Masarykova univerzita

Zuzana Došlá, Jaromír Kuben

Diferenciální počet funkcí jedné proměnné

První vydání

Brno 2004

Došlá Zuzana, Kuben Jaromír
Diferenciální počet funkcí jedné proměnné

ISBN 80-210-3121-2

Pro matematika je reálný život jenom speciální případ.

Předmluva

Diferenciální počet funkcí jedné proměnné je první partií matematické analýzy, s kterou se setkávají studenti bakalářské matematiky na univerzitách. Proto je tento učební text koncipován tak, aby byl srozumitelný pro široký okruh studentů přicházejících ze středních škol.

Spolu se srozumitelností jsme se snažili zachovat rigoróznost celého výkladu a výstavbu matematiky ve formě definic, matematických vět a jejich důkazů, čímž se student postupně učí logické výstavbě a aparátu matematického textu. Pro lepší pochopení je zařazena velká řada obrázků, řešených příkladů i cvičení k samostatnému studiu.

Tato skripta jsou určena pro posluchače bakalářského studia učitelské a odborné matematiky, fyziky, matematické ekonomie a informatiky. Svým rozsahem pokrývají látku přednášenou v úvodním kurzu matematické analýzy. Obsahují také partie přesahující tento kurz. Ty jsou v textu odlišeny menším typem písma a část z nich je soustředěna do Dodatku. Jde o náročnější důkazy některých tvrzení a o rozšíření textu o některé klasické věty matematické analýzy, které se v základním kurzu neprobírají. Důvodem k jejich zařazení byla přímá souvislost s probíranou látkou v základním kurzu a také snaha usnadnit přechod ke studiu takových oborů jako teorie metrických prostorů a topologie, které řadu z těchto výsledků zobecňují. Tato část může sloužit ke studiu matematické analýzy ve vyšších ročnících.

Podrobný výklad diferenciálního počtu lze nalézt např. v [13, 17, 21], obtížnější příklady na limitu, spojitost a derivaci funkce např. v [20].

Chtěli bychom poděkovat recenzentu doc. RNDr. Jaromíru Šimšovi, CSc. za pečlivé přečtení textu a za cenné připomínky, které přispěly k jeho zkvalitnění. Dále bychom chtěli poděkovat prof. RNDr. Vítězslavu Novákovi, DrSc., který nám rovněž poskytl řadu připomínek. Děkujeme také Šárce Došlé za pomoc při přípravě skript a Zdeničce Homolové za podklady k Historické poznámce.

Text byl připraven sázecím systémem TEX ve formátu LATEX 2_ε, obrázky byly vytvořeny programem METAPOST s použitím balíku TEXovských maker `mfpic`. Skriptum rovněž existuje v hypertextové podobě ve formátu PDF.

Brno, červen 2003 Autoři

Obsah

Kapitola 1

Pojem funkce

Obsahem této kapitoly je zavedení pojmu funkce a popis některých nejdůležitějších vlastností funkcí. Správné pochopení tohoto pojmu je důležité pro celý diferenciální počet funkcí jedné proměnné a rovněž pro navazující partie jako integrální počet, obyčejné diferenciální rovnice a pod.

1.1. Základní množinové pojmy

Abychom mohli v následujícím oddílu zavést množinu reálných čísel, připomeneme si některé důležité pojmy z teorie množin.

Definice 1.1. *Kartézským součinem* dvou množin A a B rozumíme množinu všech *uspořádaných dvojic* (x, y), kde $x \in A$ a $y \in B$ jsou libovolné prvky. Značíme $A \times B$. Tedy

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\}.$$

Binární relací rozumíme libovolnou podmnožinu kartézského součinu $A \times B$. V případě, že $A = B$, se používá název *binární relace na množině* A. K označení relací používáme obvykle malá písmena. Např.: $f \subseteq A \times B$.

Pro nás nejdůležitější případ binární relace je zaveden v následující definici.

Definice 1.2. Relaci $f \subseteq A \times B$ nazveme *zobrazením* množiny A *do* množiny B, jestliže platí, že ke každému prvku $x \in A$ existuje právě jeden prvek $y \in B$ takový, že $(x, y) \in f$.
Množinu A nazýváme *definiční obor* f a značíme $D(f)$. Množinu všech prvků $y \in B$ takových, že existuje $x \in A$ s vlastností $(x, y) \in f$, nazýváme *obor hodnot* f a značíme $H(f)$.

Je-li relace $f \subseteq A \times B$ zobrazení, pak skutečnost, že $(x, y) \in f$, zapisujeme ve tvaru $y = f(x)$. Rovněž používáme zápis $f\colon A \to B$, což znamená, že f je zobrazení A do B. Dále x nazýváme *nezávisle proměnnou* a y *závisle proměnnou*.

Poznámka 1.3. Někdy se zobrazení definuje ještě trochu obecněji. V definici 1.2 se tehdy požaduje, aby ke každému prvku $x \in A$ existoval *nejvýše jeden* prvek $y \in B$ takový, že $(x, y) \in f$. Některé $x \in A$ tedy nemusí být první složkou žádné dvojice patřící f. Taková relace se potom nazývá *zobrazení z A do B*. Definiční obor $D(f)$ se pak definuje jako množina všech $x \in A$, k nimž existuje $y \in B$ takové, že $(x, y) \in f$. Je tedy $D(f) \subseteq A$, ale může se stát, že $D(f) \neq A$. V těchto skriptech nebudeme toto zobecnění používat a budeme vždy předpokládat, že $D(f) = A$.

Zobrazení mohou mít různé významné vlastnosti. Rozlišujeme tyto speciální typy zobrazení $f \subseteq A \times B$:

- *injekce* (prosté zobrazení) je takové zobrazení, pro které platí:

  $$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

  Tedy různým hodnotám nezávislé proměnné odpovídají různé hodnoty závisle proměnné.
- *surjekce* (zobrazení A na B) je takové zobrazení, pro které platí, že $H(f) = B$, tj.

  $$\forall y \in B\ \exists x \in A : y = f(x).$$

- *bijekce* (vzájemně jednoznačné zobrazení) je zobrazení, které je zároveň injektivní i surjektivní.

Důležitou vlastností při zavádění reálných čísel bude jejich uspořádání.

