlavní čísla a hlavní směry kuželosečky

$k : 4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0\,.$

Řešení: Matice $\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ a její charakteristická rovnice $|\bar{A} - \lambda E| = 0$ je $\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$, tj. $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$. Hlavní čísla jsou kořeny charakteristické rovnice, tj. $\lambda_1 = -1$ a $\lambda_2 = 4$. Hlavní směr určený kořenem $\lambda_1 = -1$ je určen vektorem, jehož souřadnice jsou řešením soustavy rovnic (viz (16.6))

$$\begin{aligned} u_1 + 2u_2 &= 0\,, \\ 2u_1 + 4u_2 &= 0\,, \end{aligned}$$

tj. hlavní směr odpovídající hlavnímu číslu $\lambda_1 = -1$ je určen vektorem $\mathbf{u}_1 = (-2; 1)$. Podobně pro hlavní směry určené hlavním číslem $\lambda_2 = 4$ dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} -4u_1 + 2u_2 &= 0\,, \\ 2u_1 - u_2 &= 0\,, \end{aligned}$$

tj. hlavní směr odpovídající hlavnímu číslu $\lambda_2 = 4$ je určen vektorem $\mathbf{u}_2 = (1; 2)$.

Úloha 16.2. Určete osy a vrcholy kuželosečky z Úlohy 16.1.

Řešení: Osy kuželosečky jsou poláry nevlastních bodů hlavních směrů. Pro hlavní směr $\mathbf{u}_1 = (-2; 1)$ tak dostaneme osu

$o_1 : 2x - y - 10 = 0\,,$

a pro hlavní směr $\mathbf{u}_2 = (1; 2)$ tak dostaneme osu

$o_2 : x + 2y + 5 = 0\,.$

Vrcholy kuželosečky jsou její průsečíky s osami. Z rovnice osy o_1 vyjádříme $y = 2x - 10$ a dosadíme do rovnice kuželosečky. Dostaneme kvadratickou rovnici

$5x^2 - 30x + 36 = 0\,,$

ze které vyplývá, že na ose o_1 leží reálné vrcholy $A = [3 + \frac{3}{\sqrt{5}}; -4 + \frac{6}{\sqrt{5}}]$ a $B = [3 - \frac{3}{\sqrt{5}}; -4 - \frac{6}{\sqrt{5}}]$.

Podobně pro osu o_2 dostaneme kvadratickou rovnici

$5y^2 + 40x + 116 = 0\,,$

ze které vyplývá, že na ose o_2 leží komplexně sdružené vrcholy
$C = [3 - \frac{12i}{\sqrt{5}}; -4 + \frac{6i}{\sqrt{5}}]$ a $\overline{C} = [3 + \frac{12i}{\sqrt{5}}; -4 - \frac{6i}{\sqrt{5}}]$.

17 Metrická klasifikace kuželoseček

Afinní vlastnosti a klasifikace kuželoseček zůstávají zachovány i v euklidovské rovině. Při převodu rovnic kuželoseček do jednoduššího kanonického tvaru, ze kterého se nejlépe pozná, o jakou kuželosečku se jedná, nemůžeme provést poslední krok – normování koeficientů v rovnici kuželosečky. To je dáno tím, že směrové vektory ortonormálního repéru musí být jednotkové a nemůžeme je tedy násobit. V následujících dvou větách je popsán způsob, jak zvolit polární ortonormální repér tak, aby měla kuželosečka nejjednodušší možnou rovnici.

Věta 17.1. *Nechť má kuželosečka k alespoň jeden vlastní střed. Potom v kartézském repéru, jehož počátek je vlastním středem a směrové vektory jsou jednotkové vektory hlavních směrů kuželosečky k, má k rovnici tvaru*

$$k : \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + a_{33} = 0\,, \tag{17.1}$$

kde λ_i, $i = 1, 2$, jsou hlavní čísla kuželosečky.

Důkaz. Protože směry souřadných os jsou polárně sdružené vzhledem ke k, je $a_{12} = 0$ (viz Věta 15.4). Protože počátek souřadné soustavy je vlastním středem kuželosečky, je $a_{13} = a_{23} = 0$ (viz Věta 15.5) a dohromady tak dostáváme rovnici k ve tvaru

$$k : a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} = 0\,.$$

Protože je charakteristická rovnice kuželosečky nezávislá na ortonormálním repéru, je charakteristická rovnice kuželosečky $(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) = 0$ a její kořeny jsou $\lambda_1 = a_{11}$, $\lambda_2 = a_{22}$. □

Věta 17.2. *Nechť regulární kuželosečka k nemá vlastní střed (parabola). Potom volíme počátek kartézské souřadné soustavy jako průsečík k s její osou a směrové vektory jako jednotkové vektory hlavních směrů kuželosečky k. V této kartézské souřadné soustavě má k rovnici tvaru*

$$k : x^2 + 2py = 0\,.$$

Důkaz. Jeden hlavní směr je směr nevlastního středu a druhý hlavní směr je směr vrcholové tečny (tečna v jediném vrcholu paraboly je kolmá na osu paraboly, což vyplývá ze symetrie paraboly podle osy). Potom podle důkazu Věty 15.6 má kuželosečka rovnici ve tvaru $\lambda_1 x^2 + 2a_{23} y = 0$, kde $\lambda_1 \neq 0$ je nenulový kořen charakteristické rovnice a $a_{23} \neq 0$. Vydělením koeficientem λ_1 při označení $p = \frac{a_{23}}{\lambda_1}$ dostaneme požadovaný tvar. □

Věta 17.3. (Metrická klasifikace kuželoseček) *Ke každé kuželosečce k, která neobsahuje jako svou část nevlastní přímku, existuje takový ortonormální repér, že*

vzhledem k němu má k jednu z následujících rovnic:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0\,,\quad a>0,\,b>0\,, \tag{Ek1}$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0\,,\quad a>0,\,b>0\,, \tag{Ek2}$$
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0\,,\quad a>0,\,b>0\,, \tag{Ek3}$$
$$x^2+2py=0\,,\quad p\neq 0\,, \tag{Ek4}$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0\,,\quad a>0,\,b>0\,, \tag{Ek5}$$
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0\,,\quad a>0,\,b>0\,, \tag{Ek6}$$
$$x^2+c^2=0\,,\quad c>0\,, \tag{Ek7}$$
$$x^2-c^2=0\,,\quad c>0\,, \tag{Ek8}$$
$$x^2=0\,, \tag{Ek9}$$

kde a, b, c, p jsou reálná čísla.

Důkaz. Nechť má nejdříve kuželosečka právě jeden vlastní střed. Potom podle Věty 17.1 existuje takový ortonormální repér, že má kuželosečka vzhledem k němu rovnici (17.1), kde $\lambda_1 \neq 0 \neq \lambda_2$. Je–li $a_{33} \neq 0$, vydělíme rovnici $|a_{33}|$ a při označení $a^2 = \frac{|a_{33}|}{|\lambda_1|}$, $b^2 = \frac{|a_{33}|}{|\lambda_2|}$ dostaneme (případně až na násobek -1) rovnice (Ek1) – (Ek3). Je–li $a_{33} = 0$, označíme přímo $a^2 = \frac{1}{|\lambda_1|}$, $b^2 = \frac{1}{|\lambda_2|}$ a dostaneme (případně až na násobek -1) rovnice (Ek5) a (Ek6).

Nechť má nyní kuželosečka právě přímku vlastních středů. Potom opět podle Věty 17.1 existuje takový ortonormální repér, že má kuželosečka vzhledem k němu rovnici (17.1), kde $\lambda_1 \neq 0$ a $\lambda_2 = 0$ (to vyplývá z toho, že jeden kořen charakteristické rovnice kuželosečky, která má nevlastní střed, je nulový a druhý nenulový). Pro $a_{33} \neq 0$ vydělíme rovnici λ_1 a při označení $c^2 = \frac{|a_{33}|}{|\lambda_1|}$ dostaneme rovnice (Ek7) a (Ek8). Pro $a_{33} = 0$ vydělíme rovnici číslem λ_1 a dostaneme rovnici (Ek9).

Konečně nechť nemá kuželosečka vlastní střed. Potom má podle Věty 17.2 rovnici (Ek4). □

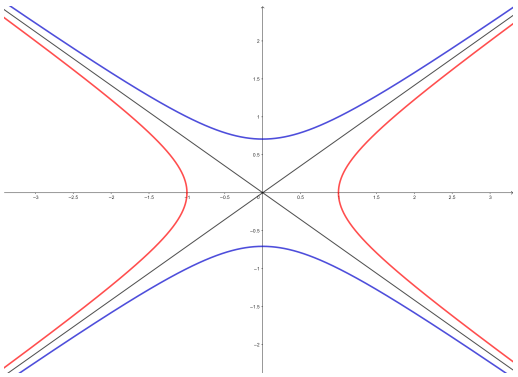
Poznámka 17.1. Kladná čísla a, b v rovnicích (Ek1) – (Ek3) elipsy (imaginární i reálné) a hyperboly se nazývají *délky poloos* a pro osy kuželosečky, na kterých leží reálné vrcholy, udávají vzdálenost vrcholů od středu kuželosečky.

Pro reálnou elipsu jsou všechny vrcholy reálné a větší z čísel a, b se nazývá *délkou hlavní poloosy*, menší se nazývá *délkou vedlejší poloosy*. Vrcholy elipsy, jejichž vzdálenost od středu elipsy je rovna délce hlavní poloosy, se nazývají *hlavní vrcholy elipsy*, vrcholy elipsy, jejichž vzdálenost od středu elipsy je rovna délce vedlejší poloosy, se nazývají *vedlejší vrcholy elipsy*.

Pro hyperbolu s rovnicí (Ek3) jsou vrcholy na ose x reálné a nazývají se *hlavní vrcholy hyperboly*, číslo $a > 0$ se nazývá *délka hlavní poloosy*. Vrcholy na ose y jsou komplexně sdružené. Reálné body na ose y, jejichž vzdálenost od počátku (středu hyperboly) je rovna b, jsou *reální zástupci* vrcholů a nazývají se *vedlejší vrcholy*, číslo b se nazývá *délka vedlejší poloosy*. Vedlejší vrcholy si můžeme snadno představit jako body, které jsou hlavními vrcholy takzvané *doplňkové hyperboly*, což je hyperbola, která má stejné osy i asymptoty a hlavní osa původní hyperboly je vedlejší osou doplňkové hyperboly. Má–li původní hyperbola rovnici (Ek3), potom doplňková hyperbola má rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0\,.$$

Na Obrázku 17.1 je hyperbola o rovnici $x^2 - 2y^2 = 1$ (vykreslená červeně)a její doplňková hyperbola $x^2 - 2y^2 = -1$ (vykreslená modře).



Obrázek 17.1: Hyperbola a její doplňková hyperbola

Případ, kdy $a = b$ v rovnicích (Ek1) – (Ek2) a (Ek5), nastává při $\lambda_1 = \lambda_2$, tj. pro zobecněnou kružnici. Potom (Ek1) je rovnice *imaginární kružnice*, (Ek2) je rovnice *reálné kružnice* a (Ek5) je rovnice takzvané *nulové kružnice* (reálná kružnice s nulovým poloměrem).

Je–li $a = b$ v rovnici (Ek3), což nastává v případě, kdy $\lambda_1 = -\lambda_2 \neq 0$, nazývá se příslušná hyperbola *rovnoosá*. V tomto případě je doplňková hyperbola shodná s původní (otočená kolem středu o $\pi/2$). Pro $a = b$ v rovnici (Ek6) dostáváme dvě kolmé různoběžné reálné přímky.

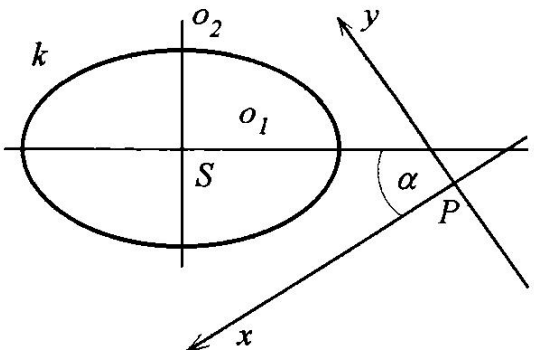
Číslo $2\,c$ v rovnici (Ek8) udává vzdálenost rovnoběžných přímek, které jsou tvořícími přímkami kuželosečky.

Číslo p v rovnici (Ek4) paraboly se nazývá *parametr paraboly*. Jeho geometrický význam si ukážeme v následující Části 18. ♢

Věty 17.1 a 17.2 popisují, jak zvolit *polární ortonormální repér*, vzhledem ke kterému má kuželosečka jednoduchou kanonickou rovnici, ze které můžeme snadno

vyčíst všechny potřebné údaje o kuželosečce. V řadě případů nás zajímá pouze kanonická rovnice kuželosečky; transformační rovnice, které převádějí rovnici kuželosečky (zadanou v libovolném ortonormálním repéru) na kanonický tvar, nás nezajímají. Postup, který spočívá v nalezení příslušného ortonormálního repéru (podle Vět 17.1 a 17.2) a transformace daných rovnic do kanonického tvaru, je zbytečně zdlouhavý a pracný (zvláště pro parabolu, kde musíme hledat její vrchol). Ukážeme si proto dvě metody hledání kanonických rovnic kuželosečky, které jsou mnohem praktičtější.

I. metoda. Tato metoda je založena na přímém hledání ortonormálních transformací, které převedou rovnici kuželosečky do kanonického tvaru.
Předpokládejme nejdříve, že hlavní směry kuželosečky nejsou rovnoběžné s osami kartézských souřadnic (viz Obrázek 17.2), to znamená, že v rovnici kuželosečky je $a_{12} \neq 0$. Je–li $a_{12} = 0$, vynecháme tento krok a pokračujeme postupem popsaným dále. Předpokládejme, že $\alpha \in (0, \pi/2)$ je velikost úhlu, který je určen některou z os kuželosečky a osou x.



Obrázek 17.2

Transformační rovnice otočení souřadné soustavy kolem počátku o úhel velikosti α jsou

$$\begin{aligned} x &= x' \cos(\alpha) - y' \sin(\alpha)\,, \\ y &= x' \sin(\alpha) + y' \cos(\alpha)\,. \end{aligned} \tag{17.2}$$

Tyto transformační rovnice dosadíme do rovnice kuželosečky v původních kartézských souřadnicích, tj. do rovnice

$$k : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

a dostaneme

$$\begin{aligned} (a_{11}\cos^2(\alpha) + 2a_{12}\cos(\alpha)\sin(\alpha) + a_{22}\sin^2(\alpha))x'^2 + \\ 2(a_{12}(\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)) + (a_{22} - a_{11})\cos(\alpha)\sin(\alpha))x'y' + \\ (a_{11}\sin^2(\alpha) - 2a_{12}\cos(\alpha)\sin(\alpha) + a_{22}\cos^2(\alpha))y'^2 + \\ 2(a_{13}\cos(\alpha) + a_{23}\sin(\alpha))x' + \\ 2(-a_{13}\sin(\alpha) + a_{23}\cos(\alpha))y' + a_{33} = 0\,. \end{aligned} \tag{17.3}$$

Položíme roven nule koeficient u $x'y'$ a dostaneme rovnici

$$-a_{12}\sin^2(\alpha) + (a_{22} - a_{11})\cos(\alpha)\sin(\alpha) + a_{12}\cos^2(\alpha) = 0\,. \tag{17.4}$$

Protože $\alpha \neq \pi/2$, je $\cos(\alpha) \neq 0$ a vydělením $\cos^2(\alpha)$ dostaneme kvadratickou rovnici pro $\tan(\alpha)$

$$a_{12}\tan^2(\alpha) + (a_{11} - a_{22})\tan(\alpha) - a_{12} = 0\,. \tag{17.5}$$

Z $a_{12} \neq 0$ je diskriminant této kvadratické rovnice $D = (a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}^2 > 0$, tj. vždy existují dvě hodnoty $\alpha_{1,2}$, vyhovující rovnici (17.4) (to odpovídá tomu, že do polohy rovnoběžné s osou x můžeme otočit jeden nebo druhý hlavní směr kuželosečky). Z kořenových vztahů pro rovnici (17.5) je $\tan(\alpha_1).\tan(\alpha_2) = -1$, tj. $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi/2$. Vybereme si jednu hodnotu $\tan(\alpha_i)$ a použitím vztahů

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}, \qquad \sin(\alpha) = \frac{\tan(\alpha)}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}$$

dostaneme po dosazení do (17.3) rovnici kuželosečky v nových kartézských souřadnicích ve tvaru

$$k : b_{11}x'^2 + b_{22}y'^2 + 2b_{13}x' + 2b_{23}y' + a_{33} = 0\,. \tag{17.6}$$

V nových kartézských souřadnicích jsou hlavní směry kuželosečky rovnoběžné s osami souřadnými, tj. koeficient u $x'y'$ je roven nule.

Budeme dále upravovat rovnici (17.6). Nechť nejdříve platí $b_{11} \neq 0 \neq b_{22}$. Potom rovnici (17.6) upravíme na tvar

$$k : b_{11}(x' + \frac{b_{13}}{b_{11}})^2 + b_{22}(y' + \frac{b_{23}}{b_{22}})^2 + a_{33} - \frac{b_{13}^2}{b_{11}} - \frac{b_{23}^2}{b_{22}} = 0\,.$$

Transformace kartézských souřadnic $x'' = x' + \frac{b_{13}}{b_{11}}$, $y'' = y' + \frac{b_{23}}{b_{22}}$, která odpovídá změně počátku ortonormálního repéru, převede rovnici kuželosečky do tvaru

$$k : b_{11}(x'')^2 + b_{22}(y'')^2 + b_{33} = 0\,, \tag{17.7}$$

kde $b_{33} = a_{33} - \frac{b_{13}^2}{b_{11}} - \frac{b_{23}^2}{b_{22}}$. Rovnici (17.7) potom postupem popsaným v důkazu Věty 17.3 převedeme na jednu z rovnic (Ek1) – (Ek3) nebo (Ek5) a (Ek6).

Je–li jeden z koeficientů b_{ii} v rovnici (17.6) nulový, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že je to b_{22} (závisí to na tom, kterou hodnotu α_i si vybereme). Potom rovnici (17.6) upravíme na tvar

$$k : b_{11}(x' + \frac{b_{13}}{b_{11}})^2 + 2b_{23}y' + a_{33} - \frac{b_{13}^2}{b_{11}} = 0\,. \tag{17.8}$$

Transformace souřadnic $x'' = x' + \frac{b_{13}}{b_{11}}$, $y'' = y'$ potom převede rovnici kuželosečky na tvar

$$k : b_{11}(x'')^2 + 2b_{23}y'' + b_{33} = 0\,, \tag{17.9}$$

kde $b_{33} = a_{33} - \frac{b_{13}^2}{b_{11}}$. Je–li v rovnici (17.9) $b_{23} = 0$, dostaneme po vydělení číslem b_{11} jednu z rovnic (Ek7) – (Ek9). Je–li v rovnici (17.9) $b_{23} \neq 0$, provedeme ještě transformaci souřadnic $\bar{x} = x''$, $\bar{y} = y'' + \frac{b_{33}}{2\,b_{23}}$, která po vydělení rovnice číslem b_{11} převede rovnici na tvar (Ek4).

Postupnými transformacemi kartézských souřadnic jsme tak převedli rovnici libovolné kuželosečky na jednu z kanonických rovnic z Věty 17.3. Pokud nás zajímá

také polární ortonormální repér a transformace souřadnic, která převede rovnici kuželosečky do kanonického tvaru, složíme dílčí transformace a z tvaru výsledných transformačních rovnic určíme polární ortonormální repér kuželosečky.

II. metoda (metoda invariantů). Tato metoda je založena na tom, že některé číselné hodnoty, které jsou přiřazeny koeficientům matice kuželosečky, nezávisí na zvoleném souřadnicovém repéru. Takováto čísla se nazývají *invarianty kuželosečky.*

Definice 17.1. Nechť k je kuželosečka o rovnici (16.1). Reálná funkce $I(a_{ij})$ se nazývá *invariantem kuželosečky* k, jsou–li její hodnoty nezávislé na zvoleném souřadnicovém repéru.
Řekneme, že *invariant* $I(a_{ij})$ *je stupně* l, je–li $I(\alpha a_{ij}) = \alpha^l I(a_{ij})$.
Pro $l = 0$ hovoříme o *absolutním invariantu.*

Poznámka 17.2. V předchozích úvahách jsme se již s několika invarianty kuželosečky setkali. Např. hodnost kuželosečky nezávisí na libovolných použitých souřadnicích. Je to tedy invariant kuželosečky v projektivní, afinní i euklidovské rovině. Navíc je tento invariant absolutní. Podobně hodnost matice $\bar{A}$ je absolutní invariant v afinní rovině. Všude dále, pokud budeme hovořit o invariantech, budeme mít na mysli invarianty v euklidovské rovině, tj. uvažované souřadnicové repéry budou ortonormální. ♢

Poznámka 17.3. Stupeň invariantu určuje, jak se jeho hodnota mění při změně určující kvadratické formy. Je-li I hodnota invariantu při použití určující kvadratické formy F, pak $\alpha^l I$ je hodnota téhož invariantu stupně l při použití kvadratické formy αF. ♢

Poznámka 17.4. V Části 16 jsme dokázali, že charakteristická rovnice je nezávislá na zvoleném ortonormálním repéru. To ovšem znamená, že její kořeny i koeficienty jsou (euklidovské) invarianty kuželosečky. Koeficienty charakteristické rovnice jsou čísla $a_{11} + a_{22}$ a $|\bar{A}|$. Je tedy $I(a_{ij}) = a_{11} + a_{22}$ invariantem stupně 1 a $I(a_{ij}) = |\bar{A}|$ je invariantem stupně 2. Podobně hlavní čísla kuželosečky jsou invarianty stupně 1. ♢

Pro určování kanonických rovnic kuželosečky budeme potřebovat mimo invariantů z Poznámky 17.4 ještě další invarianty. První z nich je diskriminant kuželosečky.

Věta 17.4. *Determinant matice kuželosečky (diskriminant kuželosečky) je jejím invariantem stupně 3.*

Důkaz. Mějme dány dva ortonormální repéry. Nechť má kuželosečka vzhledem k jednomu repéru matici A a vzhledem ke druhému matici B. Nechť $(X) = \bar{Q}(X') + (O')$ je transformace kartézských souřadnic při přechodu od jednoho repéru k druhému, tj. $\bar{Q}$ je ortonormální matice. Odpovídající projektivní homogenní souřadnice uvažujme v normovaném tvaru, tj. poslední souřadnice je 0 pro nevlastní body a 1

pro vlastní body. Transformační matice pro takovéto projektivní homogenní souřadnice jsou potom dány maticí $Q = \begin{bmatrix} \bar{Q} & (O') \\ (\mathbf{o})^T & 1 \end{bmatrix}$, jejíž determinant je ± 1 (Q není ortonormální). Zde $\mathbf{o}$ je nulový vektor. Protože $B = Q^T A Q$, je odtud $|B| = |A|$. Stupeň invariantu $|A|$ plyne z toho, že A je řádu 3 a $|\alpha A| = \alpha^3 |A|$. □

Věta 17.5. *Nechť k je kuželosečka, která má právě jeden vlastní střed a vzhledem k nějakému ortonormálnímu repéru má rovnici* (16.3). *Pak existuje takový kartézský repér, že vzhledem k němu má k rovnici*

$$k : \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{|A|}{|\bar{A}|} = 0\,, \tag{17.10}$$

kde λ_i, $i = 1, 2$, jsou hlavní čísla kuželosečky.

Důkaz. Podmínka, že k má právě jeden střed, je ekvivalentní tomu, že hodnost matice $\bar{A}$ je 2 (viz podmínky řešitelnosti soustavy (14.7)), tj. všechna hlavní čísla jsou nenulová (viz kořenové vztahy pro charakteristickou rovnici (16.7)). Potom podle Věty 17.1 má k v nějakém kartézském repéru rovnici

$$k : \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + b_{33} = 0.$$

Protože $|A|$ je invariantní při změnách kartézských repérů, je $|A| = \lambda_1 \lambda_2 b_{33}$ a odtud $b_{33} = |A|/|\bar{A}|$, protože z kořenových vztahů pro charakteristickou rovnici je $|\bar{A}| = \lambda_1 \lambda_2$. □

Věta 17.6. *Nechť k je regulární nestředová kuželosečka, která má vzhledem k nějakému ortonormálnímu repéru rovnici* (16.3). *Pak existuje takový kartézský repér, že vzhledem k němu má k rovnici*

$$k : \lambda_1 x^2 \pm 2\sqrt{-\frac{|A|}{\lambda_1}}\, y = 0\,, \tag{17.11}$$

kde λ_1 je nenulové hlavní číslo kuželosečky.

Důkaz. Je-li k nestředová regulární kuželosečka, je $|A| \neq 0$ a $\bar{A}$ má hodnost 1, tj. charakteristická rovnice pro matici $\bar{A}$ má právě jeden nenulový kořen λ_1. Potom podle důkazu Věty 17.2 má k v nějakém kartézském repéru rovnici

$$k : \lambda_1 x^2 + 2 b_{23} y = 0.$$

Protože $|A|$ je invariantní při změnách kartézských repérů, je $|A| = -\lambda_1 b_{23}^2$ a odtud $b_{23} = \pm\sqrt{-\frac{|A|}{\lambda_1}}$. □

Poznámka 17.5. Předchozí dvě věty se tedy dají použít k rychlému určení kanonických rovnic pro všechny regulární kuželosečky a singulární kuželosečky hodnosti 2, které mají právě jeden střed (různoběžné přímky). Z devíti typů kuželoseček se tedy dají použít v šesti případech. V případě kuželosečky hodnosti jedna je vždy kanonická rovnice tvaru $k : \lambda_1 x^2 = 0$. Ve zbývajících dvou případech (rovnoběžné přímky reálné nebo komplexně sdružené) musíme definovat ještě další invarianty. ♢

Uvažujme rovnici (16.5) kuželosečky k. Definujme polynom

$$\Gamma(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \tag{17.12}$$
$$= \begin{vmatrix} \bar{A}-\lambda E & (\mathbf{a}) \\ (\mathbf{a})^T & a_{33} \end{vmatrix} = \Gamma_0\lambda^2 - \Gamma_1\lambda + \Gamma_2\,,$$

kde

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= a_{33}\,, \\ \Gamma_1 &= a_{11}a_{33} - a_{13}^2 + a_{22}a_{33} - a_{23}^2\,, \\ \Gamma_2 &= |A|\,. \end{aligned} \tag{17.13}$$

Věta 17.7. *Funkce $\Gamma(\lambda)$ je invariantní při změnách ortonormálního repéru, které zachovávají počátek.*

Důkaz. Uvažujme transformační rovnice přechodu k novému ortonormálnímu repéru, který má stejný počátek jako původní repér, tj.

$$(X) = \bar{Q}(X')\,,$$

kde $\bar{Q}$ je ortonormální matice. V novém repéru je

$$k : (X')^T\bar{Q}^T\bar{A}\bar{Q}(X') + 2(\mathbf{a})^T\bar{Q}(X') + a_{33} = 0$$

a potom

$$\Gamma'(\lambda) = \begin{vmatrix} \bar{Q}^T\bar{A}\bar{Q}-\lambda E & \bar{Q}^T(\mathbf{a}) \\ (\mathbf{a})^T\bar{Q} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{Q}^T(\bar{A}-\lambda E)\bar{Q} & \bar{Q}^T(\mathbf{a}) \\ (\mathbf{a})^T\bar{Q} & a_{33} \end{vmatrix} =$$
$$= \left|\begin{pmatrix} \bar{Q}^T & (\mathbf{o}) \\ (\mathbf{o})^T & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{A}-\lambda E & (\mathbf{a}) \\ (\mathbf{a})^T & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{Q} & (\mathbf{o}) \\ (\mathbf{o})^T & 1 \end{pmatrix}\right| =$$
$$= \begin{vmatrix} \bar{A}-\lambda E & (\mathbf{a}) \\ (\mathbf{a})^T & a_{33} \end{vmatrix} = \Gamma(\lambda)\,,$$

protože $\begin{vmatrix} \bar{Q} & (\mathbf{o}) \\ (\mathbf{o})^T & 1 \end{vmatrix} = \pm 1$. □

Věta 17.8. *Nechť k je kuželosečka hodnosti 2 parabolického typu. Pak koeficient Γ_1 funkce $\Gamma(\lambda)$ je invariant kuželosečky k.*

Důkaz. Ve Větě 17.7 jsme dokázali, že Γ_1 je invariantní při změnách ortonormálního repéru, které zachovávají počátek. Musíme tedy ještě dokázat, že Γ_1 je invariantní při posunutí ortonormálního repéru do nového počátku. Transformační rovnice při změně počátku jsou tvaru

$$(X) = E(X') + (P)\,,$$

kde $P = [p_1; p_2]$ je nový počátek. Potom

$$k : (X')^T \bar{A}(X') + 2(\bar{A}(P) + (\mathbf{a}))^T (X') + (P)^T \bar{A}(P) + 2(\mathbf{a})^T (P) + a_{33} = 0$$

a

$$\Gamma'(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & F_1(P) \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & F_2(P) \\ F_1(P) & F_2(P) & F(P) \end{vmatrix},$$

kde

$$\begin{aligned} F_1(P) &= a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{13}\,, \\ F_2(P) &= a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + a_{23}\,, \\ F(P) &= a_{11}p_1^2 + 2a_{12}p_1p_2 + a_{22}p_2^2 + 2a_{13}p_1 + 2a_{23}p_2 + a_{33}\,. \end{aligned}$$

Potom

$$\begin{aligned} \Gamma_1' = {} & a_{11}(a_{11}p_1^2 + 2a_{12}p_1p_2 + a_{22}p_2^2 + 2a_{13}p_1 + 2a_{23}p_2 + a_{33}) - \\ & - (a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{13})^2 + \\ & + a_{22}(a_{11}p_1^2 + 2a_{12}p_1p_2 + a_{22}p_2^2 + 2a_{13}p_1 + 2a_{23}p_2 + a_{33}) - \\ & - (a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + a_{23})^2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = {} & (p_1^2 + p_2^2)(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) + 2p_1(a_{13}a_{22} - a_{12}a_{23}) + 2p_2(a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13}) + \\ & + a_{11}a_{33} - a_{13}^2 + a_{22}a_{33} - a_{23}^2\,. \end{aligned}$$

Pro kuželosečku hodnosti 2, která je parabolického typu, je hodnost matice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

menší než 2 a odtud $(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = 0$, $(a_{13}a_{22} - a_{12}a_{23}) = 0$ a $(a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13}) = 0$. To ovšem znamená, že $\Gamma_1' = \Gamma_1$. □

Věta 17.9. *Nechť k je kuželosečka hodnosti 2 parabolického typu, která má souřadnicové vyjádření* (16.5). *Potom v polárním ortonormálním repéru má k kanonickou rovnici*

$$k : \lambda_1 x^2 + \frac{\Gamma_1}{\lambda_1} = 0\,, \tag{17.14}$$

kde λ_1 je nenulový kořen charakteristické rovnice kuželosečky.

Důkaz. Kuželosečka parabolického typu hodnosti dva má právě jeden nenulový kořen charakteristické rovnice a přímku středů. Podle Věty 17.1 má k rovnici

$$k : \lambda_1 x^2 + b_{33} = 0\,.$$

Podle Věty 17.8 je $\Gamma_1 = \lambda_1 b_{33}$ a odtud plyne tvrzení Věty 17.9. □

Poznámka 17.6. Máme–li tedy dánu rovnici kuželosečky (16.3), můžeme pouze užitím invariantů $|A|$, $|\bar{A}|$, Γ_1 a nenulových hlavních čísel kuželosečky λ_i, $i = 1, 2$, snadno napsat přímo kanonickou rovnici kuželosečky. Výsledky můžeme shrnout do následující tabulky:

$h(A)$	$h(\bar{A})$	kanonická rovnice	typ kuželosečky
$h(A) = 3$	$h(\bar{A}) = 2$	$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{\lvert A\rvert}{\lvert\bar{A}\rvert} = 0$	elipsy, hyperbola
	$h(\bar{A}) = 1$	$\lambda_1 x^2 + 2\sqrt{-\frac{\lvert A\rvert}{\lambda_1}}\, y = 0$	parabola
$h(A) = 2$	$h(\bar{A}) = 2$	$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 0$	různoběžné přímky
	$h(\bar{A}) = 1$	$\lambda_1 x^2 + \frac{\Gamma_1}{\lambda_1} = 0$	rovnoběžné přímky
	$h(\bar{A}) = 0$	neexistuje	vlastní přímka a nevlastní přímka
$h(A) = 1$	$h(\bar{A}) = 1$	$\lambda_1 x^2 = 0$	dvojnásobná vlastní přímka
	$h(\bar{A}) = 0$	neexistuje	dvojnásobná nevlastní přímka

Úloha 17.1. Pomocí transformací kartézských souřadnic určete ortonormální polární repér a kanonickou rovnici (viz Věta 17.3) kuželosečky k. Určete také transformaci kartézských souřadnic, která převede rovnici kuželosečky do kanonického tvaru

a) $k : 4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0\,,$

b) $k : x^2 + 6xy + 9y^2 - 12x + 24y + 15 = 0\,,$

c) $k : x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0\,.$

Řešení: I. metoda:

a) Do rovnice kuželosečky dosadíme transformační rovnice (17.2) pro otočení souřadného repéru o úhel α kolem počátku. Koeficient u $x'y'$ položíme roven nule a dostaneme pro α kvadratickou rovnici (17.5) ve tvaru

$$2\tan^2\alpha - 3\tan\alpha - 2 = 0\,.$$

Tato rovnice má kořeny $\tan\alpha_1 = 2$ a $\tan\alpha_2 = -\frac{1}{2}$. Vybereme si první kořen, potom $\sin\alpha_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}$ a $\cos\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Dosazením do transformačních rovnic (17.2) dostaneme transformaci souřadnic

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y'\,,$$
$$y = \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'\,,$$

která převede rovnici kuželosečky do tvaru

$$k : 4x'^2 - y'^2 + \frac{40}{\sqrt{5}}x' - \frac{20}{\sqrt{5}}y' - 36 = 0\,.$$

Tuto rovnici upravíme na tvar

$$k : 4(x' + \frac{5}{\sqrt{5}})^2 - (y' + \frac{10}{\sqrt{5}})^2 - 36 = 0\,.$$

Potom transformace souřadnic

$$\begin{aligned} x'' &= x' \qquad + \frac{5}{\sqrt{5}}\,, \\ y'' &= \qquad y' + \frac{10}{\sqrt{5}}\,, \end{aligned}$$

která odpovídá posunu počátku souřadnicového repéru do středu kuželosečky, převede rovnici kuželosečky do výsledného kanonického tvaru

$$k : 4(x'')^2 - (y'')^2 - 36 = 0\,.$$

Tuto rovnici můžeme vydělit 36 a dostaneme

$$k : \frac{(x'')^2}{9} - \frac{(y'')^2}{36} = 1\,,$$

tj. kuželosečka je hyperbola s délkou hlavní poloosy 3 a vedlejší poloosy 6.