Definice 1.4. Buď A množina. Řekneme, že binární relace $\leq$ na A je *uspořádáním*, jestliže je

1. reflexivní: $\forall x \in A$ platí: $x \leq x$,
2. antisymetrická: $\forall x, y \in A$ platí: $x \leq y$ a $y \leq x \Rightarrow x = y$,
3. tranzitivní: $\forall x, y, z \in A$ platí: $x \leq y$ a $y \leq z \Rightarrow x \leq z$.

Řekneme, že relace $\leq$ je *úplné uspořádání*, jestliže je uspořádáním a navíc platí, že $\forall x, y \in A$ je $x \leq y$ nebo $y \leq x$.
Je-li $\leq$ uspořádání na A, pak dvojici $(A, \leq)$ nazveme *uspořádanou množinou* .
Je-li $\leq$ úplné uspořádání na A, pak dvojici $(A, \leq)$ nazveme *úplně (lineárně) uspořádanou množinou (*neboli *řetězcem)*.

Zápis $x \geq y$ považujeme za jinou formu zápisu vztahu $y \leq x$. Je-li $x \leq y$, ale $x \neq y$, píšeme $x < y$. Obdobně zavádíme $x > y$. V úplně uspořádané množině A platí tzv. *zákon trichotomie*: Pro libovolná $x, y \in A$ nastane právě jedna z možností $x = y$, $x < y$, $x > y$. Pro $B, C \subseteq A$ píšeme $B < C$, jestliže $b < c$ pro libovolná $b \in B$ a $c \in C$.

Definice 1.5. Buď A uspořádaná množina, $B \subseteq A$ libovolná. Řekneme, že prvek $U \in A$ je *horní závora* množiny B, jestliže

$$x \leq U \text{ pro každé } x \in B,$$

a řekneme, že $L \in A$ je *dolní závora* množiny B, jestliže

$$L \leq x \text{ pro každé } x \in B.$$

Množina B je *shora (zdola) ohraničená*, jestliže má alespoň jednu horní (dolní) závoru, a je *ohraničená*, jestliže je ohraničená shora i zdola.

Definice 1.6. Buď $A \neq \emptyset$ uspořádaná množina, $B \subseteq A$, $B \neq \emptyset$, libovolná. Řekneme, že prvek $a \in A$ je *supremum* množiny B, a píšeme $a = \sup B$, jestliže

1. $x \leq a$ pro každé $x \in B$,
2. je-li $y \in A$ takové, že $x \leq y$ pro každé $x \in B$, pak je $a \leq y$.

Číslo a je tedy nejmenší horní závora množiny B.
Infimum množiny se definuje analogicky jako největší dolní závora a značí se $\inf B$.

Poznámka 1.7. Pokud existuje supremum resp. infimum dané množiny, pak je určeno jednoznačně. To plyne přímo z definice a antisymetrie uspořádání.

1.2. Reálná čísla

S reálnými čísly se studenti intuitivně setkávají již od základní školy. Vědí, že se zobrazují jako body na číselné ose a že každému jejímu bodu odpovídá právě jedno reálné číslo. S takto nepřesně zavedeným objektem však nelze budovat základy analýzy.

Jsou dvě cesty: Buď množinu reálných čísel přesně zkonstruovat, to je však dost obtížné a zdlouhavé (nejprve se musí vybudovat přirozená čísla, pak celá čísla, potom racionální čísla a z nich reálná čísla), nebo ji zavést axiomaticky, což je způsob, který použijeme.

Definice 1.8. *Reálná čísla* jsou struktura $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ tvořená množinou $\mathbb{R}$ se dvěma binárními operacemi $+$ (sčítání) a $\cdot$ (násobení) a jednou binární relací $\leq$ (uspořádání), přičemž platí tyto axiomy (R1)–(R13):

(I) (R1) $x+(y+z) = (x+y)+z$ pro každé $x, y, z \in \mathbb{R}$ (asociativní zákon),

(R2) $x + y = y + x$ pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ (komutativní zákon),

(R3) $\exists$ prvek $0 \in \mathbb{R}$ takový, že $x + 0 = x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ (nulový prvek),

(R4) $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exists$ prvek $-x \in \mathbb{R}$ takový, že $x + (-x) = 0$ (opačný prvek k x).

Tedy $(\mathbb{R}, +)$ je abelovská grupa.

(II) (R5) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ pro každé $x, y, z \in \mathbb{R}$ (asociativní zákon),

(R6) $x \cdot y = y \cdot x$ pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ (komutativní zákon),

(R7) $\exists$ prvek $1 \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ takový, že $1 \cdot x = x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ (jednotkový prvek).

(R8) $\forall x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ $\exists$ prvek $x^{-1} \in \mathbb{R}$ takový, že $x \cdot x^{-1} = 1$ (inverzní prvek k x).

Tedy $(\mathbb{R} \smallsetminus \{0\}, \cdot)$ je abelovská grupa.

(III) Operace $+$ je distributivní vzhledem k operaci $\cdot$, tj.

(R9) $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$ pro každé $x, y, z \in \mathbb{R}$ (distributivní zákon).

(I), (II) a (III) znamená, že $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ je pole.

(IV) $(\mathbb{R}, \leq)$ je úplně uspořádaná množina, tj.

(R10) $\leq$ je reflexivní, antisymetrická, transitivní a úplná relace.

(V) Operace $+, \cdot$ jsou slučitelné s uspořádáním $\leq$, tj.

(R11) $x \leq y$ implikuje $x + z \leq y + z$ pro každé $x, y, z \in \mathbb{R}$,

(R12) pro každé $x \geq 0$, $y \geq 0$ platí $0 \leq x \cdot y$.

(I) až (V) znamená, že $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ je uspořádané pole.

(VI) (R13) Každá neprázdná shora ohraničená podmnožina množiny $\mathbb{R}$ má supremum.

Soustava axiomů, které má splňovat množina reálných čísel, je složitá a na první pohled není patrné, zda je bezesporná, tedy zda taková struktura existuje. Lze ukázat, že (pokud je bezesporná teorie množin — viz např. [1]) je možné takovou strukturu zkonstruovat — viz např. [9, 13].

Není ani jasné, zda nemůže existovat více takových struktur. V algebře se dokazuje, že všechny takové struktury jsou v podstatě stejné (izomorfní). Přesněji, pokud dvě struktury s nosnými množinami $\mathbb{R}_1$ a $\mathbb{R}_2$ splňují axiomy definice 1.8, existuje bijekce $\mathbb{R}_1$ na $\mathbb{R}_2$, která zachovává operace sčítání, násobení a uspořádání — viz např. [4, str. 105], [15, str. 199], [16, str. 252] nebo [19, str. 37].

Poznámka 1.9.

i) Tak jak je zvykem, místo $x \cdot y$ píšeme xy. Odčítání definujeme jako přičtení opačného prvku, tj. $x - y = x + (-y)$. Konečně dělení definujeme jako vynásobení převráceným prvkem, tj. $x/y = xy^{-1}$, $y \neq 0$. Z axiomů lze odvodit jednoznačnost nuly a jedničky a opačných a převrácených prvků a rovněž známá pravidla pro práci s nerovnostmi, jako např. že násobení záporným číslem obrací nerovnost, že $1 > 0$, že převrácený prvek ke kladnému je také kladný a pod. Vesměs jde o zcela jednoduché důkazy — viz [17, str. 30].

ii) Reálná čísla jsou tvořena tzv. nosnou množinou $\mathbb{R}$, která má jistou strukturu (je na ní definováno sečítání, násobení, uspořádání atd. a platí jisté axiomy). V dalším budeme (nepřesně, ale stručněji) celou tuto strukturu označovat symbolem $\mathbb{R}$.

iii) Snadno se ověří, že axiom (R13) je ekvivalentní s axiomem

(13)' Každá neprázdná zdola ohraničená podmnožina množiny $\mathbb{R}$ má infimum.

Další ekvivalentní tvrzení lze nalézt v dodatku ve větě D.14.

iv) Ukážeme, jakým způsobem jsou v $\mathbb{R}$ obsaženy další známé číselné obory. Množina $A \subseteq \mathbb{R}$ se nazývá *induktivní*, jestliže má následující dvě vlastnosti:

a) $1 \in A$, tj. A obsahuje jedničku,
b) s každým $x \in A$ také $x + 1 \in A$.

Např. množina $\mathbb{R}$ je induktivní. Snadno je vidět, že průnik systému induktivních množin je také induktivní. Průnik všech induktivních podmnožin $\mathbb{R}$, tj. její nejmenší induktivní podmnožinu, nazýváme *množinou přirozených čísel* a značíme $\mathbb{N}$. Tedy $\mathbb{N} = \{1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, \dots\}$. Pro každou induktivní množinu $A \subseteq \mathbb{R}$ tudíž platí $A \supseteq \mathbb{N}$. Pokud víme, že také platí $A \subseteq \mathbb{N}$, je nutně $A = \mathbb{N}$. Na tomto faktu je založen princip úplné matematické indukce.

Protože podle axiomu (R3) existuje v $\mathbb{R}$ prvek nula a podle (R4) existuje ke každému prvku $x \in \mathbb{R}$ prvek $-x$, můžeme definovat *množinu celých čísel* vztahem $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{x \in \mathbb{R} : -x \in \mathbb{N}\} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.

Konečně *množinu racionálních čísel* definujeme jako všechny možné podíly celých čísel, tj. $\mathbb{Q} = \{p/q : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$.

Každé reálné číslo, které není racionální, se nazývá *iracionální*. Množinu všech iracionálních čísel značíme $\mathbb{I}$, tedy $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Později, až ukážeme existenci odmocnin (viz lemma 1.14), uvidíme, že $\mathbb{I}$ je neprázdná. Z tohoto výsledku vyplyne, že množina $\mathbb{Q}$ nesplňuje axiom (R13).

vii) Pro úplnost ještě připomeňme strukturu $\mathbb{C}$ *množiny komplexních čísel*. Ta je definována jako množina všech dvojic reálných čísel, tj. $\mathbb{C} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$, na níž je zavedeno sečítání a násobení obvyklým způsobem, tedy $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ a $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$. Místo složkového zápisu (a, b) používáme častěji algebraický tvar $a + \mathrm{i}b$, kde $\mathrm{i} = (0, 1)$. Platí $\mathrm{i}^2 = -1$.

Příklad 1.10. Dokažte úplnou indukcí následující vlastnosti přirozených čísel:

(A) $\min \mathbb{N} = 1$.

(B) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ prvek $n+1$ pokrývá n v $\mathbb{N}$, tedy neexistuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že $n < m < n+1$.

(C) Každá neprázdná množina přirozených čísel má nejmenší prvek (říkáme, že $\mathbb{N}$ je *dobře uspořádaná*).

Řešení. ad (A)
Označme $M = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\}$. Protože M je induktivní a $M \subseteq \mathbb{N}$, je $M = \mathbb{N}$. Tedy $\min \mathbb{N} = \min M = 1$.

ad (B)
Protože $1 > 0$, platí $\mathbb{N} = \mathbb{Z} \cap \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Stačí ukázat, že pro libovolná $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n+1$, je nutně $m \leq n$. To totiž znamená, že mezi n a $n+1$ neleží žádné další přirozené číslo.

Jelikož $(\mathbb{Z}, +)$ je grupa, je $(n+1) - m \in \mathbb{Z}$ a $(n+1) - m > 0$, což znamená, že $(n+1) - m \in \mathbb{N}$. Podle (A) je proto $(n+1) - m \geq 1$ a odtud $m \leq n$.

ad (C)
Připusťme, že existuje množina $M \subseteq \mathbb{N}$, $M \neq \emptyset$, která nemá nejmenší prvek. Označme nyní $T = \{x \in \mathbb{N} : x < M\} \subseteq \mathbb{N}$. Podle (A) je nutně $1 \in T$. Dále kdyby $n \in T$, nemohlo by platit $n+1 \in M$ — vzhledem k (B) by totiž $n+1$ byl nejmenší prvek M. Tedy $n+1 \in T$. Zjistili jsme, že T je induktivní, takže $T = \mathbb{N}$, a proto $M = \emptyset$, což je spor. ▲

O množinách $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{I}$ dokážeme tři tvrzení, která popisují jejich významné vlastnosti.