Složením dílčích transformací souřadnic dostaneme výslednou transformaci ve tvaru

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{5}}x'' - \frac{2}{\sqrt{5}}y'' + 3\,, \\ y &= \frac{2}{\sqrt{5}}x'' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'' - 4\,. \end{aligned}$$

Z transformačních rovnic se snadno vidí, že ortonormální polární repér je dán novým počátkem $S = [3; -4]$ (středem hyperboly) a novými směrovými vektory $\mathbf{e}_1 = (\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}})$ a $\mathbf{e}_2 = (\frac{-2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}})$.

b) Do rovnice kuželosečky dosadíme transformační rovnice (17.2). Pro α dostaneme kvadratickou rovnici (17.5) ve tvaru

$$3\tan^2\alpha - 8\tan\alpha - 3 = 0\,.$$

Tato rovnice má kořeny $\tan\alpha_1 = 3$ a $\tan\alpha_2 = -\frac{1}{3}$. Vybereme si druhý kořen, potom $\sin\alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ a $\cos\alpha_2 = \frac{3}{\sqrt{10}}$. Dosazením do transformačních rovnic (17.2) dostaneme transformaci souřadnic

$$\begin{aligned} x &= \quad \frac{3}{\sqrt{10}}x' + \frac{1}{\sqrt{10}}y'\,, \\ y &= -\frac{1}{\sqrt{10}}x' + \frac{3}{\sqrt{10}}y'\,, \end{aligned}$$

která převede rovnici kuželosečky do tvaru

$$k : 10y'^2 + \frac{60}{\sqrt{10}}x' + \frac{60}{\sqrt{10}}y' + 15 = 0\,.$$

Tuto rovnici upravíme na tvar

$$k : 10(y' + \frac{3}{\sqrt{10}})^2 + \frac{60}{\sqrt{10}}(x' + \frac{1}{\sqrt{10}}) = 0\,.$$

Potom transformace souřadnic

$$\begin{aligned} x'' &= x' \qquad + \frac{1}{\sqrt{10}}\,, \\ y'' &= \qquad y' + \frac{3}{\sqrt{10}}\,, \end{aligned}$$

která odpovídá posunu počátku souřadnicového repéru do vrcholu kuželosečky, převede rovnici kuželosečky do výsledného kanonického tvaru (po vydělení 10)

$$k : (y'')^2 + \frac{6}{\sqrt{10}}x'' = 0\,,$$

tj. kuželosečka je parabola s parametrem $p = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

Složením dílčích transformací souřadnic dostaneme výslednou transformaci ve tvaru

$$\begin{aligned} x &= \quad \frac{3}{\sqrt{10}}x'' + \frac{1}{\sqrt{10}}y''\,, \\ y &= -\frac{1}{\sqrt{10}}x'' + \frac{3}{\sqrt{10}}y'' - 1\,. \end{aligned}$$

Z transformačních rovnic se snadno vidí, že ortonormální polární repér je dán novým počátkem $S = [0; -1]$ (vrchol paraboly) a novými směrovými vektory $\mathbf{e}_1 = (\frac{3}{\sqrt{10}}; -\frac{1}{\sqrt{10}})$ a $\mathbf{e}_2 = (\frac{1}{\sqrt{10}}; \frac{3}{\sqrt{10}})$.

c) Do rovnice kuželosečky dosadíme transformační rovnice (17.2). Pro α dostaneme kvadratickou rovnici (17.5) ve tvaru

$$\tan^2\alpha - 1 = 0\,.$$

Tato rovnice má kořeny $\tan\alpha_1 = 1$ a $\tan\alpha_2 = -1$. Pro první kořen je potom $\sin\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ a $\cos\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Dosazením do transformačních rovnic (17.2) dostaneme transformaci souřadnic

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'\,, \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'\,, \end{aligned}$$

která převede rovnici kuželosečky do tvaru

$$k : 2x'^2 - \frac{4}{\sqrt{2}}x' - 3 = 0\,.$$

Tuto rovnici upravíme na tvar

$$k : 2(x' - \frac{1}{\sqrt{2}})^2 - 4 = 0\,.$$

Potom transformace souřadnic

$$\begin{aligned} x'' &= x' \qquad - \frac{1}{\sqrt{2}}\,, \\ y'' &= \qquad y'\,, \end{aligned}$$

která odpovídá posunu počátku souřadnicového repéru do středu kuželosečky, převede rovnici kuželosečky do výsledného kanonického tvaru (po vydělení 2)

$$k : (x'')^2 - 2 = 0\,,$$

tj. kuželosečka je dvojice reálných rovnoběžných přímek.

Složením dílčích transformací souřadnic dostaneme výslednou transformaci ve tvaru

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}x'' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'' + \frac{1}{2}\,, \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}x'' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'' + \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Z transformačních rovnic se snadno vidí, že ortonormální polární repér je dán novým počátkem $S = [\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ (jeden ze středů kuželosečky) a novými směrovými vektory $\mathbf{e}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}})$ a $\mathbf{e}_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}})$.

II. metoda:

a) Matice kuželosečky $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 2 & 3 & 6 \\ 8 & 6 & -36 \end{pmatrix}$ a $|A| = 144$, tj. kuželosečka je regulární. Dále $|\bar{A}| = -4$, tj. kuželosečka je středová a podle Věty 15.1 se jedná o hyperbolu. Střed je bod $S = [3; -4]$. Charakteristická rovnice kuželosečky je $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$ s hlavními čísly $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 4$. Potom podle Věty 17.5 má k rovnici $-x'^2 + 4y'^2 - 36 = 0$, což upravíme na tvar z Věty 17.3 vydělením číslem -36. Dostaneme

$$k : \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{9} + 1 = 0\,,$$

a tedy k je hyperbola s délkou hlavní poloosy 3 a vedlejší poloosy 6. Pro $\lambda_1 = -1$ dostaneme jednotkový vektor příslušného hlavního směru $\mathbf{e}_1 = (\frac{-2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}})$ a pro

$\lambda_2 = 4$ dostaneme jednotkový vektor příslušného hlavního směru $\mathbf{e}_2 = (\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}})$. Ortonormální polární báze je potom dána $\langle S; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ s transformačními rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= -\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y' + 3\,, \\ y &= \quad \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y' - 4\,. \end{aligned}$$

b) Matice kuželosečky $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ 3 & 9 & 12 \\ -6 & 12 & 15 \end{pmatrix}$ a $|A| = -900$, tj. kuželosečka je regulární. Dále $|\bar{A}| = 0$, tj. kuželosečka je nestředová a podle Věty 15.1 se jedná o parabolu. Charakteristická rovnice kuželosečky je $\lambda^2 - 10\lambda = 0$ s hlavními čísly $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 0$. Potom podle Věty 17.6 má k rovnici $10x'^2 + 2\sqrt{90}y' = 0$, což upravíme na tvar z Věty 17.3 vydělením číslem 10. Dostaneme

$$k : x'^2 + \frac{6}{\sqrt{10}}\, y' = 0\,,$$

a tedy k má parametr $p = \frac{3}{\sqrt{10}}$. Pro $\lambda_1 = 10$ dostaneme jednotkový vektor příslušného hlavního směru $\mathbf{e}_1 = (\frac{1}{\sqrt{10}}; \frac{3}{\sqrt{10}})$ a pro $\lambda_2 = 0$ dostaneme jednotkový vektor příslušného hlavního směru $\mathbf{e}_2 = (\frac{3}{\sqrt{10}}; \frac{-1}{\sqrt{10}})$. Osa paraboly je polára nevlastního bodu směru $\mathbf{e}_1$, tj. $o : x + 3y + 3 = 0$. Vrchol paraboly je $V = [0; -1]$. Ortonormální polární báze je potom dána $\langle V; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ s transformačními rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{10}}x' + \frac{3}{\sqrt{10}}y'\,, \\ y &= \frac{3}{\sqrt{10}}x' - \frac{1}{\sqrt{10}}y' - 1\,. \end{aligned}$$

c) Matice kuželosečky $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ a $|A| = 0$, $h(A) = 2$, tj. kuželosečka je singulární hodnosti 2. Charakteristická rovnice kuželosečky je $\lambda^2 - 2\lambda = 0$ s hlavními čísly $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$, tj. kuželosečka je parabolického typu (rovnoběžné přímky). Vypočteme $\Gamma_1 = 8$ a podle Věty 17.9 má k kanonickou rovnici (po vydělení 2)

$$k : x^2 - 2 = 0\,,$$

jedná se tedy o dvě reálné rovnoběžné přímky.

Pro $\lambda_1 = 2$ dostaneme jednotkový vektor příslušného hlavního směru $\mathbf{e}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}})$ a pro $\lambda_2 = 0$ dostaneme jednotkový vektor příslušného hlavního směru $\mathbf{e}_2 = (\frac{-1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}})$. Kuželosečka má přímku středů $x + y - 1 = 0$ a za nový počátek ortonormálního repéru zvolíme libovolný střed, např. $P = [1; 0]$, potom ortonormální

polární báze kuželosečky k je $\langle P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ s transformačními rovnicemi

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' + 1\,,$$
$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'\,.$$

Poznámka 17.7. Porovnáme–li výsledky I. a II. metody v Úloze 17.1, vidíme, že výsledné kanonické rovnice, ortonormální polární báze, a tím i transformační rovnice, nemusí být v obou metodách úplně totožné. Kanonické rovnice se mohou lišit o záměnu koeficientů u druhých mocnin souřadnic - pořadí kořenů v charakteristické rovnici kuželosečky, které určují, která souřadná osa splyne s jakou osou kuželosečky. Tomu odpovídá v I. metodě, kterou hodnotu α_i, $i = 1, 2$, používáme v dalších výpočtech. V případě a) jsme zvolili v I. metodě osu x souřadného repéru jako hlavní osu hyperboly, zatímco v II. metodě je osa x vedlejší osou hyperboly. Kanonické rovnice respektive ortonormální polární repéry, a tím i transformační rovnice, se proto v obou metodách liší pořadím koeficientů u x^2 a y^2 v kanonické rovnici, respektive pořadím směrových vektorů v ortonormálním polárním repéru. V případě b) jsme zvolili jako osu paraboly v I. metodě osu x a ve druhé metodě osu y. Proto se kanonické rovnice paraboly liší o záměnu souřadnic x a y. Také ortonormální polární repér se v tomto případě liší o pořadí směrových vektorů.

V případě kuželoseček, které mají přímku vlastních středů, můžeme jako počátek ortonormálního repéru zvolit libovolný vlastní střed. Proto se mohou transformační rovnice lišit v absolutních členech, jak je vidět v případě c). ♢

18 Kuželosečky jako množiny bodů daných vlastností

Na střední škole se pracuje pouze s reálnou euklidovskou rovinou. Kuželosečky se definují jako množiny bodů, které splňují jisté vlastnosti. V této části skript si ukážeme, že středoškolské definice kuželoseček určují opravdu reálné části kuželoseček v našem pojetí.

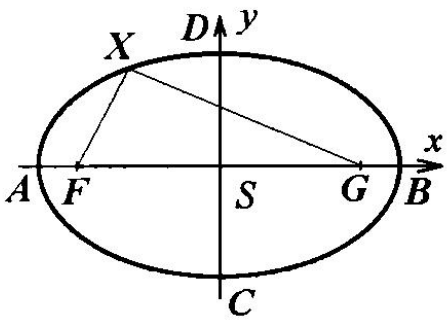
Věta 18.1. *Nechť F a G jsou dva různé body v $\mathcal{E}_2$ a označme $|FG| = 2e$. Nechť reálné číslo a je takové, že $a > e$. Potom množina bodů X v $\mathcal{E}_2$ takových, že $|FX| + |GX| = 2a$, je reálná část (reálné) elipsy s délkami poloos a a $b = \sqrt{a^2 - e^2}$.*

Důkaz.

Zvolme ortonormální repér tak, že body F a G leží na ose x a jejich souřadnice jsou $F = [-e; 0]$, $G = [e; 0]$. Uvažujme bod $X = [x; y]$, který splňuje podmínku $|FX| + |GX| = 2a$. V souřadnicích je tedy

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a$$

a umocněním dostaneme po jednoduché úpravě



Obr. 18.1

$$\sqrt{(x^2 + y^2 + e^2)^2 - 4e^2x^2} = 2a^2 - (x^2 + y^2 + e^2)\,.$$

Tuto rovnici opět umocníme a po úpravě dostaneme

$$x^2(a^2 - e^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2)\,.$$

Po dosazení $b^2 = a^2 - e^2$ a vydělení a^2b^2 dostaneme, že souřadnice bodů splňujících podmínky naší věty vyhovují rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,, \tag{18.1}$$

tj. leží na reálné elipse s délkami poloos a, b.

Naopak uvažujme reálný bod X, který leží na elipse o rovnici (18.1), tj. jeho reálné souřadnice $[x; y]$ splňují rovnici (18.1). Snadno se přesvědčíme, že $|FX| + |GX| = 2a$, kde $F = [-e; 0]$, $G = [e; 0]$, tj. reálné body elipsy splňují podmínky naší věty, a tedy množina bodů v $\mathcal{E}_2$ určená podmínkou $|FX| + |GX| = 2a$ je právě reálná část (reálné) elipsy. □

Poznámka 18.1. Body F, G z předchozí věty se nazývají *ohniska elipsy*. Číslo e se nazývá *délková excentricita (výstřednost) elipsy*. ♢

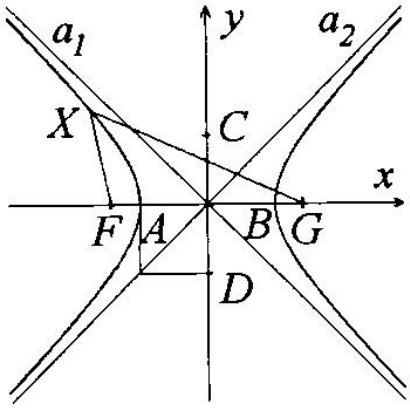
Věta 18.2. *Nechť F a G jsou dva různé body v $\mathcal{E}_2$ a označme $|FG| = 2e$. Nechť reálné číslo a je takové, že $a < e$. Potom množina bodů X v $\mathcal{E}_2$ takových, že $||FX| - |GX|| = 2a$, je reálná část hyperboly s délkou hlavní poloosy a a délkou vedlejší poloosy $b = \sqrt{e^2 - a^2}$.*

Důkaz.

Podobně jako v důkazu Věty 18.1 zvolme ortonormální repér tak, že body F a G leží na ose x a jejich souřadnice jsou $F = [-e; 0]$, $G = [e; 0]$. Uvažujme bod $X = [x; y]$, který splňuje podmínku $||FX| - |GX|| = 2a$. V souřadnicích je tedy

$$|\sqrt{(x+e)^2 + y^2} - \sqrt{(x-e)^2 + y^2}| = 2a$$

a umocněním dostaneme po jednoduché úpravě



Obr. 18.2

$$\sqrt{(x^2 + y^2 + e^2)^2 - 4e^2x^2} = (x^2 + y^2 + e^2) - 2a^2\,.$$

Tuto rovnici opět umocníme a po úpravě dostaneme

$$x^2(a^2 - e^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2)\,.$$

Po dosazení $b^2 = e^2 - a^2$ a vydělení a^2b^2 dostaneme, že souřadnice bodů splňujících podmínky naší věty vyhovují rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,, \tag{18.2}$$

tj. leží na hyperbole s délkami poloos a, b.

Naopak uvažujme reálný bod X, který leží na hyperbole o rovnici (18.2), tj. jeho souřadnice $[x; y]$ splňují rovnici (18.2). Snadno se přesvědčíme, že $||FX| - |GX|| = 2a$, kde $F = [-e; 0]$, $G = [e; 0]$, tj. reálné body hyperboly splňují podmínky naší věty, a tedy množina bodů v $\mathcal{E}_2$ určená podmínkou $||FX| - |GX|| = 2a$ je právě reálná část hyperboly. □

Poznámka 18.2. Body F, G z předchozí věty se nazývají *ohniska hyperboly*. Číslo e se nazývá *délková excentricita (výstřednost) hyperboly*. ♢

Věta 18.3. *Nechť F je bod a d je přímka v $\mathcal{E}_2$ taková, že $F \notin d$, $v(F, d) = p$. Potom množina bodů X v $\mathcal{E}_2$ takových, že $|FX| = v(X, d)$, je reálná část paraboly s parametrem p.*

Důkaz.

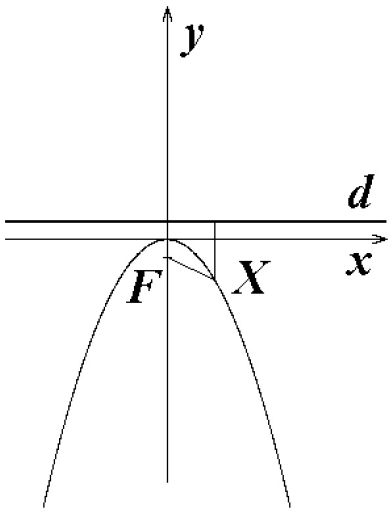
Zvolme ortonormální repér tak, že bod F leží na ose y a přímka d je rovnoběžná s osou x a $F = [0; -p/2]$, $d : y + p/2 = 0$. Uvažujme bod $X = [x; y]$, který splňuje podmínku $|FX| = v(X, d)$. V souřadnicích je tedy

$$\sqrt{x^2 + (y + \frac{p}{2})^2} = |y - \frac{p}{2}|$$

a umocněním dostaneme po jednoduché úpravě

$$x^2 = -2py\,, \tag{18.3}$$

tj. bod X leží na parabole s parametrem p.



Obr. 18.3

Naopak uvažujme reálný bod X, který leží na parabole o rovnici (18.3), tj. jeho souřadnice $[x; y]$ splňují rovnici (18.3). Snadno se přesvědčíme, že $|FX| = v(X, d)$, kde $F = [0; -p/2]$ a $d : y = p/2$, tj. reálné body paraboly splňují podmínky naší věty, a tedy množina bodů v $\mathcal{E}_2$ určená podmínkou $|FX| = v(X, d)$ je právě reálná část paraboly. □

Poznámka 18.3. Bod F z předchozí věty se nazývá *ohnisko paraboly* a přímka d se nazývá *řídící přímka paraboly*. Číslo $p = v(F, d)$ je *parametr paraboly*. ♢

Věta 18.4. *Nechť F je bod a d je přímka v $\mathcal{E}_2$ a nechť $k > 0$ je reálné číslo. Potom množina bodů X v $\mathcal{E}_2$ takových, že $|FX| = k\, v(X, d)$, je reálná část kuželosečky, která je*

a) reálnou elipsou, jestliže $F \notin d$ a $k < 1$,

b) parabolou, jestliže $F \notin d$ a $k = 1$,

c) hyperbolou, jestliže $F \notin d$ a $k > 1$,

d) komplexně sdruženými různoběžkami, jestliže $F \in d$ a $k < 1$,

e) dvojnásobnou přímkou, jestliže $F \in d$ a $k = 1$,

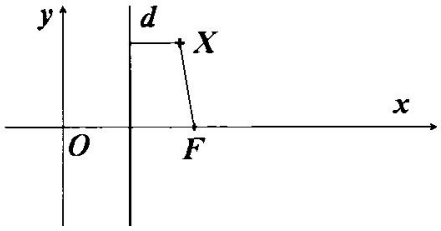
f) dvojicí reálných různoběžek, jestliže $F \in d$ a $k > 1$.

Důkaz.

Zvolme ortonormální repér tak, že bod F leží na ose x a přímka d je rovnoběžná s osou y a $F = [e;0]$, $d : x - c = 0$, $e \geq c$. Uvažujme bod $X = [x;y]$, který splňuje podmínku $|FX| = k \cdot v(X,d)$. V souřadnicích je tedy

$$\sqrt{(x-e)^2 + y^2} = k\,|x - c|$$

a umocněním dostaneme po úpravě



Obr. 18.4

$$x^2(1-k^2) - 2(e - k^2c)x + e^2 - k^2c^2 + y^2 = 0\,, \tag{18.4}$$

což je rovnice kuželosečky, a tedy množina bodů, které jsou určeny podmínkami naší věty, je podmnožinou reálné části kuželosečky.

A) Nechť nejdříve $F \in d$ a zvolme počátek souřadnic do bodu F, tj. $e = c = 0$. Potom (18.4) má tvar

$$x^2(1-k^2) + y^2 = 0\,. \tag{18.5}$$

Pro $k < 1$ je (18.5) rovnicí komplexně sdružených různoběžných přímek, které mají jediný reálný bod F.

Pro $k > 1$ je (18.5) rovnicí reálných různoběžných přímek, které se protínají v bodě F.

Pro $k = 1$ je (18.5) rovnicí reálné dvojnásobné přímky $y = 0$, která prochází bodem F.

B) Nechť $F \notin d$. Z tvaru rovnic (18.4) je zřejmé, že množina bodů určená naší větou je symetrická podle souřadné osy x, tj. tato množina je podmnožinou reálné části kuželosečky, jejíž jedna osa leží na ose x.

Zvolme nejdříve jako počátek souřadné soustavy průsečík kuželosečky (18.4) s osou x, tj. vrchol kuželosečky. To nastává právě tehdy, když $e^2 = k^2c^2$. Označme jako $p = e - c$. Potom při naší volbě je $p > 0$. Volme $e = -kc$ a po dosazení do (18.4) dostaneme rovnici

$$y^2 = 2kpx + (k^2 - 1)x^2\,. \tag{18.6}$$

Z (18.6) snadno vidíme, že pro $k = 1$ je kuželosečka parabolou s parametrem p.

Zvolme nyní počátek souřadné soustavy tak, aby rovnice (18.4) neobsahovala lineární člen x. To lze pouze za předpokladu, že $k \neq 1$ použitím posunutí počátku souřadné soustavy ve směru osy x s transformací

$$x = x' + \frac{e - k^2c}{1 - k^2}, \quad y = y'\,.$$

Potom má kuželosečka rovnici

$$x'^2(1-k^2) + y'^2 = \frac{k^2(e-c)^2}{1-k^2}\,. \tag{18.7}$$

Snadno se vidí, že pro $k < 1$ určuje rovnice (18.7) reálnou elipsu a pro $k > 1$ hyperbolu.

Podobně jako v předchozích větách se dokáže, že reálné body kuželoseček o rovnicích (18.5) – (18.7) splňují podmínky naší věty. □

Poznámka 18.4. Je–li $F \notin d$, nazývá se bod F z předchozí věty *ohnisko kuželosečky* a přímka d se nazývá *řídící přímka kuželosečky*. V kanonických souřadnicích se snadno vidí, že řídící přímka je polárou příslušného ohniska. Číslo $p = v(F, d)$ se nazývá *parametr kuželosečky*. Číslo k se nazývá *číselnou excentricitou (výstředností) kuželosečky*. ♢

Poznámka 18.5. V důkazu Věty 18.4 jsme použili různých tvarů rovnic regulární kuželosečky. Rovnice (18.7) se nazývá *středová rovnice kuželosečky* (počátek souřadnicového repéru je středem kuželosečky), která se dá použít jen pro středové kuželosečky. Rovnice (18.6) se nazývá *vrcholová rovnice kuželosečky* (počátek souřadnicového repéru je vrcholem kuželosečky), která se běžně používá pro paraboly. Z tvaru rovnice (18.4) můžeme snadno odvodit také *ohniskovou rovnici kuželosečky* (počátek souřadnicového repéru je ohniskem kuželosečky). Tuto rovnici dostaneme z (18.4) při $e = 0$, tj.

$$x^2 + y^2 = k^2(x + p)^2 .$$

19 Cvičení

V následujících cvičeních se souřadnice a rovnice vztahují k dané geometrické bázi projektivní roviny.

19.1. Rozhodněte, zda kuželosečka k je regulární nebo singulární:

a) $k : 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 + x_3^2 = 0$,

b) $k : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 = 0$,

c) $k : 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3 = 0$,

d) $k : x_1^2 + 4x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3 = 0$.

{ a) regulární, b) singulární hodnosti 2,
c) singulární hodnosti 1, d) singulární hodnosti 2 }

19.2. Vypočtěte společné body přímky p a kuželosečky k:

a) $p : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$, $k : x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 3x_1x_3 + 3x_2x_3 = 0$,

b) $p : 5x_1 - x_2 - 5x_3 = 0$, $k : x_1^2 - 3x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 6x_2x_3 = 0$.

{ a) $P_1 = (1; 0; 1)$, $P_2 = (-1; 1; 1)$,
b) $P_1 = (1; 0; 1)$, $P_2 = (1; -5; 2)$ }

19.3. Určete vzájemnou polohu přímky zadané body $A = (2; -1; 3)$, $B = (0; 0; 1)$ a kuželosečky

$k : x_1^2 - 2x_2^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 6x_2x_3 = 0$.

{ Přímka je tvořící přímkou kuželosečky }

19.4. Určete singulární body kuželoseček ze cvičení 19.1.

{ a) nemá singulární body, b) $(-1;0;1)$,
c) přímka singulárních bodů $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$,
d) $(-2;1;0)$ }

19.5. Ukažte, že body $A = (4;0;1)$ a $B = (4;-3;1)$ jsou polárně sdružené (konjugované) vzhledem ke kuželosečce
$k : 9x_1^2 + 16x_2^2 - 144x_3^2 = 0$.

19.6. Na přímce $p : x_1+3x_2+x_3 = 0$ najděte bod polárně sdružený s bodem $(5;1;1)$ vzhledem ke kuželosečce
$k : 6x_1^2 + 9x_2^2 - 7x_3^2 - 6x_1x_2 - 12x_1x_3 + 14x_2x_3 = 0$.

{ $(-7;2;1)$ }

19.7. Určete rovnice tečen kuželosečky
$k : 3x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 + 3x_1x_3 - 4x_2x_3 = 0$
v bodech $T_1 = (-2;1;1)$ a $T_2 = (-2;3;1)$.

{ $t_1 : 7x_1 + 4x_2 + 10x_3 = 0$, $t_2 : 3x_1 - 4x_2 + 18x_3 = 0$ }

19.8. Ukažte, že přímka t je tečnou kuželosečky k a určete bod dotyku:
a) $t : 4x_1 + x_2 - x_3 = 0$, $k : 3x_1^2 - x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3 = 0$,
b) $t : 7x_1 + 4x_2 + 10x_3 = 0$, $k : 3x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 + 3x_1x_3 - 4x_2x_3 = 0$.

{ a) $T = (0;1;1)$; b) $T = (2;-1;-1)$ }

19.9. Určete podmínku, aby přímka $t : x_1 + x_2 + ax_3 = 0$ byla tečnou kuželosečky
$k : x_1^2 + x_2^2 - 3x_3^2 + x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2x_3 = 0$.

{ $3a^2 - 10a - 13 = 0$ }

19.10. Určete rovnici spojnice bodů dotyku tečen vedených z bodu $(3;1;1)$ ke kuželosečce
$k : 3x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 = 0$.

{ Hledaná spojnice bodů dotyku je pólárou daného bodu, tj. $5x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$ }

19.11. Pomocí transformace projektivních homogenních souřadnic určete normální rovnice a projektivní typ kuželosečky k ze cvičení 19.1. Určete transformační rovnice, které převádějí rovnici kuželosečky do normálního tvaru.

{ a) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 0$; reálná regulární kuželosečka; $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 + y_3$, $x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 + y_2 + 2y_3$,
b) $y_1^2 + y_2^2 = 0$; dvojice komplexně sdružených přímek; $x_1 = y_1 - y_3$, $x_2 = y_2$, $x_3 = y_3$,
c) $y_1^2 = 0$; dvojnásobná přímka; $x_1 = y_2$, $x_2 = y_1 + 2y_2 + y_3$, $x_3 = y_3$,
d) $y_1^2 - y_2^2 = 0$; dvojice reálných přímek; $x_1 = y_1 + \frac{1}{2}y_2 - 2y_3$, $x_2 = 2y_3$, $x_3 = y_2$ }

V následujících cvičeních se souřadnice a rovnice vztahují k danému afinnímu repéru v afinní rovině.

19.12. Určete rovnici kuželosečky k, která prochází body $A = [0;0]$, $B = [0;3]$, $C = [6;0]$, $D = [2;2]$, $E = [-2;1]$.

{ $k : x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x - 12y = 0$ }

19.13. Určete průnik kuželosečky

$k : x^2 - 2xy - 3y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$

s přímkou p:

a) $p : 5x - y - 5 = 0$,

b) $p : x + 3y = 0$,

c) $p : x + 4y - 1 = 0$,

d) $p : x - 3y = 0$.

{ a) dva reálné různé body $[1;0]$, $[\frac{1}{2};-\frac{5}{2}]$,
b) dva komplexně sdružené body $[\frac{3}{4(1\pm i\sqrt{3})};-\frac{1}{4(1\pm i\sqrt{3})}]$,
c) dvojnásobný bod [1;0],
d) $[\frac{1}{2};\frac{1}{6}]$, druhý průsečík je nevlastní bod směru $\langle(3;1)\rangle$
}

19.14. Určete singulární body kuželosečky k:

a) $k : 2x^2 - xy - y^2 - 15x + 3y - 18 = 0$,

b) $k : x^2 + xy - y - 1 = 0$,

c) $k : x^2 - 2xy + y^2 + x + y = 0$.

{ a) nemá singulární body, b) $[1;-2]$,
c) nevlastní singulární bod směru $\langle(1;1)\rangle$ }

19.15. Určete poláru p bodu P vzhledem ke kuželosečce k:

a) $P = [-2;1]$, $k : 2x^2 - xy - y^2 - 15x + 3y - 18 = 0$,

b) $P = [1;-1]$, $k : 9x^2 - 4xy + 6y^2 + 6x - 8y + 2 = 0$,

c) P je nevlastní bod určený směrem $\langle(-1;1)\rangle$,
$k : 5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$.

{ a) $p : 24x - 3y + 3 = 0$, b) $p : 14x - 12y + 9 = 0$,
c) $p : x - 2y + 4 = 0$ }

19.16. Bodem M veďte tečny ke kuželosečce k. Určete také souřadnice bodů dotyku:

a) $M = [0; 0]$, $k : 3x^2 + 7xy + 5y^2 + 4x + 5y + 1 = 0$,
b) $M = [3; 4]$, $k : 2x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 6y - 3 = 0$,
c) $M = [-2; 1]$, $k : 3x^2 + 2xy + 2y^2 + 3x - 4y = 0$.

{ a) $t_1 : 2x + 5y = 0$, $T_1 = [-1; \frac{2}{5}]$; $t_2 : 2x + y = 0$,
$T_2 = [\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}]$,
b) $t_1 : 7x - 2y - 13 = 0$, $T_1 = [1; -3]$; $t_2 : x - 3 = 0$,
$T_2 = [-9; -1]$,
c) $M \in k$, proto má úloha jediné řešení $t : 7x+4y+10 =$
0 a bod dotyku je bod M }

19.17. Určete rovnice tečen kuželosečky

$k : x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y - 3 = 0$,

které jsou rovnoběžné s přímkou $3x + 3y - 5 = 0$. Určete také souřadnice bodů dotyku.

{ $t_1 : x + y - 1 = 0$, $T_1 = [1; 0]$; $t_2 : 3x + 3y + 13 = 0$,
$T_2 = [-\frac{5}{3}; -\frac{8}{3}]$ }

19.18. Určete rovnici kuželosečky k, která prochází počátkem souřadné soustavy, dotýká se přímky $4x + 3y + 2 = 0$ v bodě [1;-2] a přímky $x - y - 1 = 0$ v bodě [0;-1].

{ $k : 6x^2 + 3xy - y^2 + 2x - y = 0$ }

19.19. Určete střed kuželosečky k:

a) $k : x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$,
b) $k : 4x^2 + 10xy + 5y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$,
c) $k : x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$,
d) $k : x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 4 = 0$.

{ a) [7;5], b) $[1; -\frac{3}{5}]$, c) nemá vlastní střed, nevlastní
střed je určen směrem vektoru $(1; 1)$, d) přímka středů
$x + y + 1 = 0$ }

19.20. Určete asymptoty kuželosečky k:

a) $k : 3x^2 + 10xy + 7y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$,
b) $k : 10xy - 2y^2 + 6x + 4y - 21 = 0$,
c) $k : 2x^2 - 3xy - x + 3y + 4 = 0$.

{ a) $a_1 : 6x + 14y + 11 = 0$, $a_2 : 2x + 2y - 1 = 0$,
b) $a_1 : 5y + 3 = 0$, $a_2 : 25x - 5y + 13 = 0$,
c) $a_1 : 2x - 3y + 1 = 0$, $a_2 : x - 1 = 0$ }

19.21. Určete rovnici kuželosečky k, která prochází bodem $A = [3; 0]$, směry určené vektory $(3; 2)$ a $(1; -1)$ jsou směry asymptot a kuželosečka má střed v bodě $[0; -1]$.

$\{\ k : 2x^2 - xy - 3y^2 - x - 6y - 15 = 0\ \}$

19.22. Určete průměr kuželosečky k

a) procházející bodem $M = [1; -2]$, $k : 3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$,

b) rovnoběžný s přímkou $2x - y + 5 = 0$, $k : 2x^2 + 4xy + 5y^2 - 8x + 6 = 0$.

$\{$ a) $x + 2y + 3 = 0$, b) $2x - y - 8 = 0\ \}$

19.23. Určete společný průměr dvou kuželoseček

$k_1 : x^2 - xy - y^2 - x - y = 0$,

$k_2 : x^2 + 2xy + y^2 - x + y = 0$.

$\{\ 5x + 5y + 2 = 0\ \}$

19.24. Pro kuželosečky ze cvičení 19.19 určete normální tvar rovnic, afinní typ, normovaný polární afinní repér a transformace afinních nehomogenních souřadnic, které převádějí danou rovnici kuželosečky do normálního tvaru.

$\{$ a) $x'^2 + y'^2 - 1 = 0$; reálná elipsa; $\langle P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\rangle$, kde $P = [7; 5]$, $\mathbf{e}_1 = (\sqrt{26}; 0)$, $\mathbf{e}_2 = (\sqrt{26}; \sqrt{26})$; $x = \sqrt{26}x' + \sqrt{26}y' + 7$, $y = \sqrt{26}y' + 5$,

b) $x'^2 - y'^2 + 1 = 0$; hyperbola; $\langle P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\rangle$, kde $P = [1; -\frac{3}{5}]$, $\mathbf{e}_1 = (0; \frac{4}{5})$, $\mathbf{e}_2 = (\frac{4}{\sqrt{5}}; \frac{-4}{\sqrt{5}})$; $x = \frac{4}{\sqrt{5}}y' + 1$, $y = \frac{4}{5}x' - \frac{4}{\sqrt{5}}y' - \frac{3}{5}$,

c) $x'^2 - 2y' = 0$; parabola; $\langle P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\rangle$, kde $P = [\frac{-1}{10}; \frac{19}{10}]$, $\mathbf{e}_1 = (1; 0)$, $\mathbf{e}_2 = (\frac{1}{5}; \frac{1}{5})$; $x = x' + \frac{1}{5}y' + \frac{19}{10}$, $y = \frac{1}{5}y' - \frac{1}{10}$,

d) $x'^2 - 1 = 0$; dvojice reálných rovnoběžných přímek; $\langle P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\rangle$, kde $P = [-1; 0]$, $\mathbf{e}_1 = (\sqrt{5}; 0)$, $\mathbf{e}_2 = (-1; 1)$; $x = \sqrt{5}x' - y' - 1$, $y = y'$ $\}$

V následujících cvičeních se souřadnice a rovnice vztahují k danému ortonormálnímu repéru v euklidovské rovině.

19.25. Určete charakteristickou rovnici, hlavní čísla a hlavní směry kuželosečky k:

a) $k : 3x^2 + 4xy + 5y^2 + 2x - y + 7 = 0$,

b) $k : x^2 + 6xy - 7y^2 + x = 0$,

c) $k : x^2 + 4xy + 4y^2 + 2x + 3y = 0$,

d) $k : x^2 + y^2 - 4x + 6y - 2 = 0$.

$\{$ a) $\lambda^2 - 8\lambda + 11 = 0$; $\lambda_1 = 4 + \sqrt{5}$ odpovídá $\mathbf{u}_1 = (2; 1 + \sqrt{5})$, $\lambda_2 = 4 - \sqrt{5}$ odpovídá $\mathbf{u}_1 = (2; 1 - \sqrt{5})$,

b) $\lambda^2 + 6\lambda - 16 = 0$; $\lambda_1 = 2$ odpovídá $\mathbf{u}_1 = (3; 1)$, $\lambda_2 = -8$ odpovídá $\mathbf{u}_1 = (-1; 3)$,

c) $\lambda^2 - 5\lambda = 0$; $\lambda_1 = 5$ odpovídá $\mathbf{u}_1 = (1; 2)$, $\lambda_2 = 0$ odpovídá $\mathbf{u}_1 = (2; -1)$,

d) $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$; $\lambda_{1,2} = 1$ a každý směr je hlavní $\}$

19.26. Určete odchylku danou hlavními směry kuželosečky k a směry os daného ortonormálního repéru:

a) $k : 32x^2 + 52xy - 7y^2 + 180 = 0$,
b) $k : 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 32 = 0$,
c) $k : 5x^2 - 6xy + 5y^2 + 8 = 0$,
d) $k : 17x^2 - 12xy + 8y^2 = 0$,
e) $k : 5x^2 + 24xy - 5y^2 = 0$.

{ a) $\tan(\alpha) = \frac{1}{2}$, b) $\alpha = 45^o$, c) $\alpha = 45^o$,
d) $\tan(\alpha) = \frac{1}{2}$, e) $\tan(\alpha) = \frac{2}{3}$ }

19.27. Určete osy kuželosečky k:

a) $k : 5x^2 + 24xy + 75y^2 - 36x + 6y + 1 = 0$,
b) $k : 7x^2 + 26xy + 7y^2 + 42x = 0$.

{ a) $o_1 : x + 6y = 0$, $o_2 : 6x - y - 37 = 0$,
b) $o_1 : 20x + 20y + 21 = 0$, $o_2 : 2x - 2y - 7 = 0$ }

19.28. Určete osy a vrcholy kuželosečky k:

a) $k : x^2 - 3xy + y^2 + 1 = 0$,
b) $k : 3x^2 + 2xy + 3y^2 + 6x - 2y - 5 = 0$,
c) $k : x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$,
d) $k : 3y^2 + 2x - 6y + 5 = 0$.

{ a) $o_1 : x - y = 0$, $V_1 = [1; 1]$, $V_2 = [-1; -1]$; $o_2 : x + y = 0$, $V_3 = [-\frac{i}{\sqrt{5}}; \frac{i}{\sqrt{5}}]$, $V_4 = [\frac{i}{\sqrt{5}}; -\frac{i}{\sqrt{5}}]$,
b) $o_1 : 2x + 2y + 1 = 0$, $V_1 = [\frac{-5-\sqrt{38}}{4}; \frac{3+\sqrt{38}}{4}]$, $V_2 = [\frac{-5+\sqrt{38}}{4}; \frac{+3-\sqrt{38}}{4}]$; $o_2 : x - y + 2 = 0$, $V_3 = [\frac{-5+\sqrt{19}}{4}; \frac{3+\sqrt{19}}{4}]$, $V_4 = [\frac{-5-\sqrt{19}}{4}; \frac{3-\sqrt{19}}{4}]$,
c) jediná osa $o : x + 2y - 1 = 0$, jediný vrchol $V = [\frac{1}{5}; \frac{2}{5}]$,
d) jediná osa $o : y - 1 = 0$, jediný vrchol $V = [-1; 1]$ }

19.29. Pomocí transformací kartézských souřadnic určete typ a kanonickou rovnici (viz Věta 17.3) kuželosečky k. Určete také transformaci kartézských souřadnic, která převede rovnici kuželosečky do kanonického tvaru:

a) $k : 3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$,
b) $k : 25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$,
c) $k : 4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$,
d) $k : 7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$,
e) $k : 19x^2 + 6xy + 11y^2 + 38x + 6y + 29 = 0$,
f) $k : 5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0$,
g) $k : 9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$,
h) $k : 9x^2 + 12xy + 4y^2 - 24x - 16y + 3 = 0$,
i) $k : 16x^2 - 24xy + 9y^2 - 160x + 120y + 425 = 0$.

{ a) hyperbola; $x'^2 - \frac{y'^2}{4} = 1$; $x = \frac{x'-y'}{\sqrt{2}} + 2,\ y = \frac{x'+y'}{\sqrt{2}} - 1$,
b) elipsa; $\frac{x'^2}{16} + \frac{y'^2}{9} = 1$; $x = \frac{x'-y'}{\sqrt{2}} - 1,\ y = \frac{x'+y'}{\sqrt{2}} + 1$,
c) hyperbola; $\frac{x'^2}{9} - \frac{y'^2}{36} = 1$; $x = \frac{x'-2y'}{\sqrt{5}} + 3,\ y = \frac{2x'+y'}{\sqrt{5}} - 4$;
d) dvojice různoběžných přímek; $x'^2 - 4y'^2 = 0$; $x = \frac{x'+3y'}{\sqrt{10}} - 2,\ y = \frac{-3x'+y'}{\sqrt{10}}$,
e) imaginární elipsa; $x'^2 + 2y'^2 = -1$; $x = \frac{x'+3y'}{\sqrt{10}} - 1$, $y = \frac{-3x'+y'}{\sqrt{10}}$,
f) komplexně sdružené různoběžky; $2x'^2 + 3y'^2 = 0$; $x = \frac{x'-y'}{\sqrt{2}},\ y = \frac{x'+y'}{\sqrt{2}} - 2$,
g) parabola; $y'^2 = 2x'$; $x = \frac{-4x'+3y'}{5} - 3,\ y = \frac{-3x'-4y'}{5} + 2$,
h) dvojice reálných rovnoběžek; $x'^2 = 1$; $x = \frac{3x'-2y'}{\sqrt{13}} + \frac{4}{\sqrt{13}},\ y = \frac{2x'+3y'}{\sqrt{13}}$,
i) dvojice komplexně sdružených rovnoběžek; $y'^2 = -1$; $x = \frac{3x'-4y'}{5},\ y = \frac{4x'+3y'}{5} - 4$ }

19.30. Metodou invariantů určete typ středové kuželosečky k a délky jejích poloos:

a) $k : 41x^2 + 24xy + 9y^2 + 24x + 18y - 36 = 0$,
b) $k : 8x^2 + 4xy + 5y^2 + 16x + 4y - 28 = 0$,
c) $k : 4x^2 + 24xy + 11y^2 + 64x + 42y + 51 = 0$,
d) $k : 12x^2 + 26xy + 12y^2 - 52x - 48y + 73 = 0$.

{ a) elipsa o poloosách délky 3 a 1,
b) elipsa o poloosách délky 3 a 2,
c) hyperbola o poloosách délky 2 a 1,
d) hyperbola o poloosách délky 5 a 1 }

19.31. Metodou invariantů ověřte, že kuželosečka k je parabolou a určete její parametr:

a) $k : 9x^2 + 24xy + 16y^2 - 120x + 90y = 0$,
b) $k : 9x^2 - 24xy + 16y^2 - 54x - 178y + 181 = 0$,
c) $k : x^2 - 2xy + y^2 + 6x - 14y + 29 = 0$,
d) $k : 9x^2 - 6xy + y^2 - 50x + 50y - 275 = 0$.

{ a) parabola s parametrem 3, b) parabola s parametrem 3,
c) parabola s parametrem $\sqrt{2}$, d) parabola s parametrem $\frac{\sqrt{10}}{2}$ }

19.32. Určete průnik kuželoseček k_1 a k_2:

a) $k_1 : 2x^2 + 2xy + y^2 - 6x + 2y - 8 = 0$,

$k_2 : x^2 - 11xy - y^2 + 27x - 11y + 26 = 0\,,$

b) $k_1 : 2x^2 - 3xy + 2y^2 - 2x - 2y = 0\,,$
$k_2 : 5x^2 + 16xy + 5y^2 - 5x - 5y = 0\,,$

c) $k_1 : 4x^2 - 12xy + 9y^2 + 4x - 6y + 1 = 0\,,$
$k_2 : 2x^2 + xy - 6y^2 - 5x + 11y - 3 = 0\,,$

d) $k_1 : x^2 - y^2 = 0\,,\ k_2 : xy - 1 = 0\,.$

{ a) Kuželosečky mají dva dvojnásobné průsečíky (mají v těchto bodech společnou tečnu) $[0;2],\ [-1;0]\,,$

b) dvojnásobný průsečík $[0;0]$, a dva jednonásobné reálné průsečíky $[0;1],\ [1;0]\,,$

c) přímka $p : 2x - 3y + 1 = 0\,,$

d) čtyři různé jednonásobné průsečíky, z toho dva reálné $[1;1]$, $[-1;-1]$ a dva komplexně sdružené $[i;-i],\ [-i;i]$ }

19.33. Je dána elipsa $e : 25x^2 + 4y^2 - 100 = 0$ a kružnice $k : x^2 + y^2 = r^2$. Určete, pro která r se elipsa s kružnicí

a) protínají ve čtyřech reálných různých bodech,

b) dotýkají,

c) protínají ve čtyřech imaginárních bodech.

{ a) $r < 2$ kružnice leží uvnitř elipsy, $r > 5$ elipsa leží uvnitř kružnice, b) $r = 2$ a $r = 5$, c) $r \in (2;5)$ }

19.34. Pro jaké c vytíná kuželosečka $k : 2x^2 - 3xy + y^2 - 7x + cy + 4 = 0$ na ose y tětivu délky 3.

{ $\lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = -5$ }

19.35. Mostní oblouk má tvar oblouku paraboly. Jeho délka je $48\,m$ a výška $12\,m$. Určete parametr této paraboly.

{ $p = -24$ }

19.36. Dokažte, že tečna paraboly v libovolném bodě svírá stejný úhel s osou paraboly, jako se spojnicí ohniska a bodu dotyku.

19.37. Je dána hyperbola $h : b^2x^2 - a^2y^2 = 1$ a její bod $M[x;y]$. Vypočtěte plošný obsah rovnoběžníka, kterého dvě strany leží na asymptotách hyperboly a jedním jeho vrcholem je bod M.

{ Plošný obsah nezávisí na volbě bodu M a je roven $P = \dfrac{ab}{2}$ }

19.38. Regulární kuželosečka v euklidovské rovině má vlastní čísla
a) 1, 2;
b) 1, -2;
c) 1, 0.
O jakou kuželosečku se jedná?

{a) Reálná nebo imaginární elipsa; b) hyperbola; c) parabola. }

19.39. Určete množinu bodů, vekterých se tečny vedené ke kružnici o poloměru r protínají pod pravým úhlem.

{Hledaná množina je kružnice soustředná s danou kružnicí o poloměru $\sqrt{2}r$. Návod - řešte synteticky. }

19.40. Určete množinu bodů, vekterých se tečny vedené k parabole protínají pod pravým úhlem.

{Návod: Řešte analyticky pro parabolu $x^2 + 2\,py = 0$. Hledaná množina je přímka $y = \frac{1}{2}p$, tj. řídící přímka paraboly. }

Kapitola 5

TEORIE KVADRIK

20 Kvadriky v projektivním prostoru

Nechť $\mathcal{P}_3$ je 3-rozměrný reálný projektivní prostor s aritmetickým základem V_4. Nechť $V_4^{\mathbb{C}}$ je komplexní rozšíření prostoru V_4 definované v Části 1. Projektivní komplexní prostor s aritmetickým základem $V_4^{\mathbb{C}}$ budeme nazývat *komplexním rozšířením* projektivního prostoru $\mathcal{P}_3$ a označovat $\mathcal{P}_3^{\mathbb{C}}$. Reálný projektivní prostor $\mathcal{P}_3$ potom můžeme uvažovat jako podmnožinu (ne podprostor) v komplexním projektivním prostoru $\mathcal{P}_3^{\mathbb{C}}$, totiž bod $X = \langle \mathbf{x} \rangle \in \mathcal{P}_3$ právě tehdy, když existuje jeho aritmetický zástupce $\mathbf{x} \in V_4 \subset V_4^{\mathbb{C}}$.

Body X ležící v $\mathcal{P}_3 \subset \mathcal{P}_3^{\mathbb{C}}$ budeme nazývat *reálné body* a body z $\mathcal{P}_3^{\mathbb{C}}$ neležící v $\mathcal{P}_3$ budeme nazývat *imaginární body*. Podprostor v $\mathcal{P}_3^{\mathbb{C}}$, který vznikne jako komplexní rozšíření podprostoru v $\mathcal{P}_3$, budeme nazývat *reálný podprostor* a podprostor v $\mathcal{P}_3^{\mathbb{C}}$, který nevznikne jako komplexní rozříření podprostoru v $\mathcal{P}_3$, budeme nazývat *imaginární podprostor* v $\mathcal{P}_3^{\mathbb{C}}$.

Definice 20.1. Nechť F je nenulová kvadratická forma na V_4 a $F^{\mathbb{C}}$ je její komplexní rozšíření. Množinu bodů $X = \langle \mathbf{x} \rangle \in \mathcal{P}_3^{\mathbb{C}}$ takových, že $F^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = 0$, nazýváme *kvadrikou* v projektivním prostoru $\mathcal{P}_3^{\mathbb{C}}$ a značíme $K : F^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = 0$.

Poznámka 20.1. Podobnou úvahou jako v Poznámce 12.1 ukážeme, že naše definice má smysl. ♢

Poznámka 20.2. Snadno se nahlédne, že dvě nenulové kvadratické formy F a G určují tutéž kvadriku K právě tehdy, když existuje nenulové α takové, že $G = \alpha F$. ♢

Definice 20.2. Je-li $K \cap \mathcal{P}_3 = \emptyset$ (tj. kvadrika neobsahuje žádný reálný bod), nazýváme kvadriku K *formálně reálnou* nebo *imaginární*.

Uvažujme nyní geometrickou bázi

$$\langle O_1 = \langle \mathbf{u}_1 \rangle, \ldots, O_4 = \langle \mathbf{u}_4 \rangle, \, E = \langle \sum_{i=1}^{4} \mathbf{u}_i \rangle \rangle \tag{20.1}$$

prostoru $\mathcal{P}_3$. Z definice geometrické báze a vlastností komplexního rozšíření vektorového prostoru vyplývá, že (20.1) je současně i geometrickou bází projektivního prostoru $\mathcal{P}_3^{\mathbb{C}}$. Přitom bod X je reálný právě tehdy, když jeho projektivní homogenní souřadnice vzhledem ke geometrické bázi (20.1) jsou reálná čísla a je imaginární právě tehdy, když alespoň jedna souřadnice je komplexní číslo s nenulovou imaginární částí. Vyjádřeme nyní rovnici kvadriky $K : F^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = 0$ v geometrické bázi (20.1). Nechť bod X má v bázi (20.1) projektivní homogenní souřadnice $(x_1, \ldots, x_4)$. Potom bod $X \in K$ právě tehdy, když

$$F^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = f^{\mathbb{C}}(\sum_{i=1}^{4} x_i \mathbf{u}_i, \sum_{j=1}^{4} x_j \mathbf{u}_j) = \sum_{i,j=1}^{4} a_{ij} x_i x_j = 0, \tag{20.2}$$

kde $A = (a_{ij}) = (f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j))$ je matice kvadratické formy F v bázi $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_4$ prostoru V_4. Při ztotožnění X se sloupcovou maticí projektivních homogenních souřadnic, tj. $(X) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix}$, můžeme psát

$$K : \; (x_1 \ldots x_4) \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{14} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{14} & \ldots & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \,,$$

nebo zkráceně

$$K : \; (X)^T A (X) = 0. \tag{20.3}$$

Poznámka 20.3. Protože jsme v definici kvadriky použili komplexní rozšíření reálné kvadratické formy, jsou koeficienty a_{ij} v matici A kvadriky reálná čísla, zatímco proměnné souřadnice mohou být i čísla komplexní. ♢

Definice 20.3. *Hodností kvadriky* $K : \; F^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = 0$ rozumíme hodnost kvadratické formy F, tj. její matice A. Je-li kvadratická forma F regulární, nazveme kvadriku K *regulární* kvadrikou a je-li F singulární kvadratická forma, nazveme kvadriku K *singulární* kvadrikou.

Poznámka 20.4. Regulární kvadriky jsou tedy hodnosti 4, zatímco singulární kvadriky mohou být hodnosti 1,2 nebo 3. ♢

Věta 20.1. *Hodnost kvadriky nezávisí na zvolené geometrické bázi.*

Důkaz. Věta 20.1 je přímým důsledkem Věty 8.2. □

Poznámka 20.5. V Poznámce 12.5 jsme ukázali, že kuželosečka je určena 5 lineárně nezávislými podmínkami. Protože matice kvadriky má 10 členů, potřebujeme pro určení kvadriky celkem 9 lineárně nezávislých podmínek, kdy jako podmínku rozumíme takovou informaci o kvadrice, která v souřadnicích vede na lineární rovnici pro koeficienty matice kvadriky. Takováto jednoduchá podmínka je, že kvadrika prochází daným bodem. Takže kvadrika je určena 9 body takovými, že žádných 7 z nich neleží v jedné rovině. ♢

Definice 20.4. Nechť $K: F^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = 0$ je kvadrika v $\mathcal{P}_3^{\mathbb{C}}$. Body $P = \langle \mathbf{p} \rangle, R = \langle \mathbf{r} \rangle \in \mathcal{P}_3^{\mathbb{C}}$ se nazývají *polárně sdružené* (nebo *konjugované*) vzhledem ke kvadrice K, jestliže $f^{\mathbb{C}}(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = 0$. Bod P nazveme *singulárním bodem* kvadriky K, je-li polárně sdružen vzhledem ke K se všemi body prostoru $\mathcal{P}_3^{\mathbb{C}}$. Bod, který leží na kvadrice K a není jejím singulárním bodem, nazveme *regulárním bodem* kvadriky K.

Poznámka 20.6. Protože platí $f^{\mathbb{C}}(\alpha\mathbf{p}, \beta\mathbf{r}) = \alpha\beta f^{\mathbb{C}}(\mathbf{p}, \mathbf{r})$, nezávisí Definice 20.4 na volbě aritmetických zástupců bodů P a R. ♢

Věta 20.2. *Nechť K je kvadrika a P je její singulární bod. Nechť $R \in K$ a $R \neq P$. Potom*

(1) *Bod P leží na K.*

(2) *Všechny body přímky PR leží na K.*

Důkaz. Důkaz je totožný s důkazem Věty 12.3. □

Věta 20.3. *Nechť kvadrika $K: F^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = 0$ má v nějaké geometrické bázi prostoru $\mathcal{P}_3$ rovnici $(X)^T A(X) = 0$. Potom body $P = (p_1, \ldots, p_4)$ a $R = (r_1, \ldots, r_4)$ jsou polárně sdružené vzhledem ke K právě tehdy, když*

$$(P)^T A(R) = 0.$$

Bod P je singulárním bodem K právě tehdy, když matice $A(P)$ je nulová.

Důkaz. Důkaz je přímým důsledkem Definice 20.4. □

Rozepsáním podmínky pro singulární bod v projektivních homogenních souřadnicích dostaneme, že $P = (p_1, \ldots, p_4)$ je singulárním bodem K právě tehdy, když jsou jeho souřadnice řešením následující soustavy homogenních lineárních rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{14}x_4 &= 0\,, \\ &\vdots \\ a_{14}x_1 + \cdots + a_{44}x_4 &= 0\,, \end{aligned} \tag{20.4}$$

tj. $F_1(\mathbf{x}) = 0$,...,$F_4(\mathbf{x}) = 0$.

Důsledek 20.1. *Regulární kvadrika nemá žádný singulární bod. Singulární kvadrika hodnosti h ($h = 1, 2, 3$) má reálný podprostor singulárních bodů dimenze $(3-h)$.*

Důkaz. Důkaz je přímým důsledkem podmínek pro řešitelnost soustavy (20.4). □

Věta 20.4. *Nechť $K : F^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = 0$ je kvadrika a $P = \langle \mathbf{p} \rangle$ je bod, který není singulárním bodem K. Pak množina všech bodů $X = \langle \mathbf{x} \rangle$ polárně sdružených s bodem P je rovina π s rovnicí $\pi : f^{\mathbb{C}}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = 0$.*

Důkaz. $P = \langle \mathbf{p} \rangle$ není singulárním bodem K. Potom $f^{\mathbb{C}}(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ je nenulová lineární forma na $V_4^{\mathbb{C}}$ a víme, že množina vektorů $\mathbf{x}$, které ji nulují, je podprostor $V_4^{\mathbb{C}}$ dimenze 3. Ten určuje projektivní podprostor v $\mathcal{P}_3^{\mathbb{C}}$ dimenze 2, tj. rovinu. □

Definice 20.5. Rovinu π z Věty 20.4 budeme nazývat *polární rovinou* bodu P vzhledem ke kvadrice K a naopak bod P budeme nazývat *pólem* roviny π.

V geometrické bázi $\langle O_1; \dots; O_4, E \rangle$ jsou body P, X dány projektivními homogenními souřadnicemi $P = (p_1; \dots; p_4), X = (x_1; \dots; x_4)$ a rovina π polárně sdružených bodů s bodem P má souřadnicové vyjádření $\pi : P^T A X = 0$, což můžeme přepsat ve tvaru

$$\pi : F_1(\mathbf{p})x_1 + \cdots + F_4(\mathbf{p})x_4 = 0\,.$$

Dostáváme tak obecné vyjádření polární roviny bodu P.

Věta 20.5. (O vzájemnosti pólu a polární roviny) *Nechť K je kvadrika a P, R jsou dva nesingulární body. Leží-li bod P v polární rovině bodu R, pak bod R leží v polární rovině bodu P.*

Důkaz. Důkaz je totožný s důkazem Věty 12.7. □

Poznámka 20.7. Pro regulární kvadriku K je přiřazení polární roviny vzájemně jednoznačné zobrazení z množiny bodů na množinu rovin. Opravdu, je-li $\alpha : a_1x_1 + \cdots + a_4x_4 = 0$ obecné vyjádření nějaké roviny v pevně zvolené geometrické bázi, potom souřadnice jejího pólu splňují soustavu rovnic $F_1(\mathbf{p}) = ka_1, \dots, F_4(\mathbf{p}) = ka_4$ a pro daný parametr k má tato soustava jediné řešení právě tehdy, když je matice A regulární. Závislost na parametru k je lineární, tj. řešení je jednodimenzionálním podprostorem ve $V_4^{\mathbb{C}}$, tj. bodem v $\mathcal{P}_3^{\mathbb{C}}$. ♢

Věta 20.6. *Nechť $K : F^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = 0$ je regulární kvadrika a $A = \langle \mathbf{a} \rangle$, $B = \langle \mathbf{b} \rangle \in \mathcal{P}_3^{\mathbb{C}}$ jsou dva různé body. Označme α, β polární roviny bodů A, B. Potom polární roviny všech bodů přímky $p \equiv AB$ tvoří svazek rovin určený rovinami α, β. Naopak polární rovina libovolného bodu osy svazku $q = \alpha \cap \beta$ obsahuje přímku $p \equiv AB$.*

Důkaz. Protože $A \neq B$, je polární rovina α různá od polární roviny β (viz Poznámka 20.7). Potom roviny $\alpha : f^{\mathbb{C}}(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = 0$ a $\beta : f^{\mathbb{C}}(\mathbf{b}, \mathbf{x}) = 0$ tvoří svazek rovin. Uvažujme přímku $p \equiv AB$. Polární rovina libovolného bodu $P = kA + lB \in p$,

kde alespoň jedno číslo k, l je nenulové, je $\pi : f^{\mathbb{C}}(k\mathbf{a} + l\mathbf{b}, \mathbf{x}) = 0$ a z vlastností bilineárních forem je

$$\pi : k\, f^{\mathbb{C}}(\mathbf{a}, \mathbf{x}) + l\, f^{\mathbb{C}}(\mathbf{b}, \mathbf{x}) = 0\,,$$

což znamená, že π patří do svazku rovin určeného rovinami α a β.

Označme $q = \alpha \cap \beta$. Pro libovolný bod $Q \in q$ z Věty 20.5 vyplývá, že polární rovina bodu Q obsahuje body A, B. □

Poznámka 20.8. Pro regulární kvadriku K je tedy libovolné přímce p jednoznačně přiřazena přímka q jako osa svazku polárních rovin bodů přímky p. Přímka q se nazývá *polárně sdružená přímka k přímce p vzhledem ke kvadrice K*. Je–li q polárně sdružená přímka s přímkou p vzhledem ke kvadrice K, je i p polárně sdružená přímka s přímkou q vzhledem ke kvadrice K. Polární sdruženost přímek vzhledem k regulární kvadrice je tedy involutorní bijekcí na množině přímek prostoru $\mathcal{P}_3^{\mathbb{C}}$. ♢

Věta 20.7. *Nechť K je kvadrika a α je reálná rovina v $\mathcal{P}_3^{\mathbb{C}}$. Potom buď $\alpha \subseteq K$, nebo $\alpha \cap K$ je kuželosečka v α.*

Důkaz. Nechť α má aritmetický základ $U_3^{\mathbb{C}} \subseteq V_4^{\mathbb{C}}$. Potom $F|U_3$ je kvadratická forma na U_3. Je-li $F|U_3$ nulová kvadratická forma, je $\alpha \subseteq K$. Je-li $F|U_3$ nenulová kvadratická forma, určuje množina nulových vektorů formy $F^{\mathbb{C}}|U_3^{\mathbb{C}}$ kuželosečku v α. □

Věta 20.8. *Nechť K je kvadrika, která má právě jeden singulární bod P, a α je reálná rovina, která neprochází bodem P. Pak $K \cap \alpha$ je regulární kuželosečka v α.*

Důkaz. Důkaz provedeme sporem. Nechť je nejdříve rovina α součástí kvadriky K. Potom spojnice libovolného bodu α se singulárním bodem P je podle Věty 20.2 součástí K. To ale znamená, že celý prostor je součástí K, a to je ve sporu s Definicí 20.1. Je tedy podle Věty 20.7 $K \cap \alpha$ kuželosečka.

Nechť nyní $K : F^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = 0$. Předpokládejme, že $Q = \langle \mathbf{q} \rangle$ je singulárním bodem kuželosečky $K \cap \alpha$, tj. $f^{\mathbb{C}}(\mathbf{q}, \mathbf{x}) = 0$ pro všechny body $X = \langle \mathbf{x} \rangle \in \alpha$. Zvolme reálnou geometrickou bázi P, Q, R_1, R_2, $R_i \in \alpha$, $i = 1, 2$, prostoru $\mathcal{P}_3$, tj. $X = \beta P + \gamma Q + \delta_1 R_1 + \delta_2 R_2$, $X \in \mathcal{P}_3^{\mathbb{C}}$. Potom $f^{\mathbb{C}}(\mathbf{q}, \mathbf{x}) = \beta f^{\mathbb{C}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \gamma f^{\mathbb{C}}(\mathbf{q}, \mathbf{q}) + \delta_1 f^{\mathbb{C}}(\mathbf{q}, \mathbf{r}_1) + \delta_2 f^{\mathbb{C}}(\mathbf{q}, \mathbf{r}_2) = 0$, tj. Q je vzhledem ke K polárně sdružen se všemi body prostoru $\mathcal{P}_3^{\mathbb{C}}$ a je to tedy singulární bod kvadriky K. To je ovšem spor s předpokladem, že P je jediným singulárním bodem K, a tedy $K \cap \alpha$ musí být regulární kuželosečka. □

Věta 20.9. *Nechť K je kvadrika a p je reálná přímka v $\mathcal{P}_3^{\mathbb{C}}$. Potom buď $p \subseteq K$, nebo $p \cap K$ je dvojice bodů, které mohou být komplexně sdružené, reálné různé, nebo reálné totožné (dvojnásobný bod).*

Důkaz. Důkaz je totožný s důkazem Věty 12.8. □

Věta 20.10. *Nechť K je kvadrika, která má právě přímku singulárních bodů p, a q je reálná přímka, která nemá s přímkou p společné body. Pak $K \cap q$ je buď dvojice komplexně sdružených bodů, nebo dvojice reálných různých bodů.*

Důkaz. Důkaz provedeme sporem. Nechť je nejdříve přímka q součástí kvadriky K. Potom spojnice libovolného bodu q s libovolným bodem p je podle Věty 20.2 součástí K. To ale znamená, že celý prostor je součástí K, a to je ve sporu s Definicí 20.1.