Lemma 1.11. *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $na > b$.*

Důkaz. Nejprve dokážeme, že $\mathbb{N}$ není v $\mathbb{R}$ shora ohraničená. Připusťme, že platí opak. Podle axiomu (R13) pak existuje $\sup \mathbb{N} = c \in \mathbb{R}$. Protože $c - 1 < c$ a $\mathbb{N}$ je lineárně uspořádaná, musí podle definice suprema existovat $n \in \mathbb{N}$ takové, že $n > c - 1$. Pak ale $n + 1 \in \mathbb{N}$, $n + 1 > c$, což je spor s tím, že c je (nejmenší) horní závora $\mathbb{N}$.

Nyní dokážeme tvrzení lemmatu. Kdyby neexistovalo $n \in \mathbb{N}$ s vlastností $na > b$, platilo by pro všechna $n \in \mathbb{N}$, že $na \leq b$, tj. $n \leq b/a$ a $\mathbb{N}$ by byla shora ohraničená, což vede ke sporu. □

Uspořádané pole mající vlastnost popsanou v předchozím lemmatu, se nazývá *archimedovské*. Množina $\mathbb{R}$ je tedy archimedovské pole.

Lemma 1.12. *Nechť $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Pak existuje $z \in \mathbb{Q}$ takové, že $x < z < y$.*

Důkaz. Pro $x < 0 < y$ lze volit $z = 0$. Předpokládejme tedy, že $x \geq 0$. Pak $y - x > 0$ a podle lemmatu 1.11 existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $n(y - x) > 1$, tj. $ny > nx + 1$. Zvolme takové n pevně. Protože $\mathbb{N}$ není shora ohraničená, existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že $m > nx$. Podle příkladu 1.10 (C) je $\mathbb{N}$ dobře uspořádaná, takže lze předpokládat, že m je nejmenší přirozené číslo mající tuto vlastnost. Pak je ovšem $m - 1 \leq nx$, takže $m \leq 1 + nx < ny$. Celkově $nx < m < ny$, a tudíž $x < \frac{m}{n} < y$. Je-li $y \leq 0$, je $0 \leq -y < -x$ a podle předchozí části důkazu existuje $z \in \mathbb{Q}$ takové, že $-y < z < -x$. Pak je ovšem $-z \in \mathbb{Q}$ a $x < -z < y$. □

Předchozí lemma vyjadřuje důležitou vlastnost množiny všech racionálních čísel, kterou slovně vyjadřujeme takto: Množina $\mathbb{Q}$ je *hustá* v $\mathbb{R}$. Stejnou vlastnost má i množina $\mathbb{I}$.

Lemma 1.13. *Množina $\mathbb{I}$ je hustá v $\mathbb{R}$.*

Důkaz. K důkazu potřebujeme ukázat, že $\mathbb{I} \neq \emptyset$, což provedeme až za lemmatem 1.14. Je-li $a \in \mathbb{I}$, sporem se snadno ověří, že pro $x \in \mathbb{Q}$ je $x + a \in \mathbb{I}$ (množina racionálních čísel je totiž pole). Nechť nyní $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Zvolme $a \in \mathbb{I}$. Pak je $x - a < y - a$ a podle lemmatu 1.12 existuje $z \in \mathbb{Q}$ takové, že $x - a < z < y - a$. Tedy $x < z + a < y$ a $z + a \in \mathbb{I}$. $\square$

Stručně shrnuto, předchozí dvě lemmata říkají, že mezi libovolnými dvěma různými reálnými čísly leží jak nějaké racionální, tak nějaké iracionální číslo. Opakovaným užitím pak dostáváme, že mezi dvěma různými reálnými čísly leží jak nekonečně mnoho různých racionálních, tak i nekonečně mnoho různých iracionálních čísel.

Na střední škole se odvozuje řada pravidel pro počítání s odmocninami. V rámci středoškolské matematiky však nelze *dokázat* existenci libovolné odmocniny. To je obsahem následujícího lemmatu.

Lemma 1.14. *Ke každému kladnému $a \in \mathbb{R}$ a ke každému $n \in \mathbb{N}$ existuje právě jedno kladné číslo $x \in \mathbb{R}$ takové, že $x^n = a$.*

Důkaz. Naznačíme jen princip. Označme $M = \{z \in \mathbb{R} : z > 0,\ z^n \leq a\}$. Pak lze ukázat, že M je neprázdná a shora ohraničená a dále, že pro $x = \sup M$ platí $x^n = a$ a že je to jediné číslo s touto vlastností — detaily viz [17, str. 41]. Jiný důkaz viz dodatek, příklad D.42. $\square$

Číslo x z předchozího lemmatu nazýváme n-tou odmocninou z čísla a a značíme $\sqrt[n]{a}$. Již na střední škole se dokazuje, že $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, takže množina iracionálních čísel je neprázdná.

Dále pro $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ a kladné $a \in \mathbb{R}$ definujeme $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$. Z pravidel pro počítání s odmocninami lze ověřit, že tato definice je korektní, tj. je-li $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, určují $a^{m/n}$ a $a^{p/q}$ totéž číslo. Tím je definován symbol a^c pro libovolné kladné $a \in \mathbb{R}$ a libovolné $c \in \mathbb{Q}$.

Nerovnost z následujícího příkladu je velmi užitečná v řadě úvah.

Příklad 1.15. Dokažte, že pro libovolné $x \in \mathbb{R}$, $x > -1$ a $n \in \mathbb{N}$ platí $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ (tzv. *Bernoulliova nerovnost*). Pro $x \neq 0$ a $n > 1$ platí dokonce ostrá nerovnost.

Řešení. Důkaz provedeme úplnou indukcí. Označme $M \subseteq \mathbb{N}$ množinu těch přirozených čísel, pro něž nerovnost platí. Zřejmě $1 \in M$, protože nerovnost $1 + x \geq 1 + x$ samozřejmě platí.

Nechť nějaké $n \in M$, tj. $(1 + x)^n \geq 1 + nx$. Protože platí $x + 1 > 0$, máme $(1 + x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1+nx+x+nx^2 = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$, tedy $n + 1 \in M$. Množina M je tudíž induktivní, takže $M = \mathbb{N}$. Zřejmě pro $x \neq 0$ je $nx^2 > 0$, a tedy pro $n > 1$ platí ostrá nerovnost. ▲

Pro řadu úvah s reálnými čísly (zejména při výpočtech některých druhů limit) je výhodné přidat k množině reálných čísel dva symboly, které intuitivně leží před či za všemi reálnými čísly (tzv. mínus nekonečno resp. plus nekonečno).

Definice 1.16. Množinu $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ (kde $-\infty$ a $+\infty$ jsou symboly nepatřící do množiny $\mathbb{R}$), která je úplně uspořádaná tak, že pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ platí $-\infty < x < +\infty$, nazýváme *rozšířenou množinou reálných čísel*.

Pokud nemůže dojít k nedorozumění, znaménko $+$ vynecháváme a píšeme pouze ∞. Prvky $+\infty$ a $-\infty$ se také někdy nazývají *nevlastní body* rozšířené číselné osy. O číslech $x \in \mathbb{R}$ pak říkáme, že jsou to vlastní body.

Poznámka 1.17. Symbol $+\infty$ resp. $-\infty$ si můžeme představovat jako „obrovské“ kladné resp. záporné číslo (větší resp. menší než libovolné konkrétní reálné číslo $x \in \mathbb{R}$). Na základě této intuitivní představy je užitečné rozšířit *některé* operace s reálnými čísly i na množinu $\mathbb{R}^*$, což se ukáže v dalším výhodné při počítání s limitami. Konkrétně při označení $c \in \mathbb{R}$, $0 < k < +\infty$, $-\infty < z < 0$ zavádíme následující operace:

1. $c + (\pm\infty) = (\pm\infty) + c = \pm\infty$,
   $+\infty + (+\infty) = +\infty$, $\qquad -\infty + (-\infty) = -\infty$.
   Nedefinujeme: $\infty + (-\infty)$, $-\infty + (+\infty)$.
2. $k \cdot (+\infty) = +\infty$, $\qquad z \cdot (+\infty) = -\infty$,
   $k \cdot (-\infty) = -\infty$, $\qquad z \cdot (-\infty) = +\infty$,
   $+\infty \cdot (+\infty) = +\infty$, $\qquad -\infty \cdot (-\infty) = +\infty$,
   $+\infty \cdot (-\infty) = -\infty$.
   Nedefinujeme: $0 \cdot (\pm\infty)$.
3. Pro $a, b \in \mathbb{R}^*$ definujeme $a - b = a + (-1) \cdot b$, s následujícími výjimkami.
   Nedefinujeme: $+\infty - (+\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$.
4. $\dfrac{c}{\pm\infty} = 0$.
   Nedefinujeme: $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}, \dfrac{0}{0}, \dfrac{k}{0}, \dfrac{z}{0}, \dfrac{+\infty}{0}, \dfrac{-\infty}{0}$.

Dále připomeneme definice různých typů intervalů.

Definice 1.18. Jsou-li

1. $a, b \in \mathbb{R}^*$ takové, že $a < b$, položíme $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \colon a < x < b\}$ (tzv. *otevřený interval*);
2. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, položíme $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \le x \le b\}$ (tzv. *uzavřený interval*);
3. $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, položíme $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \le x < b\}$;
4. $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, položíme $(a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \le b\}$.

U variant 3 a 4, pokud jsou oba koncové body a, b z $\mathbb{R}$, se používá název *polootevřený* nebo *polouzavřený* interval; pokud je z $\mathbb{R}$ jen jeden koncový bod, tj. jde o interval $[a, +\infty)$ nebo $(-\infty, b]$, jedná se o uzavřený interval. Dále je $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$. Tento interval je otevřený i uzavřený.

Intervaly, jejichž oba koncové body jsou z $\mathbb{R}$, se nazývají *ohraničené,* v opačném případě jde o *neohraničené* intervaly.

V matematické analýze hrají důležitou roli číselné množiny zvané okolí bodu. V následující definici zavedeme tento pojem pro body na rozšířené číselné ose $\mathbb{R}^*$.

Definice 1.19. Nechť $x_0, \delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$. Pak interval $\mathscr{O}(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ nazveme *okolím* bodu x_0, interval $[x_0, x_0 + \delta)$ *pravým okolím* bodu x_0 a interval $(x_0 - \delta, x_0]$ *levým okolím* bodu x_0. Množina $\mathscr{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ se nazývá *ryzí* nebo *prstencové okolí* bodu x_0.
Buď $a \in \mathbb{R}$. Pak interval $\mathscr{O}(+\infty) = (a, +\infty)$ nazveme okolím bodu $+\infty$ a interval $\mathscr{O}(-\infty) = (-\infty, a)$ okolím bodu $-\infty$.

Příklady různých okolí i s tím, jak je znázorňujeme, jsou na obr. 1.1 a).

Pokud je důležitá konkrétní velikost okolí ve vlastním bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, píšeme místo $\mathscr{O}(x_0)$ podrobněji $\mathscr{O}_\delta(x_0)$. Chceme-li ve slovním vyjádření zdůraznit velikost tohoto okolí, mluvíme o δ-okolí bodu x_0.

U okolí nevlastních bodů jsme velikost zatím nezavedli, což je někdy nevýhodné. Je možné to odstranit následovně. Protože okolí vlastního bodu se se zmenšujícím δ zmenšuje, chtěli bychom, aby to u okolí nevlastních bodů bylo obdobné. Proto klademe $\mathscr{O}_\delta(+\infty) = (1/\delta, +\infty)$ resp. $\mathscr{O}_\delta(-\infty) = (-\infty, -1/\delta)$ a tyto množiny nazýváme δ-okolí bodu $+\infty$ resp. $-\infty$.

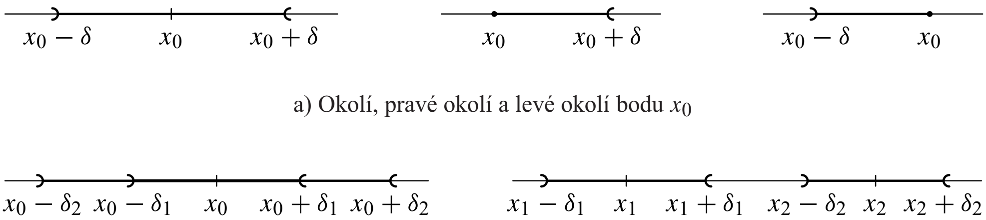
Důvodem zavedení ryzího okolí vlastního bodu je, že v některých úvahách je výhodné vyloučit střed okolí. Konečně si všimněte, že $\mathscr{O}(a)$, kde $a \in \mathbb{R}^*$, je *vždy* otevřený interval.