Je tedy podle Věty 20.9 $K \cap q$ dvojice bodů. Nechť nyní $K : F^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = 0$. Předpokládejme, že $Q = \langle \mathbf{q} \rangle$ je dvojnásobným bodem $K \cap q$. Potom Q je polárně sdružen se všemi body přímky q. Opravdu, je-li $R \neq Q$ jiný bod přímky q, je paramatrické vyjádření q tvaru $X = \beta Q + \gamma R$ a $K \cap q$ vede na rovnici $2\beta\gamma f^{\mathbb{C}}(\mathbf{q}, \mathbf{r}) + \gamma^2 f^{\mathbb{C}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = 0$. Z předpokladu, že Q je dvojnásobný bod, musí mít tato rovnice dvojnásobný kořen $\gamma = 0$. To je možné pouze tehdy, když $f^{\mathbb{C}}(\mathbf{q}, \mathbf{r}) = 0$, a tedy Q a R jsou polárně sdruženy vzhledem ke K. Zvolíme-li nyní reálnou geometrickou bázi $\mathcal{P}_3$ se základními body P_1, P_2, Q, R, $P_i \in p$, dokážeme stejně jako v důkazu Věty 20.8, že Q je singulárním bodem K, a to je ve sporu s předpokladem, že množina singulárních bodů K je právě přímka p. Tedy $K \cap q$ je buď dvojice komplexně sdružených bodů, nebo dvojice reálných různých bodů. □

Úloha 20.1. Určete hodnost kvadriky K a pro singulární kvadriku určete množinu jejích singulárních bodů:

a) $K : x_1^2 - 2x_2^2 - 5x_4^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 + 6x_2x_4 = 0\,,$

b) $K : x_1^2 + 3x_2^2 + 8x_3^2 + 6x_4^2 + 2x_1x_2 + 8x_2x_3 - 4x_1x_4 + 8x_3x_4 = 0\,.$

Řešení: a) Matice kvadriky $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 3 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ má hodnost 4, tj. K je regulární kvadrika a nemá singulární body.

b) Matice kvadriky $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 4 \\ -2 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ má hodnost 2, tj. K je singulární kvadrika. Souřadnice singulárních bodů splňují soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \qquad\quad - 2x_4 &= 0\,, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 \qquad\quad &= 0\,, \\ 4x_2 + 8x_3 + 4x_4 &= 0\,, \\ -2x_1 \qquad + 4x_3 + 6x_4 &= 0\,. \end{aligned}$$

Řešením je vektorový podprostor $L((2;-2;1;0),(3;-1;0;1))$, který je aritmetickým základem přímky singulárních bodů o parametrické rovnici $p : X = k(2;-2;1;0) + l(3;-1;0;1)$. Obecná rovnice přímky singulárních bodů je potom

$$\begin{aligned} x_1 \quad - 2x_3 - 3x_4 &= 0\,, \\ x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0\,. \end{aligned}$$

Úloha 20.2. Určete polární rovinu bodu $P = (1; 2; 0; 1)$ vzhledem ke kvadrice

$K : x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_4 + 2x_3x_4 = 0\,.$

Řešení: Matice kvadriky $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Potom hodnoty přidružených lineárních forem pro bod P jsou $F_1(\mathbf{p}) = 1$, $F_2(\mathbf{p}) = 7$, $F_3(\mathbf{p}) = 1$, $F_4(\mathbf{p}) = -1$ a rovnice polární roviny je $\pi : x_1 + 7x_2 + x_3 - x_4 = 0$.

Úloha 20.3. Pro kvadriku z Úlohy 20.2 určete pól roviny

$\pi : x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0\,.$

Řešení: Souřadnice pólu $P = (p_1; p_2; p_3; p_4)$ jsou řešením soustavy lineárních rovnic

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 \qquad - 2p_4 &= k\,, \\ p_1 + 3p_2 \qquad\quad\; &= 2k\,, \\ -p_3 + p_4 &= -3k\,, \\ -2p_1 \qquad + p_3 + p_4 &= k\,. \end{aligned}$$

Soustavu vyřešíme v závislosti na parametru k. Dostaneme $p_1 = \frac{5}{4}k$, $p_2 = \frac{1}{4}k$, $p_3 = \frac{13}{4}k$, $p_4 = \frac{1}{4}k$ a volbou $k = 4$ dostaneme pól $P = (5; 1; 13; 1)$.

Úloha 20.4. Určete průsečíky kvadriky

$K : x_3^2 + x_1x_2 - x_2x_3 - 5x_1x_4 = 0$

s přímkou $p \equiv AB$, $A = (0; 5; 10; 1)$, $B = (-1; 3; 7; 0)$.

Řešení: Parametrická rovnice přímky p je $p : X = \alpha A + \beta B$, kde alespoň jedno z čísel α, β je nenulové, tj. $X = (-\beta; 5\alpha + 3\beta; 10\alpha + 7\beta; \alpha)$. Dosazením do rovnice kvadriky dostaneme po úpravě kvadratickou rovnici

$$2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + 3\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + 1 = 0\,,$$

s řešením $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_1 = -\frac{1}{2}$, $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_2 = -1$. Pro $\alpha_1 = 1, \beta_1 = -2$ dostaneme průsečík $P_1 = (2; -1; -4; 1)$ a pro $\alpha_2 = 1, \beta_2 = -1$ dostaneme průsečík $P_2 = (1; 2; 3; 1)$.

Úloha 20.5. Určete přímku polárně sdruženou s přímkou p vzhledem ke kvadrice K, kde p a K jsou zadány v Úloze 20.4.

Řešení: Polárně sdružená přímka q je osou svazku rovin určeného polárními rovinami bodů A, B. Tj. $q : 2x_2 - 3x_3 = 0$, $3x_1 - 8x_2 + 11x_3 + 5x + 4 = 0$.

Úloha 20.6. Určete průnik kvadriky K s rovinou ρ:

a) $K : 2x_1^2 - x_2^2 + 2x_4^2 + x_1x_2 + x_1x_3 - 4x_1x_4 + x_2x_3 - x_2x_4 - x_3x_4 = 0$;
$\rho : x_1 + x_2 - x_4 = 0\,,$

b) $K : x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1x_3 - x_1x_4 + 5x_2x_3 + 3x_2x_4 - x_3x_4 = 0$; $\rho : x_2 = 0$.

Řešení: a) Z rovnice roviny je $x_4 = x_1 + x_2$. Dosazením do rovnice kvadriky ověříme, že všechny body ρ vyhovují rovnici kvadriky K, a tedy $\rho \subset K$.

b) Dosadíme do rovnice kvadriky $x_2 = 0$ a dostaneme rovnici

$$x_1^2 + x_1x_3 - x_1x_4 - x_3x_4 = 0\,,$$

kterou upravíme na tvar

$$(x_1 + x_3)(x_1 - x_4) = 0.$$

Průnikem je potom singulární kuželosečka v rovině ρ, která je tvořena přímkami $p_1 : x_2 = 0$, $x_1 - x_3 = 0$ a $p_2 : x_2 = 0$, $x_1 - x_4 = 0$.

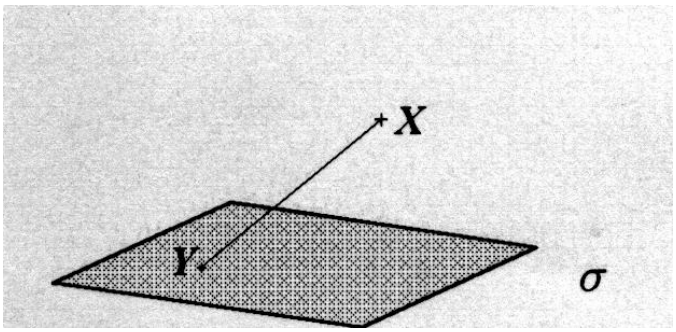
21 Projektivní klasifikace kvadrik

Věta 21.1. *Kvadrika hodnosti 1 je tvořena jedinou reálnou dvojnásobnou rovinou.*

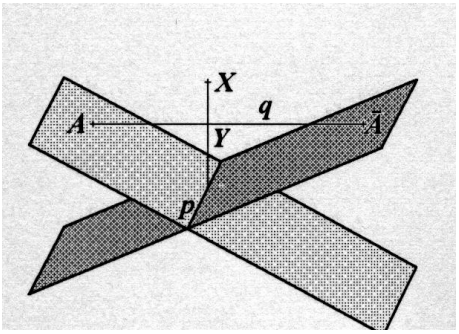
Důkaz. Kvadrika hodnosti 1 má podle Důsledku 20.1 právě reálnou rovinu σ singulárních bodů. Žádný další bod již na kvadrice nemůže ležet. Pokud by totiž bod X ležel na kvadrice a $X \notin \sigma$, pak podle Věty 20.2 by přímky určené bodem X a libovolným singulárním bodem $Y \in \sigma$ ležely na kvadrice (viz Obrázek 21.1). To by ovšem znamenalo, že všechny body prostoru leží na kvadrice, a to je ve sporu s Definicí 20.1. □

Věta 21.2. *Kvadrika hodnosti 2 je tvořena dvojicí rovin, které jsou buď komplexně sdružené, nebo reálné různé.*

Důkaz. Kvadrika hodnosti 2 má podle Důsledku 20.1 právě reálnou přímku p singulárních bodů. Uvažujme reálnou přímku q, která nemá s p žádný společný bod. Podle Věty 20.10 je průnik kvadriky a přímky q dvojice různých bodů, které jsou reálné různé, nebo komplexně sdružené. Označme je A, $\overline{A}$. Potom podle Věty 20.2 jsou roviny určené přímkou p a body A, $\overline{A}$ součástí kvadriky. Žádný další bod již na kvadrice neleží. Pokud by bod X byl bodem kvadriky a neležel v žádné z rovin (p, A), $(p, \overline{A})$, byla by i rovina (p, X) součástí kvadriky a její průsečík Y s přímkou q by byl třetí bod průniku q a kvadriky. To je ovšem ve sporu s Větou 20.10. □



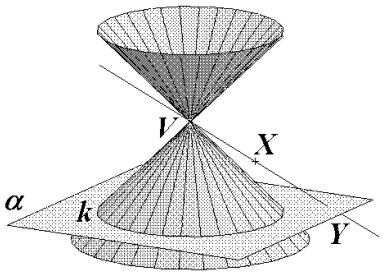
Obrázek 21.1



Obrázek 21.2

Definice 21.1. Nechť k je regulární kuželosečka v reálné rovině $\alpha \subset \mathcal{P}_3^{\mathbb{C}}$ a nechť $V \in \mathcal{P}_3^{\mathbb{C}}$ je reálný bod, který neleží v α. Množina bodů, které leží na spojnicích bodu V se všemi body kuželosečky k, se nazývá *(kvadratická) kuželová plocha*. Bod V se nazývá *vrchol* kuželové plochy a kuželosečka k se nazývá *řídící kuželosečka* kuželové plochy. Je–li k reálná regulární kuželosečka, hovoříme o *reálné kuželové ploše*, je–li k imaginární regulární kuželosečka, hovoříme o *imaginární kuželové ploše*.

Věta 21.3. *Kvadrika hodnosti 3 je kuželová plocha, která je buď imaginární, nebo reálná.*



Obrázek 21.3

Důkaz. Kvadrika hodnosti 3 má podle Důsledku 20.1 právě jeden singulární bod, označme ho V. Uvažujme reálnou rovinu α, která neobsahuje bod V. Podle Věty 20.8 je průnikem α a kvadriky regulární kuželosečka k. Potom podle Věty 20.2 je kuželová plocha určená řídící kuželosečkou k a bodem V součástí kvadriky. Žádný další bod již na kvadrice neleží. Pokud by bod X byl bodem kvadriky a neležel na této kuželové ploše, byla by i přímka (V, X) součástí kvadriky a její průsečík $Y \notin k$ s rovinou α by byl bod průniku α a kvadriky. (viz Obrázek 21.3). To je ovšem ve sporu s Větou 20.8. Pokud je k reálná kuželosečka, je kuželová plocha reálná. Pokud je k imaginární kuželosečka, je kuželová plocha imaginární (jejím jediným reálným bodem je vrchol V). □

Ve Větách 21.1 a 21.2 jsme dokázali, že kvadriky hodnosti jedna a dvě obsahují jako své podmnožiny roviny. Kvadriky hodnosti tři obsahují jako své podmnožiny přímky. Obecně budeme podprostor maximální dimenze, který je součástí kvadriky, nazývat *tvořícím podprostorem kvadriky*. K tomu, abychom mohli rozhodnout, zda i regulární kvadrika má reálný tvořící podprostor dimenze větší než nula, musíme dokázat následující pomocnou větu.

Věta 21.4. *Nechť má kvadrika K normální rovnici tvaru*

$$K : x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_h^2 = 0, \quad 2p \geq h,$$

kde $h \leq 4$ je hodnost K. Pak

1. *$(p-1)$ je největší číslo takové, že existuje reálný $(p-1)$-rozměrný podprostor ρ v $P_3^{\mathbb{C}}$, který nemá s K společný reálný bod.*

2. *$(3-p)$ je největší číslo takové, že existuje reálný $(3-p)$-rozměrný podprostor σ v $P_3^{\mathbb{C}}$, který je částí K.*

Důkaz. Existence:

1) Uvažujme reálný podprostor ρ určený obecnými rovnicemi

$$x_{p+1} = 0, \ldots, x_4 = 0.$$

Potom $\dim\rho = (p-1)$ a $K \cap \rho : x_1^2 + \cdots + x_p^2 = 0, x_{p+1} = 0, \ldots, x_4 = 0$. Tedy $K \cap \rho$ neobsahuje žádný reálný bod. Tím jsme dokázali existenci hledaného prostoru.

2) Uvažujme reálný podprostor $\sigma : x_1 = x_{p+1}, \ldots, x_{h-p} = x_h, x_{h-p+1} = 0, \ldots, x_p = 0$. Potom $\dim\sigma{=}(3-p)$ a $\sigma \subseteq K$, což dokazuje existenci hledaného prostoru.

Maximálnost dimenzí:

1) Nechť ρ' je libovolný reálný podprostor takový, že $\dim\rho' \geq p$. Pak $\dim(\rho' \cap \sigma) =$ - $\dim(\rho' + \sigma) + \dim\rho' + \dim\sigma \geq 0$. Protože $\sigma \subseteq K$, obsahuje $\rho' \cap K$ reálný podprostor dimenze ≥ 0, tj. alespoň reálný bod, a tedy $(p-1)$ je maximální dimenzí hledaných podprostorů.

2) Nechť σ' je libovolný reálný podprostor takový, že $\dim\sigma' \geq (4-p)$. Pak $\dim(\sigma' \cap \rho)$=-$\dim(\sigma' + \rho)$+$\dim\sigma'$+$\dim\rho \geq 0$, a tedy $(\sigma' \cap \rho)$ obsahuje alespoň jeden reálný bod. Protože ale ρ nemá s K žádný společný reálný bod, nemůže být σ' podmnožinou K, a tedy dimenze $(3-p)$ je maximální dimenzí hledaných podprostorů. □

Rovnice kvadriky v projektivních homogenních souřadnicích je dána souřadnicovým vyjádřením (20.2). Známá věta o převodu kvadratické formy na normální tvar má nyní následující geometrickou podobu:

Věta 21.5. (Projektivní klasifikace kvadrik) *Ke každé kvadrice K v $\mathcal{P}_3^{\mathbb{C}}$ existuje taková geometrická báze $\mathcal{P}_3$, že v ní má K jednu z následujících rovnic:*

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0\,, \tag{PK1}$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0\,, \tag{PK2}$$
$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0\,, \tag{PK3}$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0\,, \tag{PK4}$$
$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0\,, \tag{PK5}$$
$$x_1^2 + x_2^2 = 0\,, \tag{PK6}$$
$$x_1^2 - x_2^2 = 0\,, \tag{PK7}$$
$$x_1^2 = 0\,. \tag{PK8}$$

Důkaz. Tato věta je přímým důsledkem Věty 9.2 a dokáže se obdobně jako Věta 13.3. □

Definice 21.2. Rovnice kvadriky z Věty 21.5 se nazývá *normální rovnice* kvadriky. Geometrická báze, ve které má kvadrika normální rovnici, se nazývá *polární normovaná báze* kvadriky.

Poznámka 21.1. Kvadrika o rovnici (PK1) je regulární kvadrika. Z Věty 21.4 vyplývá, že neobsahuje žádný reálný bod a jedná se tedy o *imaginární regulární kvadriku*. Kvadrika s rovnicí (PK2) je regulární kvadrika, která podle Věty 21.4 obsahuje jako reálné tvořící podprostory pouze body. Tuto kvadriku budeme nazývat *regulární nepřímkovou kvadrikou*. Rovnice (PK3) určuje regulární kvadriku, která má podle Věty 21.4 reálné tvořící přímky, a proto se nazývá *regulární přímková kvadrika*.

Kvadriky určené rovnicemi (PK4) a (PK5) jsou singulární kvadriky hodnosti 3 a podle Věty 21.3 se jedná o kuželové plochy. Přitom pro (PK4) obsahuje tato kuželová plocha podle Věty 21.4 jediný reálný bod – vrchol – a všechny ostatní body jsou imaginární. Proto se (PK4) nazývá *imaginární kuželová plocha*. (PK5) obsahuje podle Věty 21.4 reálné tvořící přímky a jedná se tedy o *reálnou kuželovou plochu*.

Kvadriky určené rovnicemi (PK6) a (PK7) jsou singulární kvadriky hodnosti 2, které jsou podle Věty 21.2 tvořeny *dvojicí tvořících rovin*. Přitom pro (PK6) jsou tyto roviny imaginárně sdružené a pro (PK7) reálné. Podle Věty 21.4 obsahuje (PK6) přímku reálných bodů, a to průsečnici imaginárně sdružených tvořících rovin.

Kvadrika určená rovnicí (PK8) je singulární kvadrika hodnosti 1, která je podle Věty 21.1 tvořena jednou reálnou *dvojnásobnou tvořící rovinou*.

Úloha 21.1. Určete normální rovnici a typ (viz Poznámka 21.1) kvadriky K a nalezněte její polární normovanou bázi:

a) $K : x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_4 + 2x_3x_4 = 0\,,$

b) $K : x_1^2 + 3x_2^2 + 8x_3^2 + 6x_4^2 + 2x_1x_2 + 8x_2x_3 - 4x_1x_4 + 8x_3x_4 = 0\,.$

Řešení: Použijeme obdobnou metodu jako při převodu kvadratické formy na normální tvar.

a) Rovnici kvadriky upravíme na tvar

$$(x_1 + x_2 - 2x_4)^2 + 2(x_2 + x_4)^2 - (x_3 - x_4)^2 - 4x_4^2 = 0\,.$$

Potom transformace

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2 \qquad - 2x_4\,, \\ x_2' &= \quad \sqrt{2}x_2 \qquad + \sqrt{2}x_4\,, \\ x_3' &= \qquad\quad x_3 - x_4\,, \\ x_4' &= \qquad\quad\;\; 2x_4 \end{aligned}$$

převede rovnici kvadriky na tvar

$$K : (x_1')^2 + (x_2')^2 - (x_3')^2 - (x_4')^2 = 0\,,$$

což je normální rovnice regulární přímkové kvadriky. Z inverzní transformace

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1' - \frac{1}{\sqrt{2}}x_2' + \frac{3}{2}x_4', \\ x_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}x_2' - \frac{1}{2}x_4', \\ x_3 &= x_3' + \frac{1}{2}x_4', \\ x_4 &= \frac{1}{2}x_4' \end{aligned}$$

potom určíme polární normovanou bázi základními body $O_1 = (1;0;0;0)$, $O_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}};0;0)$, $O_3 = (0;0;1;0)$, $O_4 = (\frac{3}{2};-\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2})$.

b) Rovnici kvadriky upravíme na tvar

$$(x_1 + x_2 - 2x_4)^2 + 2(x_2 + 2x_3 + x_4)^2 = 0\,.$$

Potom transformace

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2 - 2x_4, \\ x_2' &= \sqrt{2}x_2 + 2\sqrt{2}x_3 + \sqrt{2}x_4, \\ x_3' &= x_3, \\ x_4' &= x_4 \end{aligned}$$

převede rovnici kvadriky na tvar

$$K : (x_1')^2 + (x_2')^2 = 0\,,$$

což je normální rovnice singulární kvadriky hodnosti 2, která je tvořena dvojicí komplexně sdružených rovin. Z inverzní transformace

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1' - \frac{1}{\sqrt{2}}x_2' + 2x_3' + 3x_4', \\ x_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}x_2' - 2x_3' - x_4', \\ x_3 &= x_3', \\ x_4 &= x_4' \end{aligned}$$

potom určíme polární normovanou bázi základními body $O_1 = (1;0;0;0)$, $O_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}};0;0)$, $O_3 = (2;-2;1;0)$, $O_4 = (3;-1;0;1)$.

22 Tečná rovina

V Definici 12.6 jsme definovali tečnu kuželosečky jako nesingulární přímku, která je buď tvořící přímkou kuželosečky, nebo ji protíná v regulárním dvojnásobném bodě. Podobným způsobem můžeme definovat i tečnu kvadriky.

Definice 22.1. Nechť K je kvadrika a t je přímka, která není přímkou singulárních bodů K. Řekneme, že t je *tečnou* K, jestliže buď $t \subset K$, nebo $t \cap K$ je dvojnásobný regulární bod kvadriky K. Regulární bod $t \cap K$ se nazývá *bodem dotyku tečny* t.

Poznámka 22.1. Tečnu definujeme jen pro kvadriky hodnosti větší než jedna. ♢

Věta 22.1. *Nechť K je kvadrika a T je její regulární bod. Potom všechny tečny kvadriky K s bodem dotyku T leží v polární rovině bodu T. Naopak, libovolná přímka, která leží v polární rovině bodu T a prochází bodem T, je tečnou kvadriky s bodem dotyku T.*

Důkaz. Nechť t je libovolná tečna kvadriky $K : F^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = 0$ s bodem dotyku T. Nechť $R \in t$, $R \neq T$, je libovolný bod. Potom $t : X = \beta T + \gamma R$. Bod X je bodem průniku $t \cap K$, jestliže

$$2\beta\gamma f^{\mathbb{C}}(\mathbf{t}, \mathbf{r}) + \gamma^2 f^{\mathbb{C}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = 0\,. \tag{22.1}$$

Z definice tečny vyplývá, že buď je rovnice 22.1 splněna identicky ($t \subset K$), nebo T je jediný dvojnásobný bod průniku. V prvním případě musí být $f^{\mathbb{C}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = f^{\mathbb{C}}(\mathbf{t}, \mathbf{r}) = 0$, ve druhém musí mít 22.1 dvojnásobný kořen $\gamma = 0$, to je ale možné pouze tehdy, když $f^{\mathbb{C}}(\mathbf{t}, \mathbf{r}) = 0$. V obou případech tedy $f^{\mathbb{C}}(\mathbf{t}, \mathbf{r}) = 0$ a T a R jsou polárně sdruženy, tj. R leží v polární rovině T. Protože přímku t a bod R jsme zvolili libovolně, je první část tvrzení dokázána.

Naopak, nechť t je přímka, která leží v polární rovině bodu T a $T \in t$. Nechť $R \in t$, $R \neq T$, je libovolný bod, tj. $t : X = \beta T + \gamma R$. Protože R je v polární rovině bodu T, je $f^{\mathbb{C}}(\mathbf{t}, \mathbf{r}) = 0$ a $t \cap K$ má vyjádření

$$\gamma^2 f^{\mathbb{C}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = 0\,. \tag{22.2}$$

Pro $f^{\mathbb{C}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = 0$ je $R \in K$ a (22.2) je splněna identicky, tj. $t \subset K$. Pro $f^{\mathbb{C}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \neq 0$ je $\gamma = 0$ dvojnásobný kořen 22.2, a tedy T je dvojnásobný bod $t \cap K$. Tedy t je tečna K s bodem dotyku T. □

Předchozí věta nás nyní opravňuje definovat tečnou rovinu kvadriky následujícím způsobem.

Definice 22.2. Nechť K je kvadrika a T je její regulární bod. Polární rovinu τ bodu T budeme nazývat *tečnou rovinou* kvadriky K. Bod T budeme nazývat *bodem dotyku* roviny τ a kvadriky K.

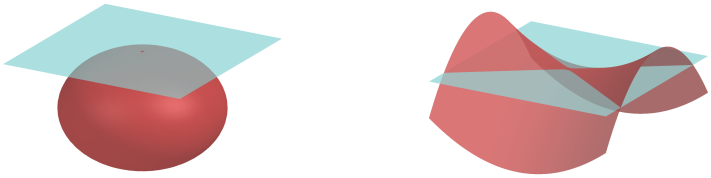
Věta 22.2. *Nechť K je kvadrika a T je její reálný regulární bod. Potom pro tečnou rovinu τ s bodem dotyku T platí buď $\tau \subset K$, nebo $\tau \cap K$ je singulární kuželosečka v τ, a navíc T je singulárním bodem této kuželosečky.*

Důkaz. Zvolme libovolné reálné body R_1, R_2 tak, že leží v tečné rovině τ (s bodem dotyku T) kvadriky K. Potom má tato tečná rovina parametrické vyjádření $X = \alpha T + \beta_1 R_1 + \beta_2 R_2$. Nechť $K : F^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = 0$. Potom $\tau \cap K$ má vyjádření

$$(\beta_1)^2 f^{\mathbb{C}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1) + 2\beta_1\beta_2 f^{\mathbb{C}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + (\beta_2)^2 f^{\mathbb{C}}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2) = 0\,.$$

Je–li $f^{\mathbb{C}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1) = f^{\mathbb{C}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = f^{\mathbb{C}}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2) = 0$ (body R_1, R_2 leží na K a jsou polárně sdruženy), je předchozí rovnice splněna identicky a $\tau \subset K$. Je–li alespoň jedno z čísel $f^{\mathbb{C}}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$ nenulové, je předchozí rovnice souřadnicovým vyjádřením kuželosečky v rovině τ vzhledem ke geometrické bázi v τ se základními body T, R_1, R_2. Protože $f^{\mathbb{C}}(\mathbf{t}, \mathbf{x}) = 0$ pro každý bod $X = \langle \mathbf{x} \rangle \in \tau$, je T singulárním bodem této kuželosečky. □

Poznámka 22.2. Rozdíl mezi regulární přímkovou kvadrikou a regulární nepřímkovou kvadrikou je dobře patrný z toho, jak vypadá singulární kuželosečka v reálné tečné rovině. Pro nepřímkovou kvadriku je to dvojice komplexně sdružených přímek, které mají společný reálný bod – bod dotyku. Pro přímkovou kvadriku je to dvojice reálných přímek, které se protínají v bodě dotyku (viz Obrázek 22.1). Intuitivní představě dotyku tedy odpovídá nepřímkový případ. ♢



Obrázek 22.1: Tečná rovina nepřímkové a přímkové kvadriky

Úloha 22.1. Ke kvadrice

$K : x_3^2 + x_1x_2 - x_2x_3 - 5x_1x_4 = 0$

veďte tečné roviny, které obsahují přímku $p \equiv PQ$, $P = (-1; 3; 2; 1)$, $Q = (-5; 0; 0; 3)$.

Řešení: Podobně jako v Úloze 12.3 bychom mohli i tuto úlohu řešit trojím způsobem. Podle první metody hledáme ve svazku rovin s osou p tu rovinu, která se dané kvadriky dotýká – protíná ji v singulární kuželosečce. Ve druhé metodě určíme tečnou rovinu v libovolném bodě kvadriky a určíme podmínky, aby tečná rovina obsahovala body P, Q. Třetí metoda je založena na vlastnostech polární sdruženosti. Podle Poznámky 20.8 jsou totiž průsečíky kvadriky s polárně sdruženou přímkou k přímce p body dotyku hledaných tečných rovin. Úlohu vyřešíme pouze třetí metodou, zbývající dvě metody ponecháme na čtenáři.

Určíme polární roviny bodů P, Q:

$\pi : (X)^T A(P) = -2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 0\,,$

$\rho : (X)^T A(Q) = 3x_1 + x_2 - 5x_4 = 0\,.$

Průsečnice $q = \pi \cap \rho$ je polárně sdružená přímka k přímce p a má parametrické vyjádření

$q : X = (t; -3t + 5s; -7t + 10s; s).$

Průsečíky $q \cap K$ jsou tedy body dotyku hledaných rovin. Dosazením do rovnice kvadriky dostaneme po úpravě

$(t - 2s)(t - s) = 0$

a odtud, při volbě $s = 1$, dostaneme body dotyku $T_1 = (2; -1; -4; 1)$ a $T_2 = (1; 2; 3; 1)$. Tečná rovina bodu T_1 je

$\tau_1 : 6x_1 - 6x_2 + 7x_3 + 10x_4 = 0$

a tečná rovina bodu T_2 je

$\tau_2 : 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 0.$

23 Afinní vlastnosti kvadrik

V této části uvažujeme $\mathcal{A}_3$ reálný afinní prostor, $A_3^{\mathbb{C}}$ jeho komplexní rozšíření a $\overline{A_3^{\mathbb{C}}}$ projektivní rozšíření $A_3^{\mathbb{C}}$. Jako kvadriku v $\mathcal{A}_3$ potom rozumíme kvadriku v $\overline{A_3^{\mathbb{C}}}$.

Uvažujme na $\mathcal{A}_3$ afinní souřadnou soustavu určenou repérem

$$\langle O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \rangle. \tag{23.1}$$

V indukovaných afinních homogenních souřadnicích má kvadrika v $\mathcal{A}_3$ rovnici

$$K : \sum_{i,j=1}^{4} a_{ij} x_i x_j = 0, \tag{23.2}$$

$a_{ij} \in \mathbb{R}$, což píšeme maticově jako $(X)^T A(X) = 0$. Při přechodu k nehomogenním souřadnicím můžeme tuto rovnici přepsat do tvaru

$$K : \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} \bar{x}_i \bar{x}_j + 2 \sum_{i=1}^{3} a_{i4} \bar{x}_i + a_{44} = 0, \tag{23.3}$$

nebo zkráceně při označení sloupcové matice nehomogenních souřadnic bodu X jako $(\bar{X})$, matice $\bar{A} = (a_{ij})_{i,j=1,2,3}$, vektoru $(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{pmatrix}$ a $a = a_{44}$ budeme psát maticově

$$K : (\bar{X})^T \bar{A} (\bar{X}) + 2(\mathbf{a})^T (\bar{X}) + a = 0. \tag{23.4}$$

Nehomogenní afinní souřadnice bodu X budeme obvykle označovat $[x; y; z]$.

Uvědomme si, že rovnice (23.3) a (23.4) určují pouze vlastní body kvadriky. Pokud budeme pracovat s nevlastními body, musíme použít afinních homogenních souřadnic a rovnici (23.2).

Definice 23.1. Bod S nazýváme *středem* kvadriky K, je-li vzhledem ke K polárně sdružen se všemi nevlastními body.

Poznámka 23.1. Každý singulární bod kvadriky K je jejím středem. Střed, který není singulárním bodem, má za svou polární rovinu nevlastní rovinu.

Věta 23.1. *Nechť kvadrika K má v afinním repéru (23.1) v homogenních souřadnicích rovnici $K : (X)^T A(X) = 0$. Bod $S = (s_1; \dots ; s_4)$ je středem kvadriky K právě tehdy, když platí*

$$\begin{aligned} a_{11}s_1 + \cdots + a_{14}s_4 &= 0\,, \\ a_{12}s_1 + \cdots + a_{24}s_4 &= 0\,, \\ a_{13}s_1 + \cdots + a_{34}s_4 &= 0\,, \end{aligned} \tag{23.5}$$

tj. $F_1(\mathbf{s}) = 0$, $F_2(\mathbf{s}) = 0$ a $F_3(\mathbf{s}) = 0$.

Důkaz. Nechť S je středem K, tj. je polárně sdružen se všemi nevlastními body. Označme R_i nevlastní bod, jehož afinní homogenní souřadnice mají na i-tém místě jedničku a jinak nuly, $i = 1, \dots, 3$. Potom podmínka, že S a R_i jsou polárně sdruženy, je $(S)^T A(R_i) = 0$, což je $a_{i1}s_1 + \cdots + a_{i4}s_4 = 0$.

Naopak nechť afinní homogenní souřadnice S splňují soustavu (23.5). Je-li navíc $F_4(\mathbf{s}) = a_{41}s_1 + \cdots + a_{44}s_4 = 0$, je S singulárním bodem K, a tedy středem. Je-li $F_4(\mathbf{s}) \neq 0$, je polární rovina bodu S dána obecnou rovnicí $F_4(\mathbf{s})x_4 = 0$, a to je rovnice nevlastní roviny. Tedy S je polárně sdružen se všemi nevlastními body. □

Poznámka 23.2. Soustava (23.5) má v homogenních souřadnicích vždy nenulové reálné řešení. Podle počtu řešení soustavy (23.5) může mít kvadrika právě jeden střed, přímku středů, rovinu středů nebo každý bod je středem. Poslední možnost nastává pouze tehdy, když je kvadrika tvořena dvojnásobnou nevlastní rovinou. ♢

Přepsáním soustavy (23.5) do nehomogenních souřadnic dostaneme soustavu pro výpočet vlastních středů kvadriky K

$$\begin{aligned} a_{11}\bar{s}_1 + a_{12}\bar{s}_2 + a_{13}\bar{s}_3 + a_{14} &= 0\,, \\ a_{12}\bar{s}_1 + a_{22}\bar{s}_2 + a_{23}\bar{s}_3 + a_{24} &= 0\,, \\ a_{13}\bar{s}_1 + a_{23}\bar{s}_2 + a_{33}\bar{s}_3 + a_{34} &= 0\,, \end{aligned} \tag{23.6}$$

kterou maticově zapisujeme $\bar{A}(\bar{S}) + (\mathbf{a}) = (\mathbf{o})$. Nehomogenní soustava (23.6) nemusí mít řešení, tj. kvadrika K nemusí mít vlastní střed.

Definice 23.2. Kvadrika, která má alespoň jeden vlastní střed, se nazývá *středová kvadrika*. Kvadrika, která nemá vlastní střed, se nazývá *nestředová kvadrika*.

Věta 23.2. *Jestliže střed kvadriky K je vlastním bodem, potom je kvadrika K podle něj středově symetrická.*

Důkaz. Důkaz je totožný s důkazem Věty 14.2. □

Definice 23.3. Nechť K je kvadrika a P je nevlastní bod, který není bodem kvadriky K. Polární rovinu bodu P budeme nazývat *průměrovou rovinou* kvadriky K.