Pro řadu důkazů je důležité, že okolí mají dvě vlastnosti popsané v následující poznámce. Jejich znázornění (pro okolí bodů z R) je jasné — viz obr. 1.1 b).

Poznámka 1.20 (Charakteristické vlastnosti okolí). Platí:

i) Jsou-li $\mathscr{O}_{\delta_1}(x_0)$, $\mathscr{O}_{\delta_2}(x_0)$ okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$, pak rovněž $\mathscr{O}_{\delta_1}(x_0) \cap \mathscr{O}_{\delta_2}(x_0)$ je okolí bodu x_0.
ii) Jsou-li $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^*$ různé, tj. $x_1 \neq x_2$, pak existují okolí $\mathscr{O}_{\delta_1}(x_1)$, $\mathscr{O}_{\delta_2}(x_2)$ taková, že $\mathscr{O}_{\delta_1}(x_1) \cap \mathscr{O}_{\delta_2}(x_2) = \emptyset$.

U první vlastnosti je totiž $\mathscr{O}_{\delta_1}(x_0) \cap \mathscr{O}_{\delta_2}(x_0) = \mathscr{O}_\delta(x_0)$, kde $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. U druhé vlastnosti je v případě vlastních bodů $|x_1 - x_2| > 0$ a stačí vybrat libovolná kladná δ_1, δ_2 tak, aby $\delta_1 + \delta_2 < |x_1 - x_2|$. Je-li některý bod nevlastní, postupuje se obdobně.



a) Okolí, pravé okolí a levé okolí bodu x_0

b) Vlastnosti okolí

Obr. 1.1: Okolí bodů

1.3. Pojem funkce

Definice 1.21. Buď $M \subseteq \mathbb{R}$. Zobrazení $f : M \to \mathbb{R}$ nazýváme *reálnou funkcí reálné proměnné* nebo stručně *funkcí* jedné proměnné.
Množina M se nazývá *definiční obor* funkce f a značí se $D(f)$, množina $H(f) :=$ $:= \{f(x) : x \in M\}$ se nazývá *obor hodnot* funkce f.

Příkladem reálné funkce reálné proměnné je $f(x) = x^2$. Podobně zobrazení $f : M \to N$, kde

- $M \subseteq \mathbb{R}$, $N = \mathbb{C}$ nazýváme *komplexní funkcí reálné proměnné* (např. $f(\varphi) =$ $= \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$);
- $M \subseteq \mathbb{C}$, $N = \mathbb{R}$ nazýváme *reálnou funkcí komplexní proměnné* (např. $f(z) = |z|$);
- $M \subseteq \mathbb{C}$, $N = \mathbb{C}$ nazýváme *komplexní funkcí komplexní proměnné* (např. $f(z) = z$).

V tomto skriptu budeme nadále pracovat s reálnými funkcemi reálné proměnné (nebude-li řečeno jinak). Pro tento případ je velmi důležité grafické znázornění.

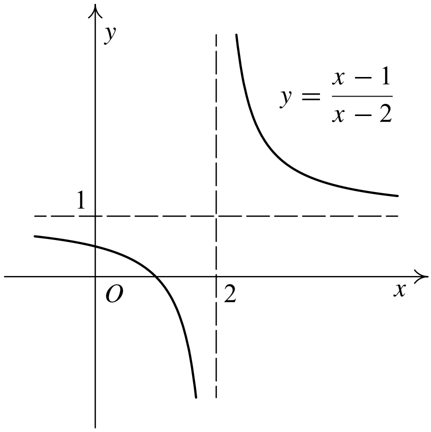
Definice 1.22. *Grafem* reálné funkce reálné proměnné $f : D(f) \to \mathbb{R}$ je množina bodů $G = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in D(f)\}$, kde (x, y) značí bod roviny s pravoúhlými souřadnicemi x a y.

Úmluva: Je-li f zadaná analyticky (vzorcem) a nebude-li udán její definiční obor, budeme $D(f)$ rozumět největší množinu reálných čísel x, pro něž má vzorec f smysl.

Příklad 1.23. Určete definiční obor a obor hodnot funkce
$$f(x) = \frac{x-1}{x-2}$$
a rozhodněte, zda se jedná o prostou funkci.

Řešení. Podle naší úmluvy je definiční obor funkce f množina všech reálných x, pro něž podíl $\frac{x-1}{x-2}$ existuje, tj. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Nyní ještě musíme zjistit obor hodnot, tj. určit, jakých všech hodnot může nabývat $y = \frac{x-1}{x-2}$. Počítejme:

$$\begin{aligned} x - 1 &= y(x-2), \\ x - xy &= 1 - 2y, \\ x &= \frac{1-2y}{1-y}, \qquad y \neq 1. \end{aligned}$$



Obr. 1.2

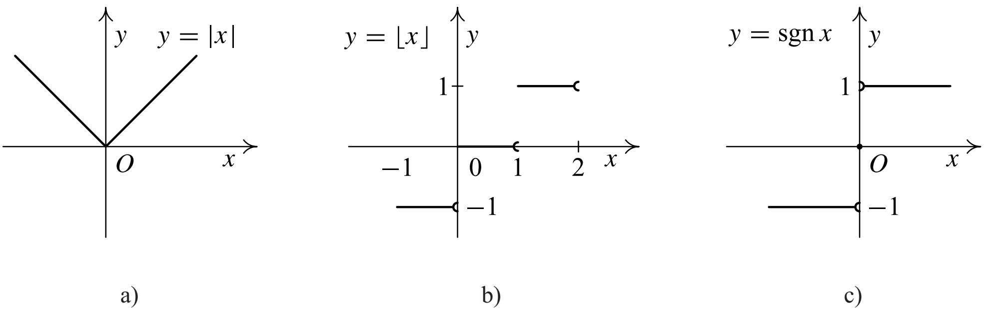
Je vidět, že ke každému $y \neq 1$ existuje právě jedno x, funkce f je tedy prostá a obor hodnot je $H(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Grafem je rovnoosá hyperbola — viz obr. 1.2. ▲

Příklad 1.24. Funkce

$$|x| = \begin{cases} x & \text{pro } x \geq 0, \\ -x & \text{pro } x < 0 \end{cases}$$

se nazývá *absolutní hodnotou*. Určete její definiční obor a obor hodnot a nakreslete graf.