Věta 23.3. *Je–li rovina průměrovou rovinou kvadriky K, pak obsahuje všechny její středy.*

Důkaz. Tato věta je důsledkem Věty 20.5. □

Poznámka 23.3. Geometrický význam průměrové roviny je následující. Je–li nevlastní bod P, který neleží na kvadrice K, určen nenulovým vektorem $\mathbf{u}$, je průměrová rovina určená bodem P vlastní a kvadrika je šikmo symetrická podle této průměrové roviny ve směru vektoru $\mathbf{u}$. ♢

Definice 23.4. Říkáme, že dva směry jsou *polárně sdruženy* vzhledem ke kvadrice K právě tehdy, jsou-li vzhledem ke K polárně sdruženy nevlastní body určené těmito směry.

Definice 23.5. Tečnou rovinu v nevlastním regulárním bodě kvadriky K nazýváme *asymptotickou rovinou* kvadriky K.

Úloha 23.1. Určete všechny středy kvadriky K:

a) $K : 4x^2 + 2y^2 + 12z^2 - 4xy + 8yz + 12xz + 14x - 10y + 7 = 0\,,$

b) $K : 5x^2 + 9y^2 + 9z^2 - 12xy - 6xz + 12x - 36z = 0\,,$

c) $K : 5x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 4yz + 2xz - 4y - 4z + 4 = 0\,.$

Řešení: a) Soustava pro výpočet vlastních středů je

$$\begin{aligned} 4x - 2y + 6z + 7 &= 0\,,\\ -2x + 2y + 4z - 5 &= 0\,,\\ 6x + 4y + 12z \quad &= 0\,, \end{aligned}$$

která má jediné řešení $S = [-1; \frac{3}{2}; 0]$.

b) Soustava pro výpočet vlastních středů

$$\begin{aligned} 5x - 6y - 3z + 6 &= 0\,,\\ -6x + 9y \quad &= 0\,,\\ -3x \quad + 9z - 18 &= 0 \end{aligned}$$

má jednodimenzionální řešení, tj. kvadrika má přímku středů

$s : 2x - 3y = 0,\ x - 3z + 6 = 0\,.$

c) Soustava pro výpočet vlastních středů

$$\begin{aligned} 5x - y + z &= 0\,,\\ -x + 2y - 2z - 2 &= 0\,,\\ x - 2y + 2z - 2 &= 0 \end{aligned}$$

nemá řešení, tj. kvadrika je nestředová. Příslušná homogenní soustava pro výpočet nevlastního středu je

$$\begin{aligned} 5x_1 - x_2 + x_3 &= 0\,,\\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= 0\,,\\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

a podprostor řešení je $L((0;1;1;0))$. Kvadrika má tedy nevlastní střed ve směru vektoru $\mathbf{u} = (0;1;1)$.

Úloha 23.2. Určete průměrovou rovinu kvadriky

$K : x^2 + y^2 - 3z^2 - 2xy - 6xz - 6yz + 2x + 2y + 4z = 0\,,$

polárně sdruženou s nevlastním bodem bodem $N = (1;-2;-1;0)$.

Řešení: $N \notin K$ a průměrová rovina bodu N je jeho polární rovina ν. V homogenních souřadnicích

$\nu : 2x_1 + 2x_3 - x_4 = 0\,,$

a v nehomogenních souřadnicích

$\nu : 2x + 2z - 1 = 0\,.$

Úloha 23.3. Určete průměrovou rovinu kvadriky

$K : 4x^2 + 6y^2 + 4z^2 + 4xz - 8x - 4z + 3 = 0\,,$

která prochází počátkem a bodem $[3;6;2]$.

Řešení: Průměrová rovina prochází všemi středy kvadriky K. K má vlastní střed $S = [1;0;0]$ a hledaná rovina je určena třemi body $[0;0;0]$, $[3;6;2]$ a $[1;0;0]$, tj. $\rho : 2y + 3z = 0$.

Úloha 23.4. Pro kvadriku z Úlohy 23.2 určete její asymptotickou rovinu v nevlastním bodě určeném směrem vektoru $\mathbf{u} = (1;1;0)$.

Řešení: Asymptotická rovina je polární rovina v nevlastním bodě. Daný bod opravdu leží na kvadrice a jeho polární rovina je

$\alpha : 3z - 1 = 0\,.$

24 Afinní klasifikace kvadrik

Definice 24.1. Kvadriku, která má s nevlastní rovinou společnou imaginární regulární kuželosečku, budeme nazývat kvadrikou *eliptického typu*. Kvadriku, která má s nevlastní rovinou společnou reálnou regulární kuželosečku, budeme nazývat kvadrikou *hyperbolického typu* a kvadriku, která má s nevlastní rovinou společnou singulární kuželosečku, budeme nazývat kvadrikou *parabolického typu*.

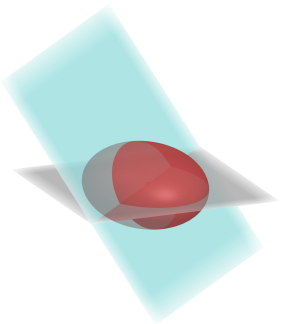
Regulární kvadriku, která má s nevlastní rovinou společnou imaginární regulární kuželosečku, budeme nazývat *elipsoidem*. Regulární kvadriku, která má s nevlastní rovinou společnou reálnou regulární kuželosečku, budeme nazývat *hyperboloidem* a regulární kvadriku, která má s nevlastní rovinou společnou singulární kuželosečku, budeme nazývat *paraboloidem*.

Aplikujme nyní Definici 24.1 na projektivní typy kvadrik z Části 21. Podle toho, jaký je průnik kvadriky s nevlastní rovinou, dostaneme následující afinní typy kvadrik:

Formálně reálná regulární kvadrika nemá žádný reálný nevlastní bod a je to tedy elipsoid, který budeme nazývat *imaginárním elipsoidem*.

Reálná regulární nepřímková kvadrika se nyní rozdělí na tři typy podle průniku s nevlastní rovinou. Bude to *reálný elipsoid*, *nepřímkový hyperboloid* a *nepřímkový paraboloid*.

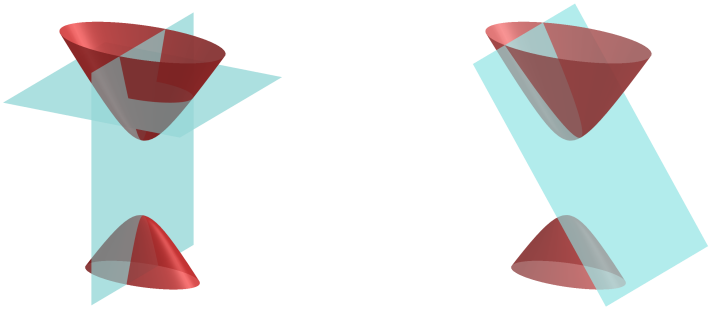
Všimněme si, jak budou vypadat na těchto nepřímkových regulárních kvadrikách rovinné řezy reálnými vlastními rovinami. Protože nevlastní kuželosečka reálného elipsoidu je imaginární, má každá vlastní rovina řezu na řezné kuželosečce dva komplexně sdružené nevlastní body. To ale znamená, že každá vlastní reálná rovina řeže elipsoid v kuželosečce eliptického typu. Řezem tedy může být reálná elipsa, imaginární elipsa (rovina elipsoid reálně neprotíná) nebo dvojice komplexně sdružených přímek (tečná rovina). Na Obrázku 24.1 jsou dva řezy rovinami procházejícími středem elipsoidu.



Obrázek 24.1: Řezy reálného elipsoidu rovinami procházejícími středem

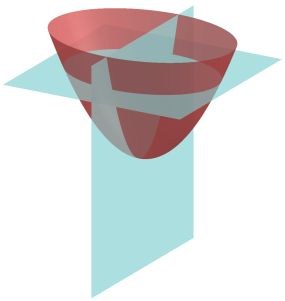
Nepřímkový hyperboloid má za svou nevlastní kuželosečku regulární reálnou kuželosečku. Nevlastní přímka řezné roviny může tuto kuželosečku protnout ve dvojici

reálných bodů, nebo ve dvojici komplexně sdružených bodů, nebo se jí dotknout v dvojnásobném bodě. To ovšem znamená, že řezem může být kuželosečka všech typů. Parabolické řezy odpovídají řezům rovinami, které jsou rovnoběžné s asymptotickými rovinami. Samotná asymptotická rovina řeže nepřímkový hyperboloid ve dvojici komplexně sdružených rovnoběžek. Protože některé eliptické řezy mohou být imaginární elipsy a body hyperboloidu přitom leží v obou poloprostorech určených řeznou rovinou, nazývá se nepřímkový hyperboloid *dvojdílným hyperboloidem*. Na Obrázku 24.2 je v prvním případě jeden eliptický (reálný) řez a jeden hyperbolický řez. Ve druhém případě je zakreslen jeden parabolický řez.



Obrázek 24.2: Řezy nepřímkového hyperboloidu rovinami

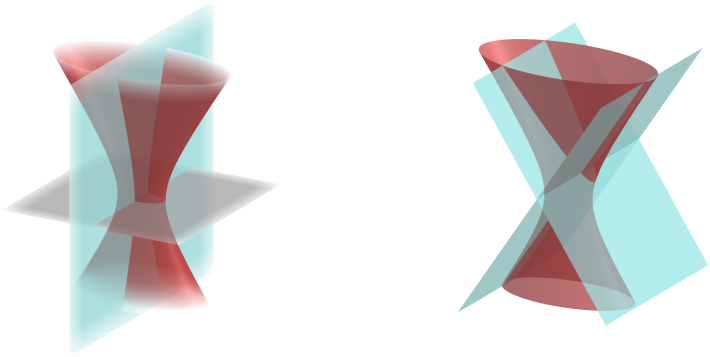
Nepřímkový paraboloid má podle Poznámky 22.2 nevlastní kuželosečku složenou ze dvou komplexně sdružených přímek. Potom každá reálná řezná rovina, která obsahuje jediný reálný nevlastní bod paraboloidu, jej řeže v parabole. Všechny zbývající roviny, které neobsahují reálný nevlastní bod paraboloidu, musí mít řezy eliptického typu. Proto se nepřímkový paraboloid nazývá *eliptickým paraboloidem*. Na Obrázku 24.3 je zakreslen jeden eliptický a jeden parabolický řez.



Obrázek 24.3: Řezy nepřímkového paraboloidu

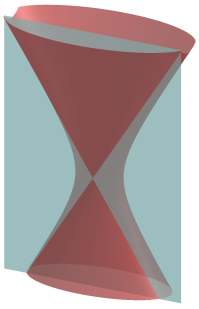
Regulární přímková kvadrika nemůže být eliptického typu, protože nevlastní bod každé reálné tvořící přímky je reálným bodem nevlastní kuželosečky kvadriky. Regulární přímkovou kvadriku hyperbolického typu budeme nazývat *přímkovým hy-*

perboloidem a regulární přímkovou kvadriku parabolického typu budeme nazývat *přímkovým paraboloidem*.



Obrázek 24.4: Přímkový hyperboloid a jeho rovinné řezy

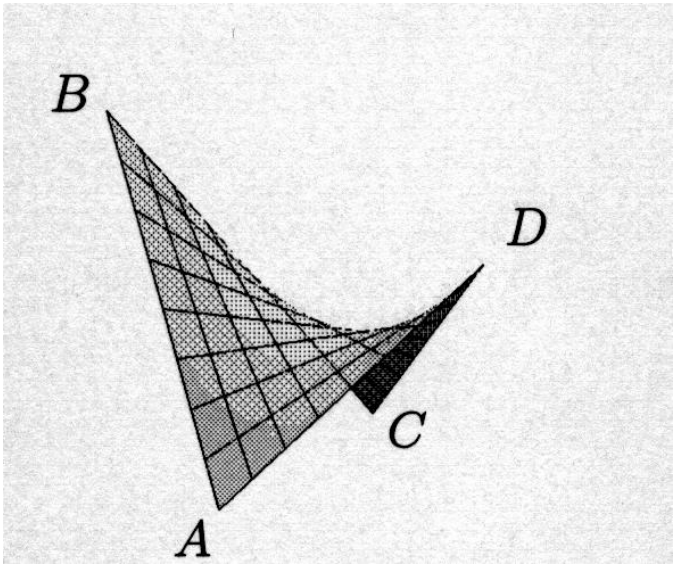
Přímkový hyperboloid má za svou nevlastní kuželosečku regulární reálnou kuželosečku. Nevlastní přímka řezné roviny může tuto kuželosečku protnout ve dvojici reálných bodů, nebo ve dvojici komplexně sdružených bodů, nebo se jí dotknout v dvojnásobném bodě. To ovšem znamená, že řezem může být kuželosečka všech typů. Parabolické řezy odpovídají řezům rovinami, které jsou rovnoběžné s asymptotickými rovinami. Samotná asymptotická rovina řeže přímkový hyperboloid ve dvojici reálných rovnoběžek. Všechny eliptické řezy jsou reálné elipsy a body hyperboloidu přitom leží v obou poloprostorech určených řeznou rovinou. Přímkový hyperboloid se nazývá *jednodílným hyperboloidem*. Na Obrázku 24.4 je v prvním případě zakreslen jeden eliptický řez a jeden hyperbolické řez rovinami procházejícími středem hyperboloidu. Ve druhém případě je zakreslen jeden řez asymptotickou rovinou a jeden parabolický řez. Tečné roviny protínají jednodílný hyperboloid ve dvojici různoběžných přímek (viz Obrázek 24.5). Tečné roviny v bodech jedné tvořící přímky protínají kvadriku v této přímce a osnově navzájem mimoběžných přímek. Na jednodílném hyperboloidu tak máme dvě osnovy přímek takových, že přímky jedné osnovy jsou navzájem mimoběžné a přímky patřící do různých osnov jsou různoběžné.



Obrázek 24.5: Řez přímkového hyperboloidu tečnou rovinou

Přímkový paraboloid má podle Poznámky 22.2 nevlastní kuželosečku složenou ze dvou reálných přímek. Potom každá reálná řezná rovina, která obsahuje reálný průsečík těchto přímek, jej řeže v parabole. Všechny zbývající roviny, které neobsahují tento průsečík, musí mít řezy hyperbolického typu. Proto se nepřímkový paraboloid nazývá *hyperbolickým paraboloidem*. Na Obrázku 24.6 je zakreslen jeden parabolický řez a jeden hyperbolický řez.

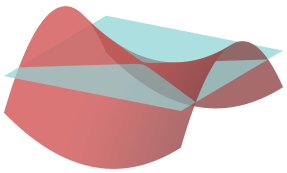
Obrázek 24.6: Řezy hyperbolického paraboloidu



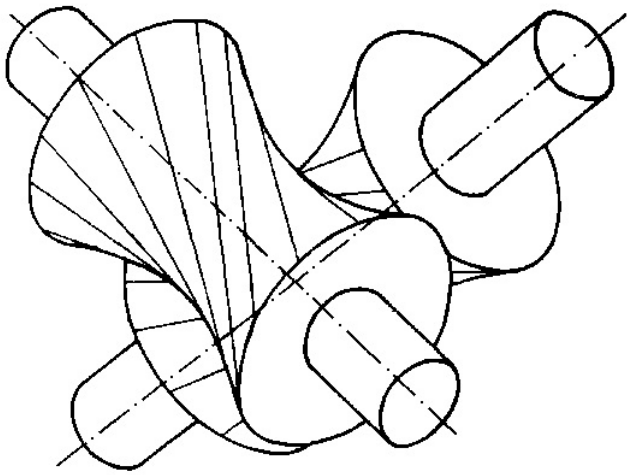
Obrázek 24.7

Uvažujme dvě roviny, které mají za nevlastní přímky tvořící přímky nevlastní kuželosečky hyperbolického paraboloidu. Každá přímka ležící na paraboloidu potom musí být rovnoběžná s jednou z těchto rovin. Máme tedy na hyperbolickém paraboloidu dvě soustavy přímek. Přímky jedné soustavy jsou rovnoběžné s jednou rovinou a přímky druhé soustavy jsou rovnoběžné s druhou rovinou. Dvě přímky z různých soustav jsou různoběžné a určují tečnou rovinu ve svém průsečíku (viz Obrázek 24.8). Hyperbolický paraboloid potom vzniká tak, že vybereme libovolné mimoběžné přímky jako dvě tvořící přímky patřící do jedné soustavy a body všech

příček těchto mimoběžek, které jsou rovnoběžné s nějakou rovinou (nerovnoběžnou s žádnou z vybraných mimoběžek), potom vytvoří hyperbolický paraboloid. Na Obrázku 24.7 je část hyperbolického paraboloidu s dvěmi soustavami tvořících přímek. Přímky jedné soustavy jsou rovnoběžné s rovinou se zaměřením $L(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ a jsou příčkami mimoběžek AD a BC. Přímky druhé soustavy jsou rovnoběžné s rovinou se zaměřením $L(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC})$ a jsou příčkami mimoběžek AB a CD.



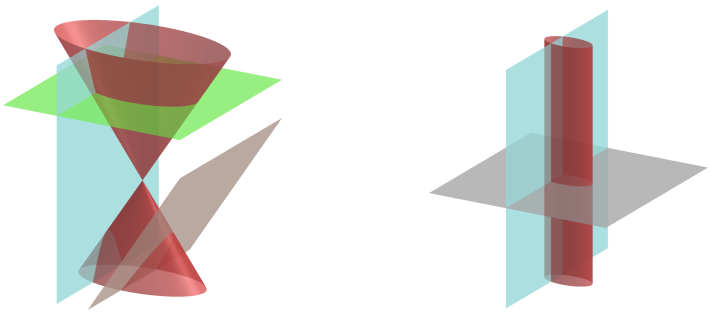
Obrázek 24.8: Tečná rovina hyperbolického paraboloidu



Obrázek 24.9

Poznámka 24.1. Přímkové regulární kvadriky mají velký význam v technické praxi. Jednodílné hyperboloidy se dříve používaly místo ozubených kol pro přenos rotací se vzájemně mimoběžnými osami (schéma viz Obrázek 24.9) a dnes se s nimi často setkáváme u chladících věží elektráren nebo na jiných stavebních konstrukcích (vodojemy, rozhledny a pod.), viz. strána 170. Hyperbolický paraboloid se v technické praxi nazývá *sedlo*. Používá se často ve stavební praxi na skořepiny střech. Na obrázcích na straně 169 je ukázka využití hyperbolického paraboloidu k zastřešení benzínové pumpy (Markham Moor, Velká Británie) a autobusové zastávky (Varšava, Polsko). ♢

Kvadriky hodnosti 3 jsou podle Věty 21.3 kuželové plochy. Uvažujme nejdříve imaginární kuželovou plochu, která má jediný reálný bod – vrchol. Je–li vrchol vlastní bod, budeme i v afinním případě hovořit o *imaginární kuželové ploše*. Je–li vrchol nevlastní bod, budeme kvadriku nazývat *imaginární válcovou plochou*. Všechny nevrcholové vlastní roviny (neobsahují singulární bod kvadriky) mají jako nevlastní body řezu dvojici komplexně sdružených bodů (tedy řez je eliptický) a řez nemůže mít reálné body, je tedy řezem imaginární elipsa, a proto budeme používat název *imaginární eliptická válcová plocha*.

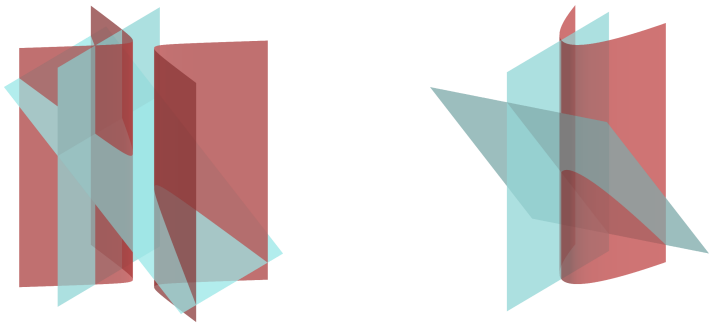


Obrázek 24.10: Řezy reálné kuželové a reálné eliptické válcové plochy

Uvažujme nyní reálnou kuželovou plochu. Je–li její vrchol vlastní bod, budeme i v afinním prostoru používat název *reálná kuželová plocha*. Reálná kuželová plocha má reálnou regulární nevlastní kuželosečku. Podobně jako u hyperboloidů ji tedy mohou reálné vlastní roviny protínat v kuželosečkách všech typů. Eliptické řezy dostaneme pro roviny, které jsou rovnoběžné s vrcholovými rovinami protínajícími kuželovou plochu v jediném reálném bodě – vrcholu. Parabolické řezy dostaneme v rovinách, které jsou rovnoběžné s vrcholovými rovinami dotýkajícími se kuželové plochy podél jedné tvořící přímky. Konečně hyperbolické řezy dostaneme v rovinách, které jsou rovnoběžné s vrcholovými rovinami protínajícími kuželovou plochu ve dvou tvořících přímkách. Řídící regulární reálná kuželosečka reálné kuželové plochy tedy může být všech tří typů, a proto nemůžeme nikdy hovořit o eliptické, hyperbolické, či parabolické kuželové ploše. Na Obrázku 24.10 je jeden eliptický, jeden hyperbolický a jeden parabolický řez.

Uvažujme nyní reálnou kuželovou plochu, jejíž vrchol je nevlastní bod. Takovou kvadriku budeme nazývat *reálnou válcovou plochou*. Nevlastní rovina je vrcholovou rovinou a ta vždy protíná kuželovou plochu v singulární kuželosečce. Nechť je nejdříve nevlastní singulární kuželosečka tvořena dvojicí komplexně sdružených přímek. Potom každá vlastní nevrcholová rovina protíná plochu v reálné elipse. Hovoříme proto o *reálné eliptické válcové ploše* (viz Obrázek 24.10).

Nechť je nevlastní singulární kuželosečka reálné válcové plochy tvořena dvojicí různých reálných přímek. Potom každá vlastní nevrcholová rovina protíná plochu v hyperbole. Hovoříme proto o *hyperbolické válcové ploše* (na Obrázku 24.11 je hyperbolická válcová plocha a její řezy).

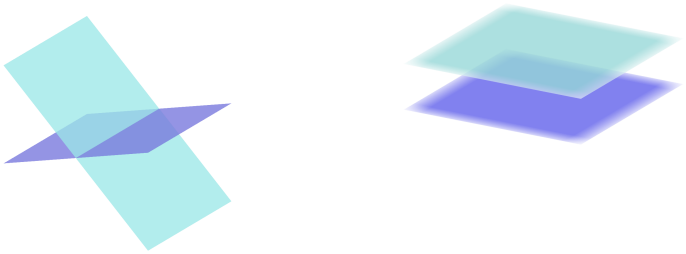


Obrázek 24.11: Řezy hyperbolické a parabolické válcové plochy

Konečně nechť je nevlastní singulární kuželosečka reálné válcové plochy tvořena dvojnásobnou reálnou přímkou (válcová plocha se dotýká nevlastní roviny). Potom každá vlastní nevrcholová rovina protíná plochu v parabole. Hovoříme proto o *parabolické válcové ploše* (na Obrázku 24.11 je parabolická válcová plocha a její řezy, přitom vrcholová rovina obsahuje nevlastní přímku plochy).

Poznámka 24.2. V předchozích úvahách jsme viděli, že jako řezy na kuželových plochách, kam zahrnujeme i válcové plochy, dostaneme všechny afinní typy kuželoseček. Název kuželosečky je tedy oprávněný. ♢

Kvadriky hodnosti 2 jsou podle Věty 21.2 dvojice rovin a jsou parabolického typu. Uvažujme nejdříve komplexně sdružené roviny. Je–li společná reálná přímka těchto rovin vlastní, hovoříme o dvojici komplexně sdružených různoběžných rovin. Je–li společná reálná přímka tvořících rovin nevlastní, hovoříme o dvojici komplexně sdružených rovnoběžných rovin.



Obrázek 24.12: Různoběžné a rovnoběžné roviny

Nechť je kvadrika složena ze dvou reálných tvořících rovin. Mohou nastat tyto možnosti. Tvořící roviny jsou vlastní různoběžné, vlastní rovnoběžné (viz Obrázrk 24.12), nebo je jedna z nich vlastní a jedna nevlastní.

Konečně kvadrika hodnosti 1 je podle Věty 21.1 tvořena jedinou dvojnásobnou reálnou rovinou. Ta může být buď vlastní nebo nevlastní.

Celkem tedy máme 19 afinních typů kvadrik.

Obrázek 24.13: Asymptotická kuželová plocha hyperboloidů

Poznámka 24.3. (Reálná) kuželová plocha, která má s daným hyperboloidem stejnou nevlastní kuželosečku a jejím vrcholem je střed hyperboloidu, se nazývá *asymptotická kuželová plocha* hyperboloidu. (Pro elipsoidy by byla asymptotická kuželová plocha imaginární). Asymptotické kuželové plochy se dotýkají všechny asymptotické roviny hyperboloidu. Na Obrázku 24.13 jsou asymptotické kuželové plochy pro přímkový i nepřímkový hyperboloid. ♢

Věta 24.1. *Ke každé kvadrice K v $\mathcal{A}_3$ existují 3 lineárně nezávislé směry, které jsou navzájem polárně sdruženy vzhledem ke K.*

Důkaz. Musíme vlastně dokázat, že existují 3 nevlastní body v obecné poloze, které jsou navzájem polárně sdruženy vzhledem ke K. Nechť nejdříve K obsahuje nevlastní rovinu jako svou tvořící rovinu. Potom libovolná trojice nevlastních bodů v obecné poloze splňuje podmínky věty.

Nechť nyní nevlastní rovina není součástí K. Zvolme libovolný nevlastní bod O_1, který neleží na K, a označme ω_1 jeho polární rovinu. Je-li nevlastní přímka ω_1 součástí K, doplníme O_1 na trojici bodů v obecné poloze libovolnými nevlastními body z ω_1. Není-li nevlastní přímka ω_1 součástí K, vybereme na ní O_2 tak, aby neležel na K. Označme ω_2 jeho polární rovinu. Potom nevlastní bod $\omega_1 \cap \omega_2$ doplní O_1, O_2 na trojici polárně sdružených nevlastních bodů v obecné poloze. □

Věta 24.2. *Nechť $\langle O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\rangle$ je takový afinní repér v $\mathcal{A}_3$, že vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ určují směry navzájem polárně sdružené vzhledem ke kvadrice K. Potom v rovnici kvadriky K vzhledem k tomuto repéru je $a_{ij} = 0$, pro všechna $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$.*

Důkaz. Označme jako $O_i = \langle \mathbf{e}_i\rangle$, $i = 1, 2, 3$. Potom afinní homogenní souřadnice bodů O_i mají nenulovou souřadnici pouze na i-tém místě a bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že je to jednička. Z podmínky polární sdruženosti bodů O_i pak dostaneme $0 = (O_i)^T A(O_j) = a_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$, $i \neq j$. □

Věta 24.3. *Je-li počátek afinního repéru vlastním středem kvadriky K, je v rovnici K vzhledem k tomuto afinnímu repéru $a_{i4} = 0$, $i = 1, 2, 3$.*

Důkaz. Nechť O je vlastní střed kvadriky K. Zvolme ho za počátek afinního repéru. Pak O má afinní homogenní souřadnice (0;0;0;1). Protože O je středem, je polárně sdružen se všemi nevlastními body, a tedy i s body $O_i = \langle \mathbf{e}_i \rangle$, $i = 1, 2, 3$, které mají v afinních homogenních souřadnicích jedinou nenulovou souřadnici na i-tém místě. Potom $0 = (O)^T A(O_i) = a_{i4}$. □

Důsledek 24.1. Zvolíme–li nyní afinní repér tak, že počátek je vlastním středem kvadriky a směry souřadných os jsou polárně sdruženy vzhledem ke kvadrice, má kvadrika K vzhledem k tomuto afinnímu repéru kanonickou rovnici

$$K : a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 = 0 \tag{24.1}$$

a pro kvadriku, která neobsahuje nevlastní rovinu, je příslušná nehomogenní rovnice

$$K : a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44} = 0\,. \tag{24.2}$$

Věta 24.4. *Nechť K je nestředová kvadrika v $\mathcal{A}_3$. Pak existuje afinní repér $\langle O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ takový, že vzhledem k němu má K rovnici*

$$K : a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{34}x_3x_4 = 0\,, \tag{24.3}$$

kde $a_{34} \neq 0$. V nehomogenních souřadnicích, pokud K neobsahuje jako tvořící rovinu nevlastní rovinu,

$$K : a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{34}z = 0\,; \tag{24.4}$$

tuto rovnici můžeme použít pouze je–li hodnost kvadriky alespoň 3.

Důkaz. Jestliže regulární kvadrika K nemá žádný vlastní střed, pak hodnost této kvadriky je nejméně dvě a můžeme zvolit afinní repér $\langle O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ tak, že O je regulární bod kvadriky, $\mathbf{e}_3$ je vektor určující nevlastní střed K a $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ jsou vektory ze zaměření tečné roviny ke K v bodě dotyku O, které určují polárně sdružené směry. Existence takovýchto polárně sdružených směrů v zaměření tečné roviny v bodě dotyku O se prokáže stejně jako u Věty 24.1. Při naší volbě afinního repéru je v homogenních souřadnicích $O = (0, 0, 0, 1)$, $O_i = \langle \mathbf{e}_i \rangle = (0, .., 1, .., 0)$, kde 1 je na i-tém místě, $i = 1, 2, 3$. Potom $O \in K$ implikuje $a_{44} = 0$, O_1 je polárně sdruženo s O_2, proto $a_{12} = 0$, a konečně z podmínky, že $\mathbf{e}_3$ určuje nevlastní střed, je $a_{i4} = 0$, $i = 1, 2$. Je tedy matice K v tomto repéru tvaru

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{34} & 0 \end{pmatrix}.$$

Soustava pro výpočet vlastního středu má nyní podobu $a_{11}x = 0$, $a_{22}y = 0$, $a_{33}z + a_{34} = 0$ a protože podle předpokladu K nemá vlastní střed, je tato soustava neřešitelná. To lze pouze pro $a_{33} = 0$ a $a_{34} \neq 0$. □

Definice 24.2. Rovnici (24.2) nebo (24.4) kvadriky K budeme nazývat *afinní kanonickou rovnicí*. Afinní repér, vzhledem ke kterému má kvadrika K kanonickou rovnici, budeme nazývat *polární afinní repér* kvadriky K.

Věta 24.5. (Afinní klasifikace kvadrik) *Ke každé kvadrice K existuje takový afinní repér, že vzhledem k němu má K jednu z následujících rovnic:*

	(hom. souřadnice)	*(nehom. souřadnice)*
(AK1)	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0\,,$	$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0\,,$
(AK2)	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0\,,$	$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\,,$
(AK3)	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0\,,$	$x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0\,,$
(AK4)	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 = 0\,,$	$x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0\,,$
(AK5)	$x_1^2 + x_2^2 + 2x_3x_4 = 0\,,$	$x^2 + y^2 + 2z = 0\,,$
(AK6)	$x_1^2 - x_2^2 + 2x_3x_4 = 0\,,$	$x^2 - y^2 + 2z = 0\,,$
(AK7)	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0\,,$	$x^2 + y^2 + z^2 = 0\,,$
(AK8)	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0\,,$	$x^2 + y^2 - z^2 = 0\,,$
(AK9)	$x_1^2 + x_2^2 + x_4^2 = 0\,,$	$x^2 + y^2 + 1 = 0\,,$
(AK10)	$x_1^2 + x_2^2 - x_4^2 = 0\,,$	$x^2 + y^2 - 1 = 0\,,$
(AK11)	$x_1^2 - x_2^2 - x_4^2 = 0\,,$	$x^2 - y^2 - 1 = 0\,,$
(AK12)	$x_1^2 + 2x_3x_4 = 0\,,$	$x^2 - 2z = 0\,,$
(AK13)	$x_1^2 + x_2^2 = 0\,,$	$x^2 + y^2 = 0\,,$
(AK14)	$x_1^2 - x_2^2 = 0\,,$	$x^2 - y^2 = 0\,,$
(AK15)	$x_1^2 + x_4^2 = 0\,,$	$x^2 + 1 = 0\,,$
(AK16)	$x_1^2 - x_4^2 = 0\,,$	$x^2 - 1 = 0\,,$
(AK17)	$x_1x_4 = 0\,,$	*nelze určit,*
(AK18)	$x_1^2 = 0\,,$	$x^2 = 0\,,$
(AK19)	$x_4^2 = 0\,,$	*nelze určit.*

Důkaz. Tato věta je přímým důsledkem Důsledku 24.1 a Věty 24.4. Rovnici (24.1) středové kvadriky znormujeme stejným způsobem jako ve Větě 15.7. Rovnici (24.3) nestředové kvadriky nejdříve vydělíme a_{34} a potom znormujeme nenulové koeficienty u druhých mocnin souřadnic stejně jako ve středovém případě. □

Definice 24.3. Rovnici kvadriky K z Věty 24.5 budeme nazývat *afinní normální rovnicí*. Afinní repér, vzhledem ke kterému má kvadrika K normální rovnici, budeme nazývat *normovaný polární afinní repér* kvadriky K.

Poznámka 24.4. Kvadrika určená rovnicí (AK1) je imaginární elipsoid, (AK2) je reálný elipsoid, (AK3) je jednodílný hyperboloid, (AK4) je dvoudílný hyperboloid, (AK5) je eliptický paraboloid, (AK6) určuje hyperbolický paraboloid, (AK7) určuje imaginární kuželovou plochu, (AK8) je reálná kuželová plocha, (AK9) je imaginární eliptická válcová plocha, (AK10) je reálná eliptická válcová plocha, (AK11) je hyperbolická válcová plocha, (AK12) je parabolická válcová plocha, (AK13) je dvojice komplexně sdružených tvořících různoběžných rovin, (AK14) je dvojice reálných různoběžných tvořících rovin, (AK15) je dvojice komplexně sdružených

rovnoběžných rovin, (AK16) je dvojice reálných rovnoběžných rovin, (AK17) je tvořena jednou vlastní a jednou nevlastní tvořící rovinou, (AK18) je dvojnásobná vlastní tvořící rovina a (AK19) je dvojnásobná nevlastní tvořící rovina. ♢

Poznámka 24.5. Při praktickém výpočtu máme většinou kvadriku zadánu souřadnicovou rovnicí v nehomogenních souřadnicích. K určení jejích normálních rovnic máme dvě metody. První z nich je založena na nalezení polárního afinního repéru tak, jak je popsáno ve Větách 24.2 – 24.4. Druhý způsob je založen na přímém hledání transformace souřadnic, která převede rovnici kvadriky do normálního tvaru. Nalezneme nejdříve transformaci afinních souřadnic, která převede do kanonického tvaru kvadratickou část rovnice kvadriky (viz Část 9). Geometricky to znamená, že jsme převedli rovnici kvadriky do souřadnic vzhledem k afinnímu repéru, kde jsou směry souřadných os polárně sdruženy vzhledem ke kvadrice. Přechodem na druhé mocniny dvojčlenu potom posuneme počátek afinního repéru tak, že dostaneme jednu z rovnic (24.2) nebo (24.4). Rovnice potom ještě normujeme vhodnými násobky směrových vektorů. Podrobnosti budou zřejmé z následující Úlohy 24.1. ♢

Úloha 24.1. Určete afinní typ kvadriky K, její normální rovnice, afinní normovaný polární repér a transformační rovnice, které převedou rovnici kvadriky do normálního tvaru:

a) $K : 3x^2 + y^2 - z^2 + 6xz - 4y = 0\,,$

b) $K : 4x^2 - 9z^2 + 2xz - 8x - 4y + 36z - 32 = 0\,.$

Řešení: I. medoda:

a) Určíme nejdříve, zda je kvadrika středová nebo nestředová. K má jediný vlastní střed $S = [0; 2; 0]$.

Protože $a_{11} \neq 0$, není nevlastní bod směru $\langle \mathbf{e}'_1 = (1; 0; 0)\rangle$ bodem kvadriky, ponecháme potom $\mathbf{e}'_1$ jako první směrový vektor nového afinního repéru. V zaměření polární roviny $\omega_1 : x + z = 0$ nevlastního bodu $\langle \mathbf{e}'_1\rangle$ vybereme směr, který určuje bod neležící na kvadrice. Např. $\langle \mathbf{e}'_2 = (0; 1; 0)\rangle$. Třetí směrový vektor polárního afinního repéru je potom směrový vektor průniku zaměření polárních rovin ω_1 a $\omega_2 : y - 2 = 0$ (polární rovina nevlastního bodu směru $\langle \mathbf{e}'_2\rangle$), tj. $\mathbf{e}'_3 = (-1; 0; 1)$. V polárním repéru $\langle S; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\rangle$ má kvadrika rovnici

$K : 3(x')^2 + (y')^2 - 4(z')^2 - 4 = 0\,,$

kterou nejdříve vydělíme 4 a znormujeme volbou nových směrových vektorů $\mathbf{e}''_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}''_2 = 2\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}''_3 = \mathbf{e}'_3$. Afinní repér $\langle S; \mathbf{e}''_1, \mathbf{e}''_2, \mathbf{e}''_3\rangle$ je polární normovaný afinní repér kvadriky a kvadrika v něm má rovnici

$K : (x'')^2 + (y'')^2 - (z'')^2 - 1 = 0\,.$

Kvadrika je tedy jednodílný hyperboloid. Transformační rovnice přechodu k nor-

movanému polárními repéru jsou

$$\begin{aligned} x &= \frac{2}{\sqrt{3}}x'' \qquad - z'' \,, \\ y &= \qquad 2y'' \qquad + 2 \,, \\ z &= \qquad\qquad z'' \,. \end{aligned}$$

b) Určíme nejdříve, zda je kvadrika středová, nebo nestředová. K je nestředová a nevlastní střed je určen směrem $\langle \mathbf{e}'_3 = (0;1;0)\rangle$.

Určíme libovolný bod ležící na kvadrice, např. $P = [0;-8;0]$. V tečné rovině $\pi : 2x + y - 9z + 8 = 0$ bodu P určíme směr, který neurčuje nevlastní bod kvadriky, např. $\langle \mathbf{e}'_1 = (1;-2;0)\rangle$, a poslední směrový vektor je určen směrem průniku zaměření roviny π a polární roviny $4x+z = 0$ nevlastního bodu směru $\langle \mathbf{e}'_1\rangle$, tj. $\langle \mathbf{e}'_2 = (1;-38;-4)\rangle$. Afinní repér $\langle P; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\rangle$ je polární afinní repér kvadriky a kvadrika v něm má rovnici

$K : 4(x')^2 - 148(y')^2 - 4z' = 0\,,$

kterou nejdříve vydělíme 2 a znormujeme volbou nových směrových vektorů $\mathbf{e}''_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}''_2 = \frac{1}{\sqrt{74}}\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}''_3 = \mathbf{e}'_3$. Afinní repér $\langle P; \mathbf{e}''_1, \mathbf{e}''_2, \mathbf{e}''_3\rangle$ je polární normovaný afinní repér kvadriky a kvadrika v něm má rovnici

$K : (x'')^2 - (y'')^2 - 2z'' = 0\,.$

Kvadrika je tedy hyperbolický paraboloid. Transformační rovnice přechodu k normovanému polárními repéru jsou

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}x'' + \frac{1}{\sqrt{74}}y'' \,, \\ y &= -\frac{2}{\sqrt{2}}x'' - \frac{38}{\sqrt{74}}y'' + z'' - 8 \,, \\ z &= \qquad -\frac{4}{\sqrt{74}}y'' \,. \end{aligned}$$

II. metoda:

a) Rovnici kvadriky upravíme na

$K : 3(x+z)^2 + y^2 - 4z^2 - 4y = 0\,.$

Potom transformace

$$\begin{aligned} x &= x' \quad - z' \,, \\ y &= \quad y' \,, \\ z &= \qquad z' \end{aligned}$$

převede rovnici kvadriky do tvaru

$K : 3(x')^2 + (y')^2 - 4(z')^2 - 4y' = 0\,,$

který upravíme na tvar

$K : 3(x')^2 + (y' - 2)^2 - 4(z')^2 - 4 = 0\,.$

Po vydělení 4 transformace

$$\begin{aligned} x' &= \frac{2}{\sqrt{3}}x''\,, \\ y' &= \qquad 2y'' \quad + 2\,, \\ z' &= \qquad\quad z'' \end{aligned}$$

převede rovnici kvadriky do normálního tvaru (viz I. metoda). Výsledné transformační rovnice i odpovídající normovaný polární repér jsou stejné jako v I. metodě.

b) Rovnici kvadriky upravíme na

$K : 4(x + \frac{1}{4}z)^2 - \frac{37}{4}z^2 - 8x - 4y + 36z - 32 = 0\,.$

Potom transformace

$$\begin{aligned} x &= x' - \frac{1}{4}y'\,, \\ y &= \qquad\quad z'\,, \\ z &= \qquad y' \end{aligned}$$

převede rovnici kvadriky do tvaru

$K : 4(x')^2 - \frac{37}{4}(y')^2 - 8x' + 38y' - 4z' - 32 = 0\,,$

který upravíme na tvar

$K : 4(x' - 1)^2 - \frac{37}{4}(y' - \frac{76}{37})^2 - 4z' - \frac{112}{37} = 0\,.$

Transformace

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{2}x'' \qquad\qquad + 1\,, \\ y' &= \qquad \frac{2}{\sqrt{37}}y'' \qquad + \frac{76}{37}\,, \\ z' &= \qquad\quad \frac{1}{2}z'' + \frac{28}{37} \end{aligned}$$

převede rovnici kvadriky normálního tvaru (viz I. metoda). Výsledné transformační rovnice jsou potom

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{2}x'' - \frac{1}{2\sqrt{37}}y'' \qquad + \frac{18}{37}\,, \\ y' &= \qquad\quad \frac{1}{2}z'' + \frac{28}{37}\,, \\ z' &= \qquad \frac{2}{\sqrt{37}}y'' \qquad + \frac{76}{37}\,, \end{aligned}$$

z nichž určíme snadno příslušný normovaný polární repér.

Úloha 24.2. Pro hyperboloid z Úlohy 24.1 a) určete asymptotickou kuželovou plochu.

Řešení: Asymptotická kuželová plocha má stejnou nevlastní kuželosečku jako daný hyperboloid, tj. matice $\bar{A}$ je totožná pro asymptotickou kuželovou plochu i hyperboloid. Potom má asymptotická kuželová plocha matici $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 3 & 0 & -1 & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$. Podmínka, že střed hyperboloidu $S = [0;2;0]$ je singulární bod asymptotické kuželové plochy, vede na soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} F_1(S) &= a = 0\,, \\ F_2(S) &= b + 2 = 0\,, \\ F_3(S) &= c = 0\,, \\ F_4(S) &= 2b + d = 0\,, \end{aligned}$$

což znamená, že asymptotická kuželová plocha má rovnici

$K : 3x^2 + y^2 - z^2 + 6xz - 4y + 4 = 0\,.$

25 Metrické vlastnosti kvadrik

V této kapitole uvažujeme $\mathcal{E}_3$ reálný euklidovský prostor, $\mathcal{E}_3^{\mathbb{C}}$ jeho komplexní rozšíření a $\overline{\mathcal{E}_3^{\mathbb{C}}}$ projektivní rozšíření $\mathcal{E}_3^{\mathbb{C}}$. Jako kvadriku v $\mathcal{E}_3$ potom rozumíme kvadriku v $\overline{\mathcal{E}_3^{\mathbb{C}}}$.

Uvažujme na $\mathcal{E}_3$ kartézskou souřadnou soustavu určenou ortonormálním repérem

$$\langle O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle\,. \tag{25.1}$$

V indukovaných homogenních souřadnicích má kvadrika K v $\mathcal{E}_3$ obvyklou rovnici (viz Část 23)

$$K : \sum_{i,j=1}^{4} a_{ij} x_i x_j = 0\,, \tag{25.2}$$

a v nehomogenních souřadnicích má kvadrika rovnici

$$K : \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} \bar{x}_i \bar{x}_j + 2 \sum_{i=1}^{3} a_{i4} \bar{x}_i + a_{44} = 0\,, \tag{25.3}$$

nebo

$$K : (\bar{X})^T \bar{A} (\bar{X}) + 2(\mathbf{a})^T (\bar{X}) + a = 0\,. \tag{25.4}$$

Při častějším označení nehomogenních souřadnic bodu $X = [x; y; z]$ máme

$$\begin{aligned} K : a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0\,. \end{aligned} \tag{25.5}$$

Úmluva. V praxi se setkáváme téměř výhradně s kvadrikami, jejichž rovnice jsou zadány v nehomogenních souřadnicích. Takto se nedají bez dalšího upřesnění zadat kvadriky, jejichž součástí je nevlastní rovina. Dále tedy budeme předpokládat, že žádná kvadrika nemá za svou tvořící rovinu nevlastní rovinu. V souřadnicovém vyjádření to znamená, že matice $\bar{A}$ je nenulová.

Definice 25.1. Směr určený nenulovým vektorem $\mathbf{u}$ se nazývá *hlavním směrem* kvadriky K, je-li vzhledem ke K polárně sdružen se všemi k němu kolmými směry.

Poznámka 25.1. Z definice středu kvadriky je zřejmé, že směr, který určuje nevlastní střed kvadriky, je hlavním směrem kvadriky (platí to tedy i pro směr, který určuje nevlastní singulární bod kvadriky). ♢

Věta 25.1. *Ke každé kvadrice existují alespoň* 3 *na sebe navzájem kolmé hlavní směry. Má-li K v nějakém ortonormálním repéru matici A, jsou hlavní směry K vlastními směry submatice $\bar{A}$.*

Důkaz. 1. Nechť $\mathbf{u} = (u_1; u_2; u_3) \neq \mathbf{o}$ určuje singulární nevlastní bod $P_\infty = \langle \mathbf{u} \rangle$ kvadriky K. Potom $(F_1(\mathbf{u}); F_2(\mathbf{u}); F_3(\mathbf{u})) = \mathbf{o} = 0\mathbf{u}$, což znamená, že $\mathbf{u}$ je vlastním vektorem matice $\bar{A}$ pro $\lambda = 0$.

2. Nechť $\mathbf{u} = (u_1; u_2; u_3) \neq \mathbf{o}$ je hlavní směr kvadriky K a nevlastní bod $P_\infty = \langle \mathbf{u} \rangle$ není singulárním bodem K. Předpokládejme nejdříve, že P_∞ je nevlastním středem (který není singulárním bodem) kvadriky. Potom polární rovina bodu P_∞ je nevlastní rovina, tj. $(F_1(\mathbf{u}); F_2(\mathbf{u}); F_3(\mathbf{u})) = \mathbf{o}$ a podobně jako pro singulární bod dostáváme, že $\mathbf{u}$ je vlastním vektorem matice $\bar{A}$ pro $\lambda = 0$.

Nyní nechť $P_\infty = \langle \mathbf{u} \rangle$ není středem K. Potom vlastní polární rovina bodu P_∞ má rovnici

$$\pi : F_1(\mathbf{u})x_1 + F_2(\mathbf{u})x_2 + F_3(\mathbf{u})x_3 + F_4(\mathbf{u})x_4 = 0\,, \quad (F_1(\mathbf{u}); F_2(\mathbf{u}); F_3(\mathbf{u})) \neq \mathbf{o}$$

a vektor $\mathbf{u}$ je polárně sdružen se všemi vektory ze zaměření roviny π. Z předpokladu, že $\mathbf{u}$ určuje hlavní směr, vyplývá, že $\mathbf{u}$ je kolmý na π, a tedy nenulové vektory $(F_1(\mathbf{u}); F_2(\mathbf{u}); F_3(\mathbf{u}))$ a $\mathbf{u}$ jsou lineárně závislé, tj. existuje $\lambda \neq 0$ takové, že $(F_1(\mathbf{u}); F_2(\mathbf{u}); F_3(\mathbf{u})) = \lambda\mathbf{u}$, což je po rozepsání soustava pro vlastní vektory matice $\bar{A}$ (viz (10.1)).

Zbývající část tvrzení je důsledkem vlastností symetrických matic (viz Věty 10.1 – 10.3). □

Poznámka 25.2. Podobně jako v případě kuželoseček (viz Věta 16.2) se snadno dokáže, že charakteristická rovnice $|\bar{A} - \lambda E| = 0$ je nezávislá na zvoleném ortonormálním repéru a budeme ji nazývat *charakteristická rovnice* kvadriky K. Podobně také její kořeny λ_1, λ_2 a λ_3 jsou na zvoleném kartézském repéru nezávislé a budeme je nazývat *hlavní čísla* kvadriky K. Důkaz předchozí věty tedy není závislý na použitém ortonormálním repéru.

Definice 25.2. Je-li P nevlastní nesingulární bod určený hlavním směrem kvadriky K, pak polární rovinu bodu P, pokud je to vlastní rovina, nazýváme *hlavní* nebo *osovou* rovinou kvadriky K. Je–li nevlastní bod hlavního směru kvadriky nevlastním singulárním bodem kvadriky, pak definujeme jako osovou rovinu kvadriky libovolnou vlastní rovinu, která je kolmá na tento hlavní směr.

Průsečnici dvou osových rovin kvadriky nazveme *osou* kvadriky.

Vlastní průsečík kvadriky s její osou se nazývá *vrchol* kvadriky.

Poznámka 25.3. Jako důsledek Poznámky 23.3 a definice osové roviny dostáváme, že kvadrika je (kolmo) souměrná podle každé své osové roviny a je souměrná podle každé osy, kde jako souměrnost podle přímky chápeme otočení podle přímky o 180 stupňů. ♢

Poznámka 25.4. Z Vět 10.1 – 10.3 vyplývá, že má–li charakteristická rovnice kvadriky trojnásobný kořen (který musí být nenulový z podmínky, že kvadrika neobsahuje nevlastní rovinu), je každý směr hlavním směrem kvadriky. Takovéto kvadriky jsou souměrné podle každé průměrové roviny a nazývají se *zobecněné kulové plochy*. Později – v Části 26 – si ukážeme, které kvadriky to jsou.

Má–li charakteristická rovnice kvadriky dvojnásobný kořen, odpovídá mu dvoudimenzionální podprostor hlavních směrů kvadriky. Tento dvoudimenzionální podprostor hlavních směrů určuje nevlastní přímku a přímka s ní polárně sdružená je osou kvadriky. Kvadrika je potom symetrická podle každé roviny, která obsahuje takovouto osu kvadriky. Takovéto kvadriky se nazývají *rotační kvadriky*. Jejich vytvoření si popíšeme v Části 26. ♢

Úloha 25.1. Určete charakteristickou rovnici, hlavní čísla a hlavní směry kvadriky K:

a) $K : x^2 - 4y^2 + z^2 + 6xz + 4x + 16y - 4z - 16 = 0\,,$

b) $K : x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xz - 2x - 2z + 4 = 0\,.$

Řešení: a) Matice $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a její charakteristická rovnice $|\bar{A} - \lambda E| = 0$ je $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & -4-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$, tj. $-\lambda^3 - 2\lambda^2 + 16\lambda + 32 = 0$. Hlavní čísla jsou kořeny charakteristické rovnice, tj. $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4$ a $\lambda_3 = -4$. Hlavní směr určený kořenem $\lambda_1 = -2$ je určen vektorem, jehož souřadnice jsou řešením soustavy rovnic (viz (16.6))

$$\begin{aligned} 3u_1 \qquad &+ 3u_3 = 0\,, \\ -2u_2 \qquad &= 0\,, \\ 3u_1 \qquad &+ 3u_3 = 0\,, \end{aligned}$$

tj. hlavní směr odpovídající hlavnímu číslu $\lambda_1 = -2$ je určen vektorem $\mathbf{u}_1 = (1;0;-1)$. Pro hlavní směr určený hlavním číslem $\lambda_2 = 4$ dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} -3u_1 \qquad &+ 3u_3 = 0\,, \\ -8u_2 \qquad &= 0\,, \\ 3u_1 \qquad &- 3u_3 = 0\,, \end{aligned}$$

tj. hlavní směr odpovídající hlavnímu číslu $\lambda_2 = 4$ je určen vektorem $\mathbf{u}_2 = (1;0;1)$. Konečně pro hlavní směr určený hlavním číslem $\lambda_2 = -4$ dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} 5u_1 \qquad &+ 3u_3 = 0\,, \\ 0 &= 0\,, \\ 3u_1 \qquad &+ 5u_3 = 0\,, \end{aligned}$$

tj. hlavní směr odpovídající hlavnímu číslu $\lambda_2 = -4$ je určen vektorem $\mathbf{u}_3 = (0;1;0)$.

b) Matice $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a její charakteristická rovnice $|\bar{A} - \lambda E| = 0$ je $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$, tj. $-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda = 0$. Hlavní čísla jsou kořeny charakteristické rovnice, tj. $\lambda_{1,2} = 2$ a $\lambda_3 = 0$. Podprostor hlavních směrů určených dvojnásobným kořenem $\lambda_{1,2} = 2$ je řešením soustavy rovnic (viz (16.6))

$$\begin{aligned} -u_1 \qquad &- u_3 = 0\,, \\ 0 &= 0\,, \\ -u_1 \qquad &- u_3 = 0\,, \end{aligned}$$

tj. hlavní směry odpovídající hlavnímu číslu $\lambda_{1,2} = 2$ tvoří podprostor $L(\mathbf{u}_1 = (1;0;-1), \mathbf{u}_2 = (0;1;0))$. Pro hlavní směr určený hlavním číslem $\lambda_3 = 0$ dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} u_1 \qquad &- u_3 = 0\,, \\ 2u_2 \qquad &= 0\,, \\ -u_1 \qquad &+ u_3 = 0\,, \end{aligned}$$

tj. hlavní směr odpovídající hlavnímu číslu $\lambda_3 = 0$ je určen vektorem $\mathbf{u}_3 = (1;0;1)$.

Poznámka: Protože je naše kvadrika regulární, je hlavní směr určený nulovým hlavním číslem směrem nevlastního středu kvadriky.

Úloha 25.2. Určete hlavní roviny a osy kvadrik z Úlohy 25.1.

Řešení: a) I. metoda:

Hlavní roviny jsou polární roviny nevlastních bodů určených hlavními směry. Nevlastní bod $U_1 = \langle \mathbf{u}_1 \rangle = (1;0;-1;0)$ má polární rovinu $\omega_1 : x - z - 2 = 0$, nevlastní bod $U_2 = \langle \mathbf{u}_2 \rangle = (1;0;1;0)$ má polární rovinu $\omega_2 : x + z = 0$ a nevlastní bod $U_3 = \langle \mathbf{u}_3 \rangle = (0;1;0;0)$ má polární rovinu $\omega_3 : y - 2 = 0$.

Osy jsou potom společné přímky dvou hlavních rovin, tj.

$$o_1 : \begin{aligned} x - z - 2 &= 0, \\ x + z &= 0, \end{aligned} \qquad o_2 : \begin{aligned} x - z - 2 &= 0, \\ y - 2 &= 0, \end{aligned} \qquad o_3 : \begin{aligned} x + z &= 0, \\ y - 2 &= 0\,. \end{aligned}$$

II. metoda: Osa je parametricky určena vlastním středem a hlavním směrem. Naše kvadrika má jediný vlastní střed $S = [1;2;-1]$. Potom

$$\begin{aligned} o_1 &: X = [1;2;-1] + t(0;1;0)\,, \\ o_2 &: X = [1;2;-1] + t(1;0;1)\,, \\ o_3 &: X = [1;2;-1] + t(1;0;-1)\,. \end{aligned}$$

b) Polární rovina nevlastního bodu určeného hlavním směrem odpovídajícím nulovému hlavnímu číslu je nevlastní a podle Definice 25.2 to není hlavní rovina.

Dvoudimenzionální podprostor hlavních směrů, který je určen dvojnásobným kořenem charakteristické rovnice, určuje nevlastní přímku. Všechny polární roviny nevlastních bodů ležících na této přímce tvoří svazek hlavních rovin a osa tohoto svazku rovin je jedinou osou kvadriky. Je určena např. polárními rovinami nevlastního bodu $U_1 = \langle \mathbf{u}_1 \rangle = (1;0;-1;0)$, tj. $\omega_1 : x - z = 0$, a polární rovinou nevlastního bodu $U_2 = \langle \mathbf{u}_2 \rangle = (0;1;0;0)$, tj. $\omega_2 : y = 0$. Potom

$$o : \begin{aligned} x - z &= 0\,, \\ y &= 0\,. \end{aligned}$$

Protože kvadrika K nemá vlastní střed, nemůžeme určit přímo parametrickou rovnici osy jako v případě a).

Úloha 25.3. Určete vrcholy kvadrik K z Úlohy 25.1.

Řešení: a) Z parametrického vyjádření osy o_1 dosadíme do rovnice kvadriky a pro parametr t dostaneme kvadratickou rovnici $t^2 - 1 = 0$. Potom vrcholy, které leží na ose o_1, jsou dva reálné body $A = [1;3;-1]$, $B = [1;1;-1]$.

Podobně z parametrického vyjádření osy o_2 dostaneme kvadratickou rovnici $2t^2 + 1 = 0$. Potom vrcholy, které leží na ose o_2, jsou dva komplexně sdružené body $E = [1 + \frac{\sqrt{2}}{2}i; 2; -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}i]$, $\bar{E} = [1 - \frac{\sqrt{2}}{2}i; 2; -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}i]$.

Konečně pro osu o_3 dostaneme kvadratickou rovnici $t^2 - 1 = 0$, a tedy vrcholy, které leží na ose o_3, jsou dva reálné body $C = [2;2;-2]$, $D = [0;2;0]$.

b) Z obecných rovnic osy o dosadíme do rovnice kvadriky $y = 0$, $z = x$. Dostaneme lineární rovnici $x - 1 = 0$. Tedy kvadrika má jediný vrchol $V = [1;0;1]$.

Poznámka: Rovnice pro výpočet průniku osy o a kvadriky K je lineární proto, že druhý průsečík je nevlastní bod osy o (střed kvadriky K).

26 Metrická klasifikace kvadrik

Všechny afinní vlastnosti a afinní klasifikace kvadrik zůstávají zachovány i v euklidovském prostoru. V této části skript si ukážeme, jak zvolit *ortonormální polární repér* kvadriky a rychle určit *kanonické rovnice* kvadriky, ze kterých se nejlépe pozná, o jakou kvadriku se jedná, a vyčteme z nich všechny informace o kvadrice.

V následujících dvou větách je popsán způsob, jak zvolit polární ortonormální repér tak, aby měla kvadrika nejjednodušší možnou rovnici.

Věta 26.1. *Nechť K je středová kvadrika. Pak existuje takový kartézský repér, že vzhledem k němu má K rovnici*

$$K : \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + a_{44} = 0\,, \tag{26.1}$$

kde λ_i, $i = 1, 2, 3$, jsou hlavní čísla kvadriky a $a_{44} \in \mathbb{R}$.

Důkaz. Zvolme vlastní střed kvadriky za počátek ortonormálního repéru a jednotkové vektory hlavních směrů kvadriky za základní směrové vektory ortonormálního repéru. Potom podle Důsledku 24.1 má K rovnici

$$K : a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} z^2 + a_{44} = 0\,.$$

Charakteristická rovnice kvadriky má v těchto souřadnicích tvar

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)(a_{33} - \lambda) = 0$$

a odtud plyne tvrzení. □

Věta 26.2. *Nechť K je nestředová kvadrika hodnosti ≥ 3. Pak existuje takový kartézský repér, že vzhledem k němu má K rovnici*

$$K : \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2a_{34} z = 0\,, \tag{26.2}$$

kde λ_i, $i = 1, 2$, jsou hlavní čísla kvadriky a $a_{34} \in \mathbb{R}$ a $a_{34} \neq 0$.

Důkaz. Zvolme za počátek ortonormálního repéru vrchol kvadriky a jednotkové vektory hlavních směrů kvadriky za základní směrové vektory ortonormálního repéru. Potom podle Věty 24.4 má K rovnici

$$K : a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + 2a_{34} z = 0\,.$$

Charakteristická rovnice v těchto souřadnicích má tvar

$$-(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\lambda = 0$$

a odtud plyne tvrzení. □

Poznámka 26.1. Všimněme si, že v případě nestředové kvadriky je vždy alespoň jeden kořen charakteristické rovnice roven nule, v našem označení $\lambda_3 = 0$. Ze zbývajících kořenů musí být alespoň jeden kořen nenulový, což vyplývá z podmínky pro hodnost kvadriky. Pokud by byly oba kořeny λ_1, λ_2 nulové, byla by rovnice (26.2) lineární a kvadrika by obsahovala jako tvořící rovinu nevlastní rovinu. ♢

Věta 26.3. (Metrická klasifikace kvadrik) *Ke každé kvadrice K, která neobsahuje jako svou část nevlastní rovinu, existuje takový ortonormální repér, že vzhledem k němu má K jednu z následujících rovnic:*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=0\,,\quad a>0,\,b>0,\,c>0\,, \tag{EK1}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0\,,\quad a>0,\,b>0,\,c>0\,, \tag{EK2}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0\,,\quad a>0,\,b>0,\,c>0\,, \tag{EK3}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0\,,\quad a>0,\,b>0,\,c>0\,, \tag{EK4}$$

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}+2z=0\,,\quad p>0,\,q>0\,, \tag{EK5}$$

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}+2z=0\,,\quad p>0,\,q>0\,, \tag{EK6}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0\,,\quad a>0,\,b>0,\,c>0\,, \tag{EK7}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0\,,\quad a>0,\,b>0,\,c>0\,, \tag{EK8}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0\,,\quad a>0,\,b>0\,, \tag{EK9}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0\,,\quad a>0,\,b>0\,, \tag{EK10}$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0\,,\quad a>0,\,b>0\,, \tag{EK11}$$

$$\frac{x^2}{p}+2z=0\,,\quad p>0\,, \tag{EK12}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0\,,\quad a>0,\,b>0\,, \tag{EK13}$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0\,,\quad a>0,\,b>0\,, \tag{EK14}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + 1 = 0\,, \quad a > 0\,, \tag{EK15}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - 1 = 0\,, \quad a > 0\,, \tag{EK16}$$

$$x^2 = 0\,, \tag{EK17}$$

kde a, b, c, p, q jsou reálná čísla.

Důkaz. Důkaz se provede stejně jako ve Větě 17.3 úpravou rovnic (26.1) a (26.2). □

Poznámka 26.2. Kladná čísla a, b, c v rovnicích (EK1) – (EK4) elipsoidů a hyperboloidů se nazývají *délky poloos*. Pro osy kvadriky, na kterých leží reálné vrcholy kvadriky, udávají tato čísla vzdálenosti vrcholů od středu kvadriky.

Čísla p, q v rovnicích (EK5) – (EK6) paraboloidů jsou parametry parabol, ve kterých protínají paraboloid všechny roviny rovnoběžné s jednou ze dvou hlavních rovin paraboloidu.

Rovnice (EK7) (respektive (EK8)) určuje imaginární (respektive reálnou) kuželovou plochu. Čísla a, b jsou délky poloos řídící kuželosečky – imaginární (respektive reálné) elipsy. Přitom je osa kuželové plochy kolmá na rovinu řídící kuželosečky.

Čísla a, b v rovnicích (EK9) – (EK11) jsou délky poloos řídící kuželosečky (imaginární elipsy, respektive reálné elipsy, respektive hyperboly) imaginární eliptické, respektive reálné eliptické, respektive hyperbolické válcové plochy. Přitom je osa válcové plochy kolmá na rovinu řídící kuželosečky.

Číslo p v rovnici (EK12) je parametr řídící kuželosečky (paraboly) parabolické válcové plochy. Přitom jsou tvořící přímky kolmé na rovinu řídící paraboly.

Rovnice (EK13) (respektive (EK14)) určuje dvojici komplexně sdružených (respektive reálných) různoběžných rovin, které se protínají v ose z.

Rovnice (EK15) (respektive (EK16)) určuje dvojici komplexně sdružených (respektive reálných) rovnoběžných rovin, které jsou rovnoběžné s rovinou $x = 0$.

Konečně rovnice (EK17) je rovnicí dvojnásobné roviny $x = 0$. ♢

Poznámka 26.3. Kvadriky mají velký význam ve stavebnictví. Na titulní straně je ukázka využití eliptického paraboloidu k zastřešení budovy (pavilon Z na výstavišti v Brně), podobně v závěru textu jsou ukázky využití hyperbolického paraboloidu jako skořepiny střech nebo jednodílného hyperboloidu jako chladící věže elektráren nebo konstrukce vodojemu. ♢

Poznámka 26.4. Má–li charakteristická rovnice kvadriky trojnásobný nenulový kořen, jsou příslušné kvadriky *zobecněné kulové plochy*. V kanonických rovnicích tomu odpovídají rovnice (EK1), (EK2) a (EK7), kde $a = b = c = r$.

(EK1) má potom tvar

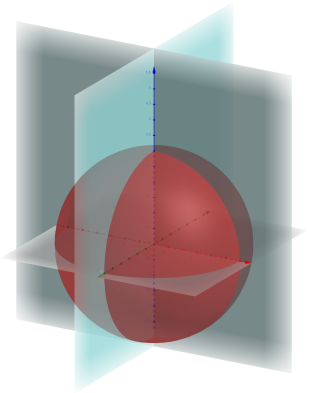
$$x^2 + y^2 + z^2 = -r^2\,, \qquad r \neq 0\,,$$

a určuje *imaginární kulovou plochu*.

(EK2) má potom tvar

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2\,, \qquad r \neq 0\,,$$

a určuje (reálnou) *kulovou plochu* o poloměru r. Na Obrázku 26.1 je reálná kulová plocha o rovnici $K : x^2 + y^2 + z^2 = 9$ proťatá souřadnými rovinami.



Obrázek 26.1: Reálná kulová plocha

(EK7) má potom tvar

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

a určuje *nulovou kulovou plochu* (reálná kulová plocha s nulovým poloměrem). ♢

Poznámka 26.5. Má–li charakteristická rovnice kvadriky dvojnásobný nenulový kořen, je příslušná kvadrika rotační a vzniká rotací kuželosečky kolem některé její osy. Všimněme si, jak vznikají reálné rotační kvadriky.

Rotací reálné elipsy v rovině $x = 0$ o rovnici

$$k : \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

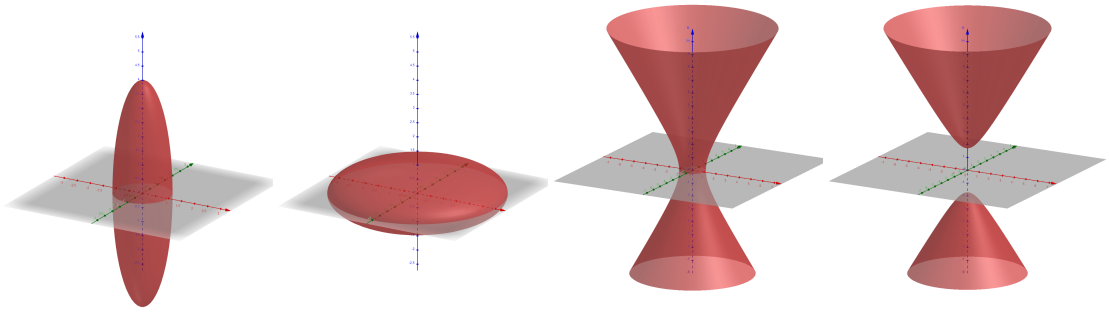
kolem souřadné osy z vznikne *rotační elipsoid* o rovnici

$$K : \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0\,.$$

Je–li přitom $b > c$, nazývá se tento elipsoid *zploštělý* a je–li $b < c$, nazývá se tento elipsoid *protáhlý*. Na Obrázku 26.2 je zploštělý elipsoid o rovnici $K : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ proťatý rovinou xy a protáhlý elipsoid o rovnici $K : x^2 + y^2 + \frac{z^2}{3} = 1$ proťatý rovinou xy.