Řešení. Podle své definice je tato funkce definována pro každé reálné číslo a výsledkem může být libovolné nezáporné reálné číslo. Tedy $D(|.|) = \mathbb{R}$, $H(|.|) = [0, \infty)$. Graf je tvořen dvěma polopřímkami — viz obr. 1.3 a). ▲



Obr. 1.3: Grafy funkcí

Poznámka 1.25 (Základní vlastnosti absolutní hodnoty). Absolutní hodnota je velmi důležitá a má řadu jednoduchých, ale významných vlastností, dokazovaných na střední škole. Mezi ně patří zejména ($x, x_0, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$):

1. $|x| \geq 0, \quad |x| \geq x, \quad |-x| = |x|, \quad |x_1 x_2| = |x_1||x_2|, \quad \left|\dfrac{x_1}{x_2}\right| = \dfrac{|x_1|}{|x_2|}$ pro $x_2 \neq 0$;
2. $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$;
3. $\big||x_1| - |x_2|\big| \leq |x_1 - x_2|$;
4. $|x - x_0| < \varepsilon$ právě tehdy, když $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$, neboli když $x \in \mathscr{O}_\varepsilon(x_0)$.

Dále pro práci s rozšířenou množinou reálných čísel klademe $|-\infty| = |+\infty| = +\infty$.

Příklad 1.26. Funkci $\lfloor x \rfloor = n$, kde $n \in \mathbb{Z}$ je určeno nerovnostmi $n \leq x < n + 1$, nazveme funkcí *celých částí*. Určete její definiční obor a obor hodnot a nakreslete graf.

Řešení. Slovně lze funkci popsat tak, že číslu x je přiřazeno největší celé číslo, které je menší nebo rovno x. Funkce je definována pro každé reálné číslo, tedy $D(\lfloor . \rfloor) = \mathbb{R}$. Zřejmě je $H(\lfloor . \rfloor) \subseteq \mathbb{Z}$. Protože pro $x \in \mathbb{Z}$ je $\lfloor x \rfloor = x$, platí i opačná inkluze, takže $H(\lfloor . \rfloor) = \mathbb{Z}$. Graf je složen z polouzavřených úseček — viz obr. 1.3 b). ▲

Příklad 1.27. Funkce

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x > 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ -1 & \text{pro } x < 0 \end{cases}$$

se nazývá *signaturou*. Zřejmě je $D(\operatorname{sgn}) = \mathbb{R}$, $H(\operatorname{sgn}) = \{-1, 0, 1\}$. Graf je tvořen dvěma otevřenými polopřímkami a bodem — viz obr. 1.3 c).

Příklad 1.28. Funkce $\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{I} \end{cases}$ se nazývá *Dirichletovou funkcí*. Určete její definiční obor a obor hodnot.

Řešení. Zřejmě je $D(\chi) = \mathbb{R}$, $H(\chi) = \{0, 1\}$. ▲

Definice 1.29. Funkce f se nazývá *shora ohraničená*, jestliže existuje $U \in \mathbb{R}$ takové, že $f(x) \leq U$ pro každé $x \in D(f)$, *zdola ohraničená*, jestliže existuje $L \in \mathbb{R}$ takové, že $f(x) \geq L$ pro každé $x \in D(f)$, a *ohraničená*, jestliže je ohraničená shora i zdola, tedy jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, takové, že $|f(x)| \leq K$ pro každé $x \in D(f)$.

Uvědomte si, že ohraničenost se týká oboru hodnot. Při označení z definice, je-li funkce ohraničená shora, leží celý graf pod přímkou $y = U$, je-li ohraničená zdola, leží celý nad přímkou $y = L$ a je-li ohraničená, leží celý mezi dvojicí takových přímek (lze vždy volit symetricky přímky $y = K$ a $y = -K$).

Definice 1.30. Řekneme, že funkce f je *sudá*, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí $-x \in D(f)$ a $f(-x) = f(x)$ (graf je souměrný vzhledem k ose y), a řekneme, že funkce f je *lichá*, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí $-x \in D(f)$ a $f(-x) = -f(x)$ (graf je souměrný vzhledem k počátku).

Příklad 1.31. Ověřte, zda jsou následující funkce sudé nebo liché. Jsou ohraničené?

a) $f\colon y = \dfrac{x}{x^2+1}$, b) $g\colon y = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$, c) $h\colon y = \dfrac{1+x}{1+x^2}$.

Řešení. Vzhledem k úmluvě uvažujeme maximální definiční obor, tj. u všech tří funkcí je definičním oborem množina $\mathbb{R}$: $D(f) = D(g) = D(h) = \mathbb{R}$.

a) $f(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2+1} = \dfrac{-x}{x^2+1} = -\dfrac{x}{x^2+1} = -f(x)$. Tedy f je lichá funkce.
Funkce je ohraničená. Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ totiž platí:

$$(|x|-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow |x|^2-2|x|+1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2+1 \geq 2|x| \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{|x|}{x^2+1} = \left|\frac{x}{x^2+1}\right|.$$

Platí tedy $|f(x)| \leq 1/2$. Všimněte si, že v předchozích úpravách nastává rovnost právě tehdy, když $|x| = 1$, tj. pro $x = \pm 1$. Lze tedy volit za ohraničující přímky $y = 1/2$ a $y = -1/2$, tj. $U = 1/2$ a $L = -1/2$, a tyto hodnoty nelze zlepšit, protože $f(1) = 1/2$ a $f(-1) = -1/2$. Graf je znázorněn na obr. 1.4 a).