Rotací hyperboly v rovině $x = 0$ o rovnici

$$k : \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$



Obrázek 26.2: Rotační elipsoidy a hyperboloidy

kolem osy z (vedlejší osa hyperboly) vzniká *rotační jednodílný hyperboloid* o rovnici

$$K : \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0\,.$$

Naopak rotací kolem osy y (hlavní osa hyperboly) vzniká *rotační dvojdílný hyperboloid* o rovnici

$$K : -\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0\,.$$

Na Obrázku 26.2 je rotační jednodílný hyperboloid o rovnici $K : x^2 + y^2 - \frac{z^2}{3} = 1$ proťatý rovinou xy a rotační dvoudílný hyperboloid o rovnici $K : x^2 + y^2 - \frac{z^2}{3} = -1$ proťatý rovinou xy. Asymptoty hyperboly vytvoří při této rotaci asymptotickou kuželovou plochu hyperboloidu. Tyto dva hyperboloidy jsou navzájem *doplňkové*, tj. mají stejné osy, asymptotické kužely a imaginární vrcholy jednoho hyperboloidu jsou reálné vrcholy doplňkového hyperboloidu. Pří rotaci hyperboly kolem její osy vytvoří doplňkový hyperboloid doplňková hyperbola.

Rotací paraboly v rovině $x = 0$ o rovnici

$$k : \frac{y^2}{q} + 2z = 0$$

kolem osy z (osa paraboly) vzniká *rotační paraboloid* o rovnici

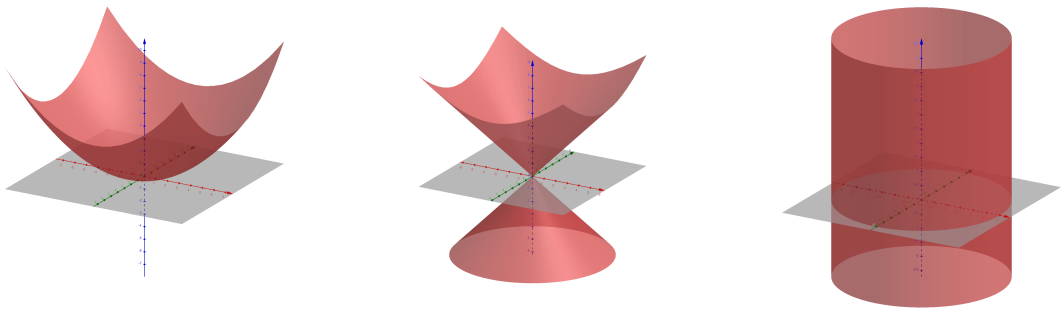
$$K : \frac{x^2}{q} + \frac{y^2}{q} + 2z = 0\,.$$

Na Obrázku 26.3 je rotační paraboloid o rovnici $K : \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{6} - 2z = 0$.

Rotací dvojice reálných různoběžných přímek v rovině $x = 0$ o rovnici

$$k : \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

kolem jedné z os y nebo z (osy této singulární kuželosečky) vzniká *rotační (reálná) kuželová plocha*. Na Obrázku 26.3 je rotační reálná kuželová plocha o rovnici $K : x^2 + y^2 - z^2 = 0$.



Obrázek 26.3: Rotační paraboloid, rotační kuželová a rotační válcová plocha

Konečně rotací dvojice (reálných) rovnoběžných přímek v rovině $x = 0$ o rovnici

$$k : \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

kolem osy z (osa této singulární kuželosečky) vzniká *rotační (reálná) válcová plocha.* Na Obrázku 26.3 je rotační reálná válcová plocha o rovnici $K : x^2 + y^2 = 9$. ♢

Věty 26.1 a 26.2 popisují, jak zvolit ortonormální repér tak, aby měla kvadrika kanonické rovnice, ze kterých snadno určíme všechny informace o kvadrice. Je–li tedy kvadrika zadána rovnicí (25.5), musíme určit hlavní směry kvadriky, střed, či vrchol kvadriky a napsat transformační rovnice přechodu k ortonormálnímu repéru popsanému ve Větách 26.1 a 26.2. Dosazením takovýchto transformačních rovnic do původní rovnice kvadriky potom dostaneme kanonickou rovnici (26.1) nebo (26.2). Tento postup je ovšem velice zdlouhavý a pracný. Podobně jako v případě kuželoseček existuje způsob, jak velice rychle určit kanonické rovnice kvadriky bez hledání příslušných transformačních rovnic. Tato metoda se nazývá **metoda invariantů**. Metoda úpravy rovnic pomocí otáčení souřadnicového repéru kolem počátku a posunování počátku je sice teoreticky také možná, ale velice pracná. Proto se u kvadrik nepoužívá.

Podobně jako v teorii kuželoseček definujeme *invariant kvadriky* jako reálné číslo, které je přiřazeno koeficientům matice kvadriky a nezávisí na zvoleném souřadnicovém repéru. Stejným způsobem se definuje také stupeň invariantu kvadriky a absolutní invariant kvadriky.

Stejně jako v teorii kuželoseček je hodnost kvadriky absolutní invariant, který je projektivní. Hodnost matice $\bar{A}$ je afinním absolutním invariantem.

Všechny další invarianty kvadriky jsou euklidovské. Protože charakteristická rovnice kvadriky je nezávislá na zvoleném ortonormálním repéru, jsou její kořeny i koeficienty invarianty kvadriky. Koeficienty charakteristické rovnice jsou čísla $I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$, $I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$ a $I_3 = |\bar{A}|$. Potom I_1 je invariant stupně 1, I_2 je invariant stupně 2 a I_3 je invariant stupně 3. Další inva-

riant kvadriky stupně 4 je determinant matice A. Důkaz tohoto tvrzení je totožný s důkazem Věty 17.4. Hlavní čísla kvadriky jsou potom invarianty stupně 1.

Pomocí těchto invariantů můžeme nyní snadno určit kanonické rovnice některých kvadrik.

Věta 26.4. *Nechť K je kvadrika, která má právě jeden vlastní střed, a v nějakém kartézském repéru má rovnici (25.5). Pak existuje takový kartézský repér, že vzhledem k němu má K rovnici*

$$K : \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \frac{|A|}{|\bar{A}|} = 0\,, \tag{26.3}$$

kde λ_i $i = 1, 2, 3$, jsou nenulová hlavní čísla kvadriky.

Důkaz. Podmínka, že K má právě jeden střed, je ekvivalentní tomu, že hodnost matice $\bar{A}$ je 3, tj. všechna hlavní čísla jsou nenulová (vyplývá z kořenových vztahů pro charakteristickou rovnici). Potom podle Věty 26.1 má K v nějakém kartézském repéru rovnici

$$K : \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + b_{44} = 0.$$

Protože $|A|$ je invariantní při změnách kartézských souřadnic, je $|A| = = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 b_{44}$ a odtud $b_{44} = |A|/|\bar{A}|$, protože z kořenových vztahů pro charakteristickou rovnici je $|\bar{A}| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$. □

Věta 26.5. *Nechť K je regulární nestředová kvadrika, která má v nějakém kartézském repéru rovnici (25.5). Pak existuje takový kartézský repér, že vzhledem k němu má K rovnici*

$$K : \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 \pm 2\sqrt{-\frac{|A|}{\lambda_1\lambda_2}}\, z = 0\,, \tag{26.4}$$

kde λ_i $i = 1, 2$, jsou nenulová hlavní čísla kvadriky.

Důkaz. Je-li K nestředová regulární kvadrika, je $|A| \neq 0$ a $\bar{A}$ má hodnost 2, tj. charakteristická rovnice pro matici $\bar{A}$ má 2 nenulové kořeny. Potom podle Věty 26.2 má K v nějakém kartézském repéru rovnici

$$K : \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2b_{34} z = 0.$$

Protože $|A|$ je invariantní při změnách kartézských souřadnic, je $|A| = -\lambda_1\lambda_2 (b_{34})^2$ a odtud $b_{34} = \pm\sqrt{-\frac{|A|}{\lambda_1\lambda_2}}$. □

Poznámka 26.6. Předchozí dvě věty se tedy dají použít k rychlému nalezení kanonických rovnic pro všechny regulární kvadriky a singulární kvadriky hodnosti 3, které mají právě jeden vlastní střed (kuželové plochy). V ostatních případech budeme potřebovat ještě další invarianty. ♢

Uvažujme rovnici (25.5) kvadriky K. Definujme polynom

$$\Gamma(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\lambda & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} \bar{A}-\lambda E & (\mathbf{a}) \\ (\mathbf{a})^T & a_{44} \end{vmatrix} = -\Gamma_0\lambda^3 + \Gamma_1\lambda^2 - \Gamma_2\lambda + \Gamma_3\,,$$

kde

$$\Gamma_0 = a_{44}\,,$$
$$\Gamma_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{14} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{24} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}\,,$$
$$\Gamma_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{24} \\ a_{14} & a_{24} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{13} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}\,,$$
$$\Gamma_3 = |A|\,.$$

Věta 26.6. *Funkce $\Gamma(\lambda)$ je invariantní při změnách ortonormálního repéru, které zachovávají počátek.*

Důkaz. Důkaz je totožný s důkazem Věty 17.7. □

Věta 26.7. *Nechť K je kvadrika hodnosti 3 parabolického typu. Pak koeficient Γ_2 funkce $\Gamma(\lambda)$ je invariant kvadriky K.*

Důkaz. Podle Věty 26.6 je Γ_2 invariantní při změnách ortonormálního repéru, které zachovávají počátek. Musíme tedy ještě dokázat, že Γ_2 je invariantní při posunutí ortonormálního repéru do nového počátku. Nechť K má v nějakém ortonormálním repéru rovnici (25.5) a nechť $P = [p_1; p_2; p_3]$ je nový počátek souřadnicového repéru. Potom v novém souřadnicovém repéru dostaneme

$$\Gamma_2' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & F_1(P) \\ a_{12} & a_{22} & F_2(P) \\ F_1(P) & F_2(P) & F(P) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & F_1(P) \\ a_{13} & a_{33} & F_3(P) \\ F_1(P) & F_3(P) & F(P) \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & F_2(P) \\ a_{23} & a_{33} & F_3(P) \\ F_2(P) & F_3(P) & F(P) \end{vmatrix}\,,$$

kde

$$F_1(P) = a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{13}p_3 + p_{14}\,,$$
$$F_2(P) = a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + a_{23}p_3 + p_{24}\,,$$
$$F_3(P) = a_{13}p_1 + a_{23}p_2 + a_{33}p_3 + p_{34}\,,$$
$$F(P) = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}p_ip_j + 2a_{14}p_1 + 2a_{24}p_2 + 2a_{34}p_3 + a_{44}\,.$$

Přímým výpočtem dostaneme

$$\Gamma_2' = (p_1^2+p_2^2+p_3^2)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + 2p_1\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{23} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} + \\ + 2p_2\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} + 2p_3\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{34} \end{vmatrix} + \Gamma_2\,.$$

Pro kvadriku hodnosti 3, která je parabolického typu, je hodnost matice $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$ menší než 3 a odtud $\Gamma_2' = \Gamma_2$. □

Věta 26.8. *Nechť K je kvadrika hodnosti 3 parabolického typu, která má souřadnicové vyjádření* (25.5). *Potom v polárním ortonormálním repéru má K jednu z kanonických rovnic*

$$K : \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{\Gamma_2}{\lambda_1\lambda_2} = 0\,, \tag{26.5}$$

$$K : \lambda_1 x^2 \pm 2\sqrt{-\frac{\Gamma_2}{\lambda_1}}\, z = 0\,, \tag{26.6}$$

kde λ_1, λ_2 jsou nenulová hlavní čísla kvadriky.

Důkaz. Kvadrika parabolického typu hodnosti 3 je válcová plocha, která může být eliptická, hyperbolická nebo parabolická. Eliptická nebo hyperbolická válcová plocha má vlastní přímku středů a podle Věty 26.1 má rovnici

$$K : \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + b_{44} = 0\,.$$

Podle Věty 26.7 je $\Gamma_2 = \lambda_1\lambda_2 b_{44}$ a odtud plyne rovnice (26.5).

Parabolická válcová plocha nemá žádný vlastní střed a podle Věty 26.2 má rovnici

$$K : \lambda_1 x^2 + 2b_{34} z = 0\,.$$

Podle Věty 26.7 je $\Gamma_2 = -\lambda_1 b_{34}^2$ a odtud plyne rovnice (26.6). □

Předchozí věty nám umožňují určit kanonické rovnice pro všechny kvadriky hodnosti větší nebo rovny třem. Protože pro kvadriku hodnosti jedna je vždy kanonická rovnice rovna $K : \lambda_1 x^2 = 0$, musíme ještě prodiskutovat situaci pro kvadriky hodnosti dva, tj. pro dvojici rovin. V případě, že jsou roviny různoběžné, má kvadrika přímku vlastních středů a charakteristická rovnice musí mít dva nenulové kořeny. Podle Věty 26.1 musí mít tedy kvadrika kanonickou rovnici

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 0\,.$$

Zbývá nám tedy jen případ rovnoběžných rovin.

Věta 26.9. *Nechť K je kvadrika tvořená rovnoběžnými rovinami. Pak koeficient Γ_1 funkce $\Gamma(\lambda)$ je invariant kvadriky K.*

Důkaz. Stejně jako ve Větě 26.7 stačí dokázat, že Γ_1 je invariantní při posunutí ortonormálního repéru do nového počátku. Při stejném označení jako ve Větě 26.7 je v novém souřadnicovém repéru

$$\begin{aligned}
\Gamma_1' &= \begin{vmatrix} a_{11} & F_1(P) \\ F_1(P) & F(P) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & F_2(P) \\ F_2(P) & F(P) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & F_3(P) \\ F_3(P) & F(P) \end{vmatrix} = \\
&= p_1^2 \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} \right) + p_2^2 \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \right) + \\
&\quad + p_3^2 \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \right) + 2p_1p_2 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + 2p_1p_3 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} + \\
&\quad + 2p_2p_3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{12} & a_{23} \end{vmatrix} - 2p_1 \left(\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{vmatrix} \right) + \\
&\quad + 2p_2 \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{12} & a_{24} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} \right) + 2p_3 \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{13} & a_{34} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{34} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} \right) + \Gamma_1 \,.
\end{aligned}$$

Pro kvadriku hodnosti 2, která je tvořena rovnoběžnými rovinami, je hodnost matice $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$ rovna jedné a odtud $\Gamma_1' = \Gamma_1$. □

Věta 26.10. *Nechť K je kvadrika tvořená rovnoběžnými rovinami, která má souřadnicové vyjádření (25.5). Potom v polárním ortonormálním repéru má K kanonickou rovnici*

$$\lambda_1 x^2 + \frac{\Gamma_1}{\lambda_1} = 0 \,, \tag{26.7}$$

kde λ_1 je nenulové hlavní číslo kvadriky.

Důkaz. Podle Věty 26.1 má K rovnici

$$\lambda_1 x^2 + b_{44} = 0 \,.$$

Podle Věty 26.9 je $\Gamma_1 = \lambda_1 b_{44}$ a odtud plyne tvrzení. □

Poznámka 26.7. Metodu invariantů tedy můžeme shrnout do následující tabulky, kde λ_i jsou nenulová hlavní čísla kvadriky.

$h(A)$	$h(\bar{A})$	kanonická rovnice	typ kvadriky
$h(A)=4$	$h(\bar{A})=3$	$\lambda_1 x^2+\lambda_2 y^2+\lambda_3 z^2+\frac{\lvert A\rvert}{\lvert\bar{A}\rvert}=0$	elipsoidy, hyperboloidy
	$h(\bar{A})=2$	$\lambda_1 x^2+\lambda_2 y^2+2\sqrt{-\frac{\lvert A\rvert}{\lambda_1\lambda_2}}\,z=0$	paraboloidy
$h(A)=3$	$h(\bar{A})=3$	$\lambda_1 x^2+\lambda_2 y^2+\lambda_3 z^2=0$	kuželové plochy
	$h(\bar{A})=2$	$\lambda_1 x^2+\lambda_2 y^2+\frac{\Gamma_2}{\lambda_1\lambda_2}=0$	eliptické a hyperbolické válcové plochy
	$h(\bar{A})=1$	$\lambda_1 x^2+2\sqrt{-\frac{\Gamma_2}{\lambda_1}}\,z=0$	parabolická válcová plocha
$h(A)=2$	$h(\bar{A})=2$	$\lambda_1 x^2+\lambda_2 y^2=0$	různoběžné roviny
	$h(\bar{A})=1$	$\lambda_1 x^2+\frac{\Gamma_1}{\lambda_1}=0$	rovnoběžné roviny
	$h(\bar{A})=0$	neexistuje	vlastní rovina a nevlastní rovina
$h(A)=1$	$h(\bar{A})=1$	$\lambda_1 x^2=0$	dvojnásobná vlastní rovina
	$h(\bar{A})=0$	neexistuje	dvojnásobná nevlastní rovina

Úloha 26.1. Určete transformaci ortonormálních souřadnic, která převádí rovnici kvadriky K do kanonického tvaru. Určete také kanonickou rovnici a typ kvadriky:

a) $K: x^2-4y^2+z^2+6xz+4x+16y-4z-16=0\,,$

b) $K: x^2+2y^2+z^2-2xz-2x-2z+4=0\,.$

Řešení: a) Z Úlohy 25.1 a) máme jednotkové vektory hlavních směrů $\mathbf{e}_1=(0;1;0)$, $\mathbf{e}_2=(\frac{1}{\sqrt{2}};0;-\frac{1}{\sqrt{2}})$ a $\mathbf{e}_3=(\frac{1}{\sqrt{2}};0;\frac{1}{\sqrt{2}})$. Kvadrika je středová s jediným vlastním středem $S=[1;2;-1]$. Otronormální repér $\langle S;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\rangle$ je tedy polární ortonormální repér kvadriky a transformační rovnice, které převádí danou rovnici kvadriky do kanonického tvaru, jsou

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}y'+\frac{1}{\sqrt{2}}z'+1\,,\\ y &= x' \qquad\qquad +2\,,\\ z &= -\frac{1}{\sqrt{2}}y'+\frac{1}{\sqrt{2}}z'-1\,. \end{aligned}$$

Dosazením do původní rovnice kvadriky dostaneme kanonickou rovnici

$K : -4x'^2 - 2y'^2 + 4z'^2 + 4 = 0\,,$

kterou vydělením -4 upravíme na tvar

$K : x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 - z'^2 - 1 = 0\,.$

Jedná se tedy o jednodílný hyperboloid.

b) Z Úlohy 25.1 b) máme jednotkové vektory hlavních směrů $\mathbf{e}_1 = = (\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $\mathbf{e}_2 = (0; 1; 0)$ a $\mathbf{e}_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; \frac{1}{\sqrt{2}})$. Kvadrika je nestředová a podle Úlohy 25.3 b) má jediný vlastní vrchol $V = [1; 0; 1]$. Ortonormální repér $\langle V; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\rangle$ je tedy polární ortonormální repér kvadriky a transformační rovnice, které převádějí danou rovnici kvadriky do kanonického tvaru, jsou

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}z' + 1\,,\\ y &= y'\,,\\ z &= -\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}z' + 1\,. \end{aligned}$$

Dosazením do původní rovnice kvadriky dostaneme kanonickou rovnici

$K : 2x'^2 + 2y'^2 + \sqrt{2}\,z' = 0\,,$ kterou vydělením 2 upravíme na tvar

$K : x'^2 + y'^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\,z' = 0\,.$

Kvadrika je tedy eliptický (rotační) paraboloid.

Úloha 26.2. Metodou invariantů určete kanonickou rovnici a typ kvadriky:

a) $K : x^2 - 4y^2 + z^2 + 6xz + 4x + 16y - 4z - 16 = 0\,,$

b) $K : x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xz - 2x - 2z + 4 = 0\,,$

c) $K : x^2 + y^2 + 3z^2 + 10xy + 6xz + 6yz - 10x - 2y - 6z + 37 = 0\,,$

d) $K : 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 2xz + 2yz - 6x + 18y + 24z = 0\,,$

e) $K : x^2 + 4y^2 + z^2 + 4xy - 2xz - 4yz + x + 2y - z = 0\,.$

Řešení: a) Určíme $\det(A) = 128$ a $\det(\bar{A}) = 32$, tj. kvadrika je regulární středová. Z Úlohy 25.1 a) jsou kořeny charakteristické rovnice $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -2$ a $\lambda_3 = 4$. Podle Věty 26.4 má kvadrika kanonickou rovnici

$K : -4x'^2 - 2y'^2 + 4z'^2 + 4 = 0\,,$

kterou vydělením -4 upravíme na tvar

$K : x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 - z'^2 - 1 = 0\,.$

Jde o jednodílný hyperboloid.

b) Určíme $\det(A) = -8$ a $\det(\bar{A}) = 0$, tj. kvadrika je regulární nestředová (paraboloid). Z Úlohy 25.1 b) jsou kořeny charakteristické rovnice $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ a $\lambda_3 = 0$. Podle Věty 26.5 má kvadrika kanonickou rovnici

$K : 2x'^2 + 2y'^2 + \sqrt{2}\, z' = 0\,,$

kterou vydělením 2 upravíme na tvar

$K : x'^2 + y'^2 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\, z' = 0\,.$

Jedná se tedy o rotační paraboloid.

c) Určíme $\det(A) = 0$ a hodnost A je 3, tj. kvadrika je singulární hodnosti 3. Dále $\det(\bar{A}) = 0$ a hodnost $\bar{A}$ je 2, tj. kvadrika je parabolického typu (válcová plocha). Charakteristická rovnice kvadriky je $\lambda^3 - 5\lambda^2 - 36\lambda = 0$ s kořeny $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = -4$ a $\lambda_3 = 0$. Určíme $\Gamma_2 = -1296$ a podle Věty 26.8 má kvadrika kanonickou rovnici

$K : 9x^2 - 4y^2 + 36 = 0\,,$

kterou vydělením 36 upravíme na tvar

$K : \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} + 1 = 0\,.$

Jedná se tedy o hyperbolickou válcovou plochu.

d) Určíme $\det(A) = 0$ a hodnost A je 3, tj. kvadrika je singulární hodnosti 3. Dále $\det(\bar{A}) = 0$ a hodnost $\bar{A}$ je 2, tj. kvadrika je parabolického typu (válcová plocha). Charakteristická rovnice kvadriky je $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda = 0$ s kořeny $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ a $\lambda_3 = 0$. Určíme $\Gamma_2 = -702$ a podle Věty 26.8 má kvadrika kanonickou rovnici

$K : 3x^2 + 3y^2 - 78 = 0\,,$

kterou vydělením 3 upravíme na tvar

$K : x^2 + y^2 - 26 = 0\,.$

Jedná se tedy o rotační válcovou plochu poloměru $\sqrt{26}$.

e) Určíme $\det(A) = 0$ a hodnost A je 2, tj. kvadrika je složena z dvojice rovin. Dále $\det(\bar{A}) = 0$ a hodnost $\bar{A}$ je 1, tj. tvořící roviny jsou rovnoběžné. Charakteristická rovnice kvadriky je $\lambda^3 - 6\lambda^2 = 0$ s kořeny $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Určíme $\Gamma_1 = -3/2$ a podle Věty 26.10 má kvadrika kanonickou rovnici

$K : 6x^2 - \dfrac{1}{4} = 0\,.$

Jedná se tedy o reálné rovnoběžné roviny.

Poznámka: Opravdu, původní rovnici kvadriky můžeme rozložit na

$K : (x + 2y - z)(x + 2y - z + 1) = 0\,.$

Kvadrika je tedy tvořena dvojicí reálných rovnoběžných rovin, jejichž obecné rovnice v původních souřadnicích jsou $\alpha : x + 2y - z = 0$ a $\beta : x + 2y - z + 1 = 0$.

27 Cvičení

V následujících cvičeních se souřadnice a rovnice vztahují k dané geometrické bázi projektivního prostoru.

27.1. Určete hodnost kvadriky

$K : 2x_1^2 + 4x_2^2 - x_3^2 - 8x_1x_2 + 8x_1x_4 - 8x_2x_4 + 4x_4^2 = 0\,.$

Je–li K singulární, určete její singulární body.

{ Hodnost kvadriky je 3, singulární bod$(0;1;0;1)$ }

27.2. Rozhodněte, zda kvadrika K je regulární nebo singulární:

a) $K : x_1^2 - 4x_1x_2 - 2x_2^2 - 8x_1x_3 + 6x_1x_4 - 5x_4^2 = 0\,,$

b) $K : x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 6x_3x_4 + 3x_4^2 = 0\,,$

c) $K : x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_4 + 3x_2^2 + 8x_2x_3 + 8x_3^2 + 8x_3x_4 + 6x_4^2 = 0\,.$

{ a) Regulární, b) singulární hodnosti 3,
c) singulární hodnosti 2 }

27.3. Je dána kvadrika

$K : x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_4 + x_2^2 - x_3^2 + 2x_3x_4 + x_4^2 = 0\,.$

a) Určete polární rovinu bodu $P = (1;2;-1;1)$ vzhledem ke kvadrice.

b) Určete pól roviny $\pi : 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0$ vzhledem ke kvadrice.

{ a) $\pi : x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0$, b) $P = (0;2;-5;-1)$
}

27.4. Je dána kvadrika

$K : x_1^2 - 2x_1x_2 + x_1x_3 - x_1x_4 + x_2^2 + 5x_2x_3 + 3x_2x_4 - x_3x_4 = 0\,.$

a) Určete tečnou rovinu kvadriky v bodě $T = (1;-1;-1;1)$.

b) Ukažte, že rovina $x_2 = 0$ je tečnou rovinou kvadriky a určete její bod dotyku.

{ a) $2x_1 - 6x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 0$, b) $T = (1;0;-1;1)$ }

27.5. Určete hodnost, normální rovnici a projektivní typ kvadriky K:

a) $K : 9x_1^2+12x_1x_2-6x_1x_3+30x_1x_4+4x_2^2-4x_2x_3+20x_2x_4+x_3^2-10x_3x_4+25x_4^2 = 0\,,$

b) $K : 2x_1^2+2x_1x_2+6x_1x_3+2x_1x_4-x_2^2+8x_2x_3+4x_2x_4+7x_3^2-2x_3x_4+7x_4^2 = 0\,,$

c) $K : 3x_1^2 + 8x_1x_2 + 8x_1x_4 + 4x_2x_3 - 4x_2x_4 + x_3^2 + 16x_3x_4 + 11x_4^2 = 0\,,$

d) $K : 3x_1^2-2x_1x_2-2x_1x_3+22x_1x_4-5x_2^2+6x_2x_3-42x_2x_4-x_3^2+10x_3x_4-16x_4^2 = 0\,.$

{ a) $h(K) = 1$; $y_1^2 = 0$; dvojnásobná tvořící rovina;
v původních souřadnicích má tvořící rovina rovnici $3x_1+$
$2x_2 - x_3 + 5x_4 = 0$,
b) $h(K) = 4$; $y_1^2+y_2^2+y_3^2-y_4^2 = 0$; nepřímková regulární
kvadrika,
c) $h(K) = 3$; $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 0$; reálná kuželová plocha,
d) $h(K) = 2$; $y_1^2 - y_2^2 = 0$; dvojice reálných rovin }

27.6. Pro kvadriky z Cvičení 27.5 určete normovanou polární geometrickou bázi a transformaci projektivních homogenních souřadnic, která převádí rovnici kvadriky do normálního tvaru.

{ a) Například $O_1 = (\frac{1}{3}; 0; 0; 0)$, $O_2 = (2; -3; 0; 0)$, $O_3 = (1; 0; 3; 0)$, $O_4 = (5; 0; 0; -3)$, $E = (\frac{25}{3}; -3; 3; -3)$, $x_1 = \frac{1}{3}y_1 + 2y_2 + y_3 + 5y_4$, $x_2 = -3y_2$, $x_3 = 3y_3$, $x_4 = -3y_4$,

b) Například $O_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; 0; 0)$, $O_2 = (-\frac{1}{2\sqrt{2}}; \frac{1}{2\sqrt{2}}; 0; \frac{1}{2\sqrt{2}})$, $O_3 = (-\frac{7}{2\sqrt{15}}; \frac{5}{2\sqrt{15}}; \frac{3}{2\sqrt{15}}; 0)$, $O_4 = (\frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{2}{\sqrt{6}}; 0; 0)$, $E = (\frac{\sqrt{15}-7\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{2\sqrt{30}}; \frac{\sqrt{15}+5\sqrt{2}-4\sqrt{5}}{2\sqrt{30}}; \frac{3}{2\sqrt{15}}; \frac{1}{2\sqrt{2}})$, $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}y_2 - \frac{7}{2\sqrt{15}}y_3 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_4$, $x_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}y_2 + \frac{5}{2\sqrt{15}}y_3 - \frac{2}{\sqrt{6}}y_4$, $x_3 = \frac{3}{2\sqrt{15}}y_3$, $x_4 = \frac{1}{2\sqrt{2}}y_2$,

c) Například $O_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}; 0; 0; 0)$, $O_2 = (0; \frac{1}{\sqrt{15}}; 0; -\frac{1}{\sqrt{15}})$, $O_3 = (-\frac{4}{\sqrt{35}}; \frac{3}{\sqrt{35}}; \frac{1}{\sqrt{35}}; 0)$, $O_4 = (4; -5; -6; 2)$, $E = (\frac{\sqrt{35}-4\sqrt{3}+4\sqrt{105}}{\sqrt{105}}; \frac{\sqrt{7}+3\sqrt{3}-5\sqrt{105}}{\sqrt{105}}; \frac{1-6\sqrt{35}}{\sqrt{35}}; \frac{-1+2\sqrt{15}}{\sqrt{15}})$, $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 - \frac{4}{\sqrt{35}}y_3 + 4y_4$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}y_2 + \frac{3}{\sqrt{35}}y_3 - 5y_4$, $x_3 = \frac{1}{\sqrt{35}}y_3 - 6y_4$, $x_4 = -\frac{1}{\sqrt{15}}y_2 + 2y_4$,

d) Například $O_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}; 0; 0; 0)$, $O_2 = (0; \frac{1}{2\sqrt{3}}; -\frac{1}{2\sqrt{3}}; 0)$, $O_3 = (1; 1; 2; 0)$, $O_4 = (-3; 0; 13; 2)$, $E = (\frac{1-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}; \frac{1+2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}; \frac{-1+30\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}; 2)$, $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 + y_3 - 3y_4$, $x_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}y_2 + y_3$, $x_3 = -\frac{1}{2\sqrt{3}}y_2 + 2y_3 + 13y_4$, $x_4 = 2y_4$ }

27.7. Dokažte, že kvadrika

$$K : 3x_1^2 + 8x_1x_2 + 2x_1x_4 + 4x_2x_3 - 16x_2x_4 + x_3^2 + 14x_3x_4 - 9x_4^2 = 0$$

je kuželová plocha a určete její vrchol.

{ $V = (6; -5; -4; 2)$ }

V následujících cvičeních se souřadnice a rovnice vztahují k danému afinnímu repéru v afinním prostoru.

27.8. Určete průnik kvadriky

$$K : 3y^2 + 4z^2 + 24x + 12y - 72z + 360 = 0$$

s rovinou $\alpha : x - y + z = 1$.

{ Reálná elipsa }

27.9. Je dána kvadrika

$K : x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy - 10yz - 6x - 2y + 2z + 3 = 0$

a rovina $\alpha : x + ay + z = 0$. Určete parametr a tak, aby $\alpha \cap K$ byla:

a) kuželosečka eliptického typu,

b) kuželosečka hyperbolického typu,

c) kuželosečka parabolického typu,

d) elipsa,

e) hyperbola,

f) parabola.

{ a) $a \in (-\infty; -\frac{7}{4}) \cup (\frac{13}{4}; \infty)$,
b) $a \in (-\frac{7}{4}; \frac{13}{4})$,
c) $a \in \{-\frac{7}{4}; \frac{13}{4}\}$,
d) $a \in (-\infty; \frac{13-5\sqrt{5}}{4}) \cup (\frac{13+5\sqrt{5}}{4}; \infty)$,
e) $a \in (\frac{13-5\sqrt{5}}{4}; \frac{6}{5}) \cup (\frac{6}{5}; 2) \cup (2; \frac{13+5\sqrt{5}}{4})$,
f) $a \in \{\frac{13-5\sqrt{5}}{4}; \frac{13+5\sqrt{5}}{4}\}$ }

27.10. Ukažte, že přímka $p \equiv X = [0; 0; 4] + t(3; 2; 1)$ je tvořící přímka kvadriky

$K : 5x^2 + 9y^2 + 9z^2 - 12xy - 6xz + 12x - 36z = 0$.

27.11. Ukažte, že přímka $q \equiv x = 1 + 4t$, $y = 2 + 2t$, $z = 0$ je tečnou kvadriky

$K : x^2 - 2y^2 + z^2 - 2xy + 4xz - yz + 3x - 5z = 0$

a určete její bod dotyku.

{ $T = [-3; 0; 0]$ }

27.12. Určete středy kvadriky K:

a) $K : 3x^2 + 2y^2 - 2xz + 4yz - 4x - 8z - 8 = 0$,

b) $K : x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 4xy - 12x + 6y - 9 = 0$,

c) $K : 5x^2 + 9y^2 + 9z^2 - 12xy - 6xz + 18y - 36z = 0$,

d) $K : 4x^2 + y^2 + 9z^2 - 4xy + 12xz - 6yz + 8x - 4y + 12z - 5 = 0$.

{ a) Jediný vlastní střed $S = [0; 2; -2]$,
b) jediný nevlastní střed $S = (-2; 1; 0; 0)$,
c) vlastní přímka středů $X = [0; -1; 6] + t(3; 2; -7)$,
d) vlastní rovina středů $2x - y + 3z + 2 = 0$ }

27.13. Určete rovnici kvadriky K, znáte–li jeden její bod $M = [2; 0; -1]$, střed $S = [0; 0; -1]$ a její průnik s rovinou $z = 0$ je kuželosečka $k : x^2 - 4xy - 1 = 0$.

{ $K : x^2 + 3z^2 - 4xy + 6z - 1 = 0$ }

27.14. Je dána kvadrika

$K : 2x^2 - 3y^2 - z^2 + 4xy + 6xz - 8yz + 2x - 8y - 11z - 2 = 0\,.$

Určete průměrovou rovinu:

a) Sdruženou se směrem $\langle(1; -3; 2)\rangle$.

b) Procházející body $P_1 = [0; 0; 1]$, $P_2 = [3; -1; 1]$. Určete také směr s ní sdružený.

c) Rovnoběžnou s rovinou $\rho : 2x - y + 3z + 7 = 0$.

d) Obsahující přímku $p : X = [3; 0; -1] + t(2; 5; 3)$.

{ a) $\sigma : 2x + 3y + 13z + 2 = 0$,
b) $\sigma : 2x + 6y - 5z + 5 = 0$, $\langle(91; 156; -136)\rangle$,
c) $\sigma : 2x - y + 3z - 2 = 0$,
d) $\sigma : 16x - 19y + 21z - 27 = 0$ }

27.15. Určete přímku q polárně sdruženou s přímkou p vzhledem ke kvadrice

$K : x^2 + 4y^2 - 9z^2 + 2x - 8y - 31 = 0$:

a) $p : x - y - 7 = 0,\ y - 3z + 8 = 0\,,$

b) $p : x + 2y - 1 = 0,\ 4y + 3z + 2 = 0\,,$

c) $p : x - 2y - 3z - 3 = 0,\ 2y + 3z - 2 = 0\,.$

{ a) $q : x + 18y + 16 - 0,\ x - 32y - 3z - 3 = 0$, přímky p a q jsou mimoběžné,
b) $q : x - 2y - 3z - 3 = 0,\ x - 2y + 3z - 15 = 0$, q a p se protínají v bodě $T = [5; -2; 2]$ ležícím na kvadrice,
c) p je tvořící přímka K a je proto polárně sdružená sama se sebou }

27.16. Ukažte, že přímka $p \equiv X = [4; -2; 0] + t(6; 3; 2)$ má vzhledem ke kvadrice

$K : x^2 - 4xy + 6yz + 2x - 5 = 0$

asymptotický směr, tj. p protíná K v jejím nevlastním bodě.

{ V homogenních souřadnicích zjistíme, že průnikem přímky p a kvadriky K je vlastní bod $(54; -75; -34; 12)$ a nevlastní bod $(6; 3; 2; 0)$ }

27.17. Určete asymptotickou kuželovou plochu kvadriky K:

a) $K : x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 6xz - 2yz + 2x - 6y - 2z = 0\,,$

b) $K : 9x^2 + 36y^2 + 4z^2 - 72x + 24z - 144 = 0\,,$

c) $K : 2x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 8xz - 4x - 8y + 3 = 0\,.$

{ a) Reálná kuželová plocha $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 6xz - 2yz + 2x - 6y - 2z + 1 = 0$,
b) imaginární kuželová plocha $9x^2 + 36y^2 + 4z^2 - 72x + 24z - 180 = 0$,
c) reálná kuželová plocha $x^2+3y^2+z^2+4xz-2x-4y+1 = 0$}

27.18. Ukažte, že kuželosečka $p : x^2 + 4y^2 + 4xy - 6x - 2y + 3 = 0$ v rovině $z = 0$ je parabola, kuželosečka $h : 4y^2 + 4z^2 - 10yz - 2y + 2z + 3 = 0$ v rovině $x = 0$ je hyperbola a kuželosečka $e : x^2 + 4z^2 - 6x + 2z + 3 = 0$ v rovině $y = 0$ je elipsa. Dokažte, že tyto kuželosečky leží na kuželové ploše s vrcholem $V = [1; 1; 1]$. Určete rovnici této kuželové plochy.

{ $K : x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy - 10yz - 6x - 2y + 2z + 3 = 0$
}

27.19. Určete afinní typ a normální rovnici kvadriky K:

a) $K : x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 4xy - 12x + 6y - 9 = 0$,

b) $K : 9x^2 - 4y^2 - 91z^2 + 18xz - 40yz - 36 = 0$,

c) $K : x^2 - 2y^2 + z^2 - 4xz + 6yz - 8x + 10y = 0$,

d) $K : x^2 + 25y^2 + 9z^2 - 10xy + 6xz - 30yz - 2x - 2y = 0$.

{ a) eliptický paraboloid, $x'^2 + y'^2 + 2z' = 0$,
b) reálná eliptická válcová plocha, $x'^2 - y'^2 - 1 = 0$,
c) jednodílný hyperboloid, $x'^2 - y'^2 - z'^2 + 1 = 0$,
d) parabolická válcová plocha, $x'^2 + 2y' = 0$ }

27.20. Pro kvadriky z Cvičení 27.19 určete normovaný polární afinní repér a transformaci afinních souřadnic, která převádí rovnici kvadriky do normálního tvaru.

{ a) Například $P = [3; \frac{3}{2}; 0]$, $\mathbf{e}_1 = (1; 0; 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0; 0; \frac{1}{\sqrt{5}})$,
$\mathbf{e}_3 = (-\frac{2}{15}; \frac{1}{15}; 0)$, $x = x' - \frac{2}{15}z' + 3$, $y = \frac{1}{15}z' + \frac{3}{2}$, $z = \frac{1}{\sqrt{5}}y'$,
b) Například $P = [0; 0; 0]$, $\mathbf{e}_1 = (2; 0; 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0; 3; 0)$, $\mathbf{e}_3 = (1; 5; -1)$, $x = 2x' - \frac{3}{\sqrt{50}}z'$, $y = 3y' + \frac{15}{\sqrt{50}}z'$, $z = \frac{3}{\sqrt{50}}z'$,
c) Například $P = [\frac{14}{3}; 3; \frac{1}{3}]$, $\mathbf{e}_1 = (\frac{\sqrt{11}}{3}; 0; \frac{2\sqrt{11}}{3})$,
$\mathbf{e}_2 = (\frac{2\sqrt{11}}{\sqrt{3}}; \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}}; \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}})$, $\mathbf{e}_3 = (0; 0; \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}})$, $x = \frac{\sqrt{11}}{3}x' + \frac{2\sqrt{11}}{\sqrt{3}}y' + \frac{14}{3}$, $y = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}}y' + 3$, $z = \frac{2\sqrt{11}}{\sqrt{3}}x' + \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}}y' + \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}}z' + \frac{1}{3}$,
d) Například $P = [0; 0; 0]$, $\mathbf{e}_1 = (\frac{1}{6}; -\frac{1}{6}; 0)$, $\mathbf{e}_2 = (-\frac{5}{6}; -\frac{1}{6}; 0)$,
$\mathbf{e}_3 = (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1)$, $x = \frac{1}{6}x' - \frac{5}{6}y' - \frac{1}{2}z'$, $y = -\frac{1}{6}x' - \frac{1}{6}y' + \frac{1}{2}z'$,
$z = z'$ }

V následujících cvičeních se souřadnice a rovnice vztahují k danému ortonormálnímu repéru v euklidovském prostoru.

27.21. Určete charakteristickou rovnici, hlavní čísla a hlavní směry kvadriky K:

a) $K : 2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy - 2x - 2y - 4z + 2 = 0$,

b) $K : 7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 18z + 30 = 0$,
c) $K : x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy - 2xz + 2yz - 6x + 6y - 6z + 9 = 0$,
d) $K : x^2 + y^2 - 3z^2 - 2xy - 6xz - 6yz + 2x + 2y + 4z = 0$,
e) $K : 5x^2 + 8y^2 + 5z^2 + 4xy - 8xz + 4yz - 27 = 0$,
f) $K : 6x^2 - 2y^2 + 6z^2 + 4xz + 8x - 4y - 8z + 1 = 0$,
g) $K : 4x^2 + 5y^2 + 6z^2 - 4xy + 4yz + 4x + 6y + 4z - 27 = 0$,
h) $K : x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 4xy - 12x + 6y - 9 = 0$.

{ a) $\lambda^3 + \lambda^2 - 17\lambda + 15 = 0$; $\lambda_1 = 1$ odpovídá $\mathbf{u}_1 = (1; -1; 0)$, $\lambda_2 = 3$ odpovídá $\mathbf{u}_2 = (1; 1; 0)$, $\lambda_3 = -5$ odpovídá
$\mathbf{u}_3 = (0; 0; 1)$,
b) $\lambda^3 - 18\lambda^2 - 99\lambda - 162 = 0$; $\lambda_1 = 3$ odpovídá $\mathbf{u}_1 = (1; 2; 2)$, $\lambda_2 = 6$ odpovídá $\mathbf{u}_2 = (2; 1; -2)$, $\lambda_3 = 9$ odpovídá
$\mathbf{u}_3 = (-2; 2; -1)$,
c) $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 36 = 0$; $\lambda_1 = 3$ odpovídá $\mathbf{u}_1 = (1; -1; 1)$, $\lambda_2 = 6$ odpovídá $\mathbf{u}_2 = (-1; 1; 2)$, $\lambda_3 = -2$ odpovídá $\mathbf{u}_3 = (1; 1; 0)$,
d) $\lambda^3 + \lambda^2 - 24\lambda + 36 = 0$; $\lambda_1 = 2$ odpovídá $\mathbf{u}_1 = (1; -1; 0)$, $\lambda_2 = 3$ odpovídá $\mathbf{u}_2 = (-1; -1; 1)$, $\lambda_3 = -6$ odpovídá
$\mathbf{u}_3 = (1; 1; 2)$,
e) $\lambda^3 - 18\lambda^2 + 81\lambda = 0$; $\lambda_{1,2} = 9$ odpovídá dvoudimenzionální podprostor hlavních směrů $L((1; 2; 0), (-4; 2; 5))$, $\lambda_3 = 0$ odpovídá $\mathbf{u}_3 = (-2; 1; -2)$,
f) $\lambda^3 - 10\lambda^2 + 8\lambda + 64 = 0$; $\lambda_1 = 8$ odpovídá $\mathbf{u}_1 = (1; 0; 1)$, $\lambda_2 = 4$ odpovídá $\mathbf{u}_2 = (1; 0; -1)$, $\lambda_3 = -2$ odpovídá $\mathbf{u}_3 = (0; 1; 0)$,
g) $\lambda^3 - 15\lambda^2 + 66\lambda - 80 = 0$; $\lambda_1 = 8$ odpovídá $\mathbf{u}_1 = (1; -2; -2)$, $\lambda_2 = 5$ odpovídá $\mathbf{u}_2 = (-2; 1; -2)$, $\lambda_3 = 2$ odpovídá
$\mathbf{u}_3 = (-2; -2; 1)$,
h) $\lambda^3 - 10\lambda^2 + 25\lambda = 0$; $\lambda_{1,2} = 5$ odpovídá dvoudimenzionální podprostor hlavních směrů $L((1; 2; 0), (0; 0; 1))$, $\lambda_3 = 0$ odpovídá $\mathbf{u}_3 = (-2; 1; 0)$ }

27.22. Určete hlavní roviny kvadrik ze cvičení 27.21.

{ a) $x - y = 0$, $3x + 3y - 2 = 0$, $5z + 2 = 0$,
b) $x + 2y + 2z - 3 = 0$, $2x + y - 2z - 6 = 0$, $2x - 2y + z + 3 = 0$,

c) $x-y+z-3=0$, $x-y-2z=0$, $x+y=0$,
d) $x-y=0$, $x+y-z=0$, $x+y+2z-1=0$,
e) dvojnásobnému hlavnímu číslu odpovídá svazek hlavních rovin se základními rovinami $x+2y=0$, $4x-2y-5z=0$, nulovému hlavnímu číslu odpovídá nevlastní singulární bod kvadriky a odpovídající hlavní roviny jsou $2x-y-2z+c=0$, kde $c\in\mathbb{R}$
f) $x+z=0$, $x-z+2=0$, $y+1=0$,
g) $x-2y-2z-1=0$, $2x-y+2z+1=0$, $2x+2y-z+4=0$,
h) dvojnásobnému hlavnímu číslu odpovídá svazek hlavních rovin se základními rovinami $x+2y=0$, $z=0$, polární rovina nevlastního bodu směru $\langle(-2;1;0)\rangle$ je nevlastní }

27.23. Určete parametrické rovnice os kvadrik ze cvičení 27.21.

{ a) $o_1: x=\frac{1}{3}$, $y=\frac{1}{3}$, $z=t-\frac{2}{5}$, $o_2: x=\frac{1}{3}+t$, $y=\frac{1}{3}+t$, $z=-\frac{2}{5}$, $o_3: x=\frac{1}{3}+t$, $y=\frac{1}{3}-t$, $z=-\frac{2}{5}$,
b) $o_1: x=1+t$, $y=2+2t$, $z=-1+2t$, $o_2: x=1+2t$, $y=2+t$, $z=-1-2t$, $o_3: x=1-2t$, $y=2+2t$, $z=-1-t$,
c) $o_1: x=1+t$, $y=-1-t$, $z=1+t$, $o_2: x=1-t$, $y=-1+t$, $z=1+2t$, $o_3: x=1+t$, $y=-1+t$, $z=1$,
d) $o_1: x=t$, $y=t$, $z=2t$, $o_2: x=t$, $y=t$, $z=\frac{1}{2}-t$, $o_3: x=\frac{1}{3}-t$, $y=t$, $z=\frac{1}{3}$,
e) osa svazku hlavních rovin odpovídajících dvojnásobnému hlavnímu číslu kvadriky je osa kvadriky $o: x=2t$, $y=-t$, $z=2t$, dále je osou kvadriky (osou symetrie) každá přímka, která kolmo protíná osu o
f) $o_1: x=-1$, $y=-1+t$, $z=1$, $o_2: x=-1+t$, $y=-1$, $z=1+t$, $o_3: x=-1+t$, $y=-1$, $z=1-t$,
g) $o_1: x=-1-2t$, $y=-1-2t$, $z=t$, $o_2: x=1-2t$, $y=t$, $z=-2-2t$, $o_3: x=-1-t$, $y=-1+2t$, $z=2t$,
h) jediná osa $o: x=-2t$, $y=t$, $z=0$ }

27.24. Určete souřadnice vrcholů kvadrik ze cvičení 27.21.

{ a) Dva reálné vrcholy $A=[\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{4\sqrt{2}-2\sqrt{5}}{5\sqrt{5}}]$, $B=[\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{-4\sqrt{2}-2\sqrt{5}}{5\sqrt{5}}]$ a dvě dvojice komplexně sdružených vrcholů $C=[\frac{\sqrt{5}+4i}{3\sqrt{5}};\frac{\sqrt{5}+4i}{3\sqrt{5}};-\frac{2}{5}]$, $\bar{C}=[\frac{\sqrt{5}-4i}{3\sqrt{5}};\frac{\sqrt{5}-4i}{3\sqrt{5}};-\frac{2}{5}]$,
$D=[\frac{1}{3}+\frac{4i}{\sqrt{15}};\frac{1}{3}-\frac{4i}{\sqrt{15}};-\frac{2}{5}]$, $\bar{D}=[\frac{1}{3}-\frac{4i}{\sqrt{15}};\frac{1}{3}+\frac{4i}{\sqrt{15}};-\frac{2}{5}]$,

b) šest reálných různých vrcholů $V_1 = [\frac{3+\sqrt{2}}{3}; \frac{6+2\sqrt{2}}{3}; \frac{-3+2\sqrt{2}}{3}]$, $V_2 = [\frac{3-\sqrt{2}}{3}; \frac{6-2\sqrt{2}}{3}; \frac{-3-2\sqrt{2}}{3}]$, $V_3 = [\frac{5}{3}; \frac{7}{3}; -\frac{5}{3}]$, $V_4 = [\frac{1}{3}; \frac{5}{3}; -\frac{1}{3}]$, $V_5 = [\frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}; \frac{6\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}; \frac{-3\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}]$,
$V_6 = [\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}; \frac{6\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}; \frac{-3\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}]$,
c) jediný vrchol (singulární bod) $V = [1; -1; 1]$,
d) čtyři různé reálné vrcholy $V_1 = [\frac{1+3\sqrt{3}}{6}; \frac{1-3\sqrt{3}}{6}; \frac{1}{3}]$,
$V_2 = [\frac{1-3\sqrt{3}}{6}; \frac{1+3\sqrt{3}}{6}; \frac{1}{3}]$, $V_3 = [\frac{1-2\sqrt{3}}{6}; \frac{1-2\sqrt{3}}{6}; \frac{1+\sqrt{3}}{3}]$,
$V_4 = [\frac{1+2\sqrt{3}}{6}; \frac{1+2\sqrt{3}}{6}; \frac{1-\sqrt{3}}{3}]$, a jedna dvojice komplexně sdružených vrcholů $V_5 = [\frac{1+i\sqrt{3}}{6}; \frac{1+i\sqrt{3}}{6}; \frac{1+i\sqrt{3}}{3}]$,
$\bar{V}_5 = [\frac{1-i\sqrt{3}}{6}; \frac{1-i\sqrt{3}}{6}; \frac{1-i\sqrt{3}}{3}]$,
e) každý vlastní bod kvadriky může být považován za její vrchol,
f) čtyři různé reálné vrcholy $V_1 = [\frac{-4+\sqrt{5}}{4}; -1; \frac{4+\sqrt{5}}{4}]$,
$V_2 = [\frac{-4-\sqrt{5}}{4}; -1; \frac{4-\sqrt{5}}{4}]$, $V_3 = [\frac{-4+\sqrt{10}}{4}; -1; \frac{4-\sqrt{10}}{4}]$,
$V_4 = [\frac{-4-\sqrt{10}}{4}; -1; \frac{4+\sqrt{10}}{4}]$, a jedna dvojice komplexně sdružených vrcholů $V_5 = [-1; \frac{-2+i\sqrt{10}}{2}; 1]$, $\bar{V}_5 = [-1; \frac{-2-i\sqrt{10}}{2}; 1]$,
g) šest reálných různých vrcholů $V_1 = [-\frac{8}{3}; -\frac{8}{3}; \frac{4}{3}]$,
$V_2 = [\frac{8}{3}; \frac{8}{3}; -\frac{4}{3}]$, $V_3 = [\frac{-15-8\sqrt{10}}{15}; \frac{-15+4\sqrt{10}}{15}; \frac{-8\sqrt{10}}{15}]$,
$V_4 = [\frac{-15+8\sqrt{10}}{15}; \frac{-15-4\sqrt{10}}{15}; \frac{8\sqrt{10}}{15}]$, $V_6 = [-\frac{5}{3}; \frac{1}{3}; \frac{4}{3}]$,
h) jediný vrchol $V = [-\frac{6}{10}; \frac{3}{10}; 0]$ }

27.25. Určete kanonické rovnice kvadrik ze cvičení 27.21 a určete jejich typ.

{ a) $x^2 + 3y^2 - 5z^2 + \frac{32}{15} = 0$; dvojdílný hyperboloid,
b) $3x^2 + 6y^2 + 9z^2 - 6 = 0$; reálný elipsoid,
c) $3x^2 + 6y^2 - 2z^2 = 0$; reálná kuželová plocha,
d) $2x^2 + 3y^2 - 6z^2 - 3 = 0$; jednodílný hyperboloid,
e) $x^2 + y^2 - 3 = 0$; reálná eliptická válcová plocha (rotační),
f) $8x^2 + 4y^2 - 2z^2 - 5 = 0$; jednodílný hyperboloid,
g) $8x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 32 = 0$; reálný elipsoid,
h) $5x^2 + 5y^2 + 6\sqrt{5}\,z = 0$; eliptický (rotační) paraboloid
}

27.26. Určete ortogonální transformace, které převádějí rovnice kvadrik ze cvičení 27.21 na kanonický tvar.

$$\{\ \text{a)}\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\\ -\frac{2}{5}\end{pmatrix},$$

$$\text{b)}\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},$$

$$\text{c)}\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},$$

$$\text{d)}\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{1}{6}\\ \frac{1}{6}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix},$$

$$\text{e)}\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3}\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix},$$

$$\text{f)}\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},$$

$$\text{g)}\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix},$$

$$\text{h)}\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\frac{6}{10}\\ \frac{3}{10}\\ 0\end{pmatrix}\ \}$$

27.27. Určete tečné roviny jednodílného hyperboloidu

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1\,,$$

které obsahují přímku p. Určete také body dotyku:

a) $p : x - y - 9 = 0,\ y - 3z + 9 = 0\,,$

b) $p : x + 2y = 0,\ 4y + 3z + 6 = 0\,,$

c) $p : x - 2y - 3z - 6 = 0,\ 2y + 3z = 0\,.$

{ a) $\tau_1 : 3x - 2y - 3z - 18 = 0$; $T_1 = [6; -1; \frac{2}{3}]$, $\tau_2 : x - 3z = 0$ je asymptotická rovina, T_2 je nevlastní bod směru $\langle(3; 0; 1)\rangle$,

b) p se dotýká kvadriky v bodě $T = [6; -3; 2]$, tečná rovina v bodě T je $\tau : x - 2y - 3z - 6 = 0$,

c) p je tvořící přímka K a tečné roviny v bodech p tvoří svazek rovin s osou p }

27.28. Určete rovnici kuželové plochy s vrcholem $V = [1; 0; -1]$ a řídící kuželosečkou, která je průnikem kvadriky $K : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} - 1 = 0$ s rovinou $\rho : x + y = 0$.

{ $180x^2 + 155y^2 + 36z^2 + 360xy + 72xz + 72yz - 288x - 288y + 144 = 0$ }

27.29. Regulární kvadrika v euklidovské prostoru má vlastní čísla
a) 1, 2, 3;
b) 1, 2, - 3;
c) 1, 2, 0;
d) 1, -2, 0.
O jakou kvadriku se jedná?

{a) Reálný nebo imaginární elipsoid; b) Jednodílný nebo dvoudílný hyperboloid; c) eliptický paraboloid; d) hyperbolický paraboloid. }

27.30. Kvadrika hodnosti 3 v euklidovském prostoru má vlastní čísla
a) 1, 2, 3;
b) 1, 2, - 3;
c) 1, 2, 0;
d) 1, -2, 0;
e) 1, 0, 0.
O jakou kvadriku se jedná?

{a) Imaginární kuželová plocha; b) reálná kuželová plocha; c) eliptická reálná nebo imaginární válcová plocha; d) hyperbolická válcová plocha; e) parabolická válcová plocha. }

27.31. V euklidovském prostoru je dána rovina α a bod F, který v ní neleží. Množina bodů, které mají stejnou vzdálenost od roviny α i od bodu F je kvadrika. O jakou kvadriku se jedná?

{Rotační eliptický parabolouid. }

27.32. V euklidovském prostoru je dána rovina α a s ní rovnoběžná přímka p, která neleží v α. Množina bodů, které mají stejnou vzdálenost od roviny α i od přímky p je kvadrika. O jakou kvadriku se jedná?

{Parabolická válcová plocha. }

27.33. V euklidovském prostoru jsou dány dva různé body F a G. Množina bodů X takových, že
a) $\overline{FX} + \overline{GX} = k > \overline{FG}$;
b) $|\overline{FX} - \overline{GX}| = k < \overline{FG}$
je kvadrika. O jakou kvadriku se jedná?

{a) Rotační prodloužený elipsoid;
b) rotační dvoudílný hyperboloid. }

27.34. V euklidovském prostoru jsou dány dvě různé rovnoběžné přímky p a q. Množina bodů X takových, že
a) $v(X,p) + v(X,q) = k > v(p,q)$;
b) $|v(X,p) - v(X,q)| = k < v(p,q)$
je kvadrika. O jakou kvadriku se jedná?

{a) Eliptická reálná válcová plocha;
b) hyperbolická válcová plocha. }

27.35. V euklidovském prostoru jsou dány dvě mimoběžné přímky p a q. Množina bodů X na příčkách mimoběžek rovnoběžných s rovinou α, která není rovnoběžná s p a q, je kvadrika. O jakou kvadriku se jedná?

{Hyperbolický paraboloid. }

27.36. V euklidovském prostoru jsou dány dvě
a) různoběžné;
b) mimoběžné
přímky, které nejsou kolmé. Rotací jedné přímky kolem druhé vznikne kvadrika. O jakou kvadriku se jedná?

{a) Reálná (rotační) kuželová plocha; b) jednodílný rotační hyperboloid. }

Seznam použité literatury

1. В. Т. Базылев, *Сборник задач по геометрии*, Москва 1980.
2. M. Berger, *Géométrie 1–5*, Paris 1977.
3. L. Bican, *Lineární algebra*, SNTL, Praha 1979.
4. B. Bydžovský, *Úvod do analytické geometrie*, Praha 1956.
5. О. Н. Цубербиллер, *Задачи и упражнения по аналитической геометрии*, Москва 1957.
6. P. Horák, J. Janyška, *Analytická geometrie*, skriptum MU, Brno 1997.
7. А. В. Клетеник, *Сборник задач по аналитической геометрии*, Москва 1986.
8. А. Г. Курош, *Курс высшей алгебры*, Москва 1959.
9. А. И. Мальцев, *Основы линейной алгебры*, Москва 1948.
10. С. Л. Певзнер, *Инварианты и канонические уравнения гиперповерхности второво порядка в n-мерном евклидовом пространстве,* Publications de l'Institut Mathématique, Nouvelle série, **55(69)**, Beograd 1994, 75–88.
11. И. В. Проскуряков, *Сборник задач по линейной алгебре*, Москва 1978.
12. M. Sekanina a kol., *Geometrie I*, Praha 1986.
13. M. Sekanina a kol., *Geometrie II*, Praha 1988.

Rejstřík

absolutní invariant kuželosečky, 84
afinní
    homogenní souřadnice, 22
    kanonická rovnice kvadriky, 133
    nehomogenní souřadnice, 22
    normálni rovnice kuželosečky, 68
    normálni rovnice kvadriky, 133
aritmetická báze projektivního prostoru, 14
aritmetický
    nosič, 13
    základ, 13
    zástupce bodu, 13
asymptota kuželosečky, 62
asymptotická rovina, 122

bod dotyku
    tečné roviny kvadriky, 118
    tečny kuželosečky, 51
    tečny kvadriky, 118
body v obecné poloze, 14

číselná excentricita kuželosečky, 98

délka
    hlavní poloosy, 80
    vedlejší poloosy, 80
délková
    excentricita elipsy, 94
    excentricita hyperboly, 95
délky poloos
    elipsy, 80
    kvadriky, 144
doplňková hyperbola, 81
doplňkový hyperboloid, 146
dvojdílný hyperboloid, 125
dvojice komplexně sdružených
    různoběžných rovin, 130
    rovnoběžných rovin, 130

elipsa, 64
elipsoid, 124
eliptický paraboloid, 125

formálně reálná
    kuželosečka, 47
    kvadrika, 107, 124

geometrická báze projektivního prostoru, 14

hlavní
    čísla kvadriky, 138
    čísla kuželosečky, 76
    rovina kvadriky, 139
    směr kuželosečky, 74
    směr kvadriky, 138
    vrchol elipsy, 80
    vrchol hyperboly, 81
hodnost
    bilineární formy, 27
    kvadratické formy, 31
    kvadriky, 107
hyperbola, 64
hyperbolická válcová plocha, 129
hyperbolický paraboloid, 127
hyperboloid, 124

charakteristická
    čísla kvadratické formy, 40
    rovnice kvadriky, 138
    rovnice kuželosečky, 76
    rovnice kvadratické formy, 40

rovnice matice, 39

i-tá lineární forma přidružená (asociovaná) k F, 31
imaginární
část vektoru, 2
elipsa, 64
elipsoid, 124
eliptická válcová plocha, 129
kružnice, 81
kuželosečka, 47
kuželová plocha, 114
kuželová plocha, 129
kulová plocha, 144
kvadrika, 107
regulární kuželosečka, 57
invarianty
kuželosečky, 84
kvadriky, 147

jednodílný hyperboloid, 126

komplexní rozšíření
kvadratické formy, 35
reálé bilineární formy, 28
reálného afinního podprostoru, 7
reálného afinního prostoru, 7
reálného afinního zobrazení, 8
reálného lineárního zobrazení, 5
reálného projektivního prostoru, 106
reálného vektorového prostoru, 1
komplexně sdružený
vektor, 3
vektorový podprostor, 3
kuželosečka, 46
singulární, 48
degenerovaná, 48
regulární, 48
složená, 48
zvrhlá, 48
kuželosecka
eliptického typu, 64
hyperbolického typu, 64
parabolického typu, 64
kvadrika, 106
eliptického typu, 124
hyperbolického typu, 124
parabolického typu, 124

lineárně nezávislé body, 14

matice bilineární formy, 26
mimoběžné projektivní podprostory, 16

nepřímkový
hyperboloid, 124
paraboloid, 124
nestředová
kuželosečka, 61
kvadrika, 122
nevlastní bod, 21
normální
rovnice kuželosečky, 56
tvar kvadratické formy, 34
normovaná
polární báze, 34
polární báze kuželosečky, 56
normovaný
polární afinní repér, 68
polární afinní repér kvadriky, 133
nulová
bilineární forma, 25
kružnice, 81
kulová plocha, 145

obecné vyjádření podprostorů, 17
ohniska
elipsy, 94
hyperboly, 95
kuželosečky, 98
ohnisko paraboly, 96
ohnisková rovnice kuželosečky, 98
osa
kuželosečky, 76
kvadriky, 139
osová rovina kvadriky, 139

pól
přímky, 50

roviny, 109, 114
přímková regulární kvadrika, 116
parabola, 64
parabolická válcová plocha, 130
paraboloid, 124
parametr
kuželosečky, 98
paraboly, 81, 96
parametrické vyjádření podprostorů, 16
polára bodu, 50
polární
afinní repér kvadriky, 133
normovaná báze kvadriky, 116
rovina, 109, 114
trojúhelník kuželosečky, 57
polárně konjugované body vzhledem ke kvadrice, 108
polárně sdružené
body vzhledem ke kvadrice, 108
body vzhledem ke kuželosečce, 49
přímky vzhledem ke kvadrice, 110
směry, 122
průměr kuželosečky, 61
průměrová rovina kvadriky, 122
průnik projektivních podprostorů, 16
princip duality, 50
projektivní
homogenní souřadnice, 15
prostor, 13
repér, 14
projektivní rozšíření reálného afinního prostoru, 21
protáhlý elipsoid, 145

různoběžné projektivní podprostory, 16
reálná
část vektoru, 2
afinní souřadná soustava, 7
báze, 3
eliptická válcová plocha, 129
kružnice, 81
kuželová plocha, 114
kuželová plocha, 129
kulová plocha, 145
regulární kuželosečka, 57
válcová plocha, 129
reálný
elipsoid, 124
afinní podprostor, 8
podprostor, 3
zástupce imaginárního vrcholu hyperboly, 81
regulární
bilineární forma, 27
bod kuželosečky, 49
bod kvadriky, 108
kvadratická forma, 31
kvadrika, 107
rotační kvadriky, 139
rovnoosá hyperbola, 81

řídící kuželosečka kuželové plochy, 114
řídící přímka
kuželosečky, 98
paraboly, 96

sdružené
průměry kuželosečky, 62
sedlo, 128
signatura kvadratické formy, 34
singulární bilineární forma, 26
singulární
bod kuželosečky, 49
bod kvadriky, 108
kvadratická forma, 31
kvadrika, 107
vektor bilineární formy, 27
vektor kvadratické formy, 31
součet projektivních podprostorů, 16
spojení projektivních podprostorů, 16
střed
kuželosečky, 60
kvadriky, 121
středová
kuželosečka, 61
kvadrika, 122
středová rovnice kuželosečky, 98

stupeň invariantu
kuželosečky, 84
kvadriky, 147

tečná
rovina kvadriky, 118
tečna
kuželosečky, 51
kvadriky, 118
tvořící
přímka kuželosečky, 56
podprostor kvadriky, 114

výstřednost
elipsy, 94
hyperboly, 95
kuželosečky, 98
vedlejší
vrchol elipsy, 80
vrchol hyperboly, 81
vlastní
charakteristická číslo matice, 39
charakteristická hodnota matice, 39
směr matice, 39
vektor matice, 39
vlastní bod, 21
vrchol
kuželosečky, 76
kuželové plochy, 114
kvadriky, 139
vrcholová rovnice kuželosečky, 98

zobecněné
kružnice, 76
kulové plochy, 139, 144
zploštělý elipsiod, 145

Ukázka využití hyperbolického paraboloidu jako skořepiny střech.

Benzínová pumpa v Markham Moor, Velká Británie

Autobusová zastávka, Varšava, Polsko

Ukázka využití rotačního jednodílného hyperboloidu.

Chladící věže jaderné elektrárny Temelín

Vodojem na okraji Ciechanowa, Polsko