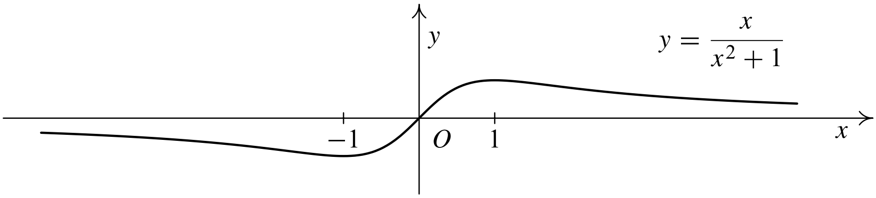
b) $g(-x) = \dfrac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2} = \dfrac{1-x^2}{1+x^2} = g(x)$. Tedy g je sudá funkce.
I tato funkce je ohraničená. Je totiž

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{2-1-x^2}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2} - 1 > -1$$

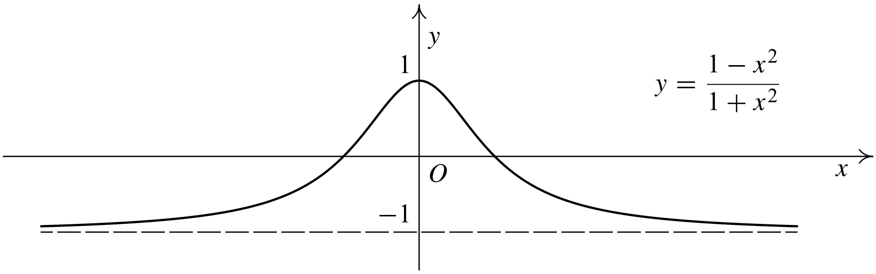
a podobně

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{1+x^2-2x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{2x^2}{1+x^2} \leq 1,$$

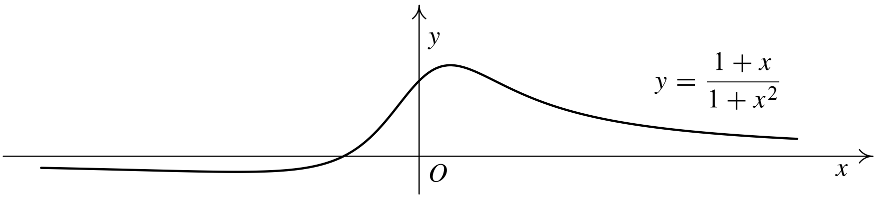
přičemž rovnost nastane jen pro $x = 0$. Graf je znázorněn na obr. 1.4 b). Za ohraničení shora je možné volit přímku $y = 1$, které nelze zlepšit, protože $g(0) = 1$. Nejlepší odhad zdola je $y = -1$.



a) lichá ohraničená funkce



b) sudá ohraničená funkce



c) ohraničená funkce

Obr. 1.4: Grafy funkcí z příkladu 1.31

c) Vidíme např., že $h(1) = 1$, $h(-1) = 0$. Našli jsme tedy jednu hodnotu x takovou, že neplatí ani $h(x) = h(-x)$, ani $h(-x) = -h(x)$. Funkce h tedy není ani sudá ani lichá.
Také tato funkce je ohraničená. Platí (s využitím nerovnosti 2 z poznámky 1.25 a odhadu z části a))

$$\left|\frac{1+x}{1+x^2}\right| = \left|\frac{1}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2}\right| \le \left|\frac{1}{1+x^2}\right| + \left|\frac{x}{1+x^2}\right| \le 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\,.$$

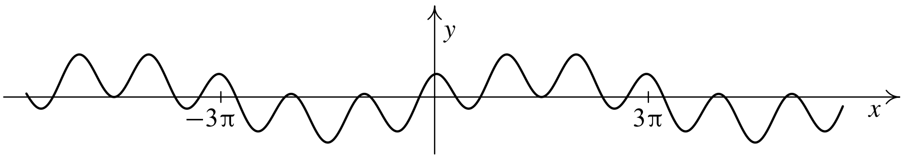
Tedy $|h(x)| \le 3/2$. Graf je znázorněn na obr. 1.4 c). Z obrázku je vidět, že odhady by šlo zlepšit, ale už není tak snadné určit nejlepší možné hodnoty. S nástroji, které to umožní, se budeme seznamovat v dalším textu. ▲

Definice 1.32. Funkce f se nazývá *periodická* s periodou $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$, jestliže platí, že pro každé $x \in D(f)$ je také $x \pm p \in D(f)$ a $f(x+p) = f(x-p) = f(x)$. Nejmenší perioda funkce je nejmenší prvek množiny všech period této funkce (pokud ovšem existuje).

Má-li funkce periodu p, pak také čísla $2p, 3p, \dots$ jsou periody, takže množina period dané funkce je buď prázdná, nebo nekonečná. Typickým příkladem periodických funkcí jsou funkce goniometrické. Periodická je rovněž konstantní funkce, která má za periodu dokonce libovolné kladné reálné číslo. Protože $\min\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ neexistuje, nemá tato funkce nejmenší periodu.

Příklad 1.33. Najděte nejmenší periodu funkce $\sin \frac{1}{3}x + \cos 2x$ a nakreslete její graf.

Řešení. Tato funkce má zřejmě nejmenší periodu 6π. Graf je znázorněn na následujícím obrázku. ▲



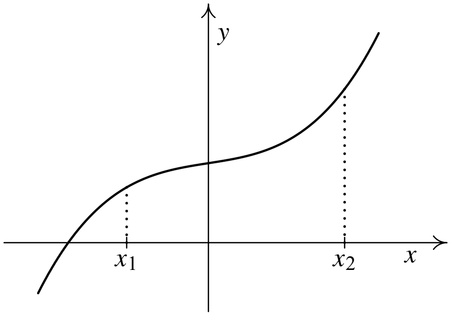
Obr. 1.5

Poznámka 1.34. Jak již bylo řečeno, ne každá periodická funkce musí mít nejmenší periodu. Např. Dirichletova funkce χ z příkladu 1.28 má evidentně za periodu libovolné kladné racionální číslo, ale $\min\{x : x \in \mathbb{Q},\ x > 0\}$ neexistuje, takže nejmenší periodu tato funkce nemá. Funkcemi, které mají nejmenší periodu, jsou funkce goniometrické.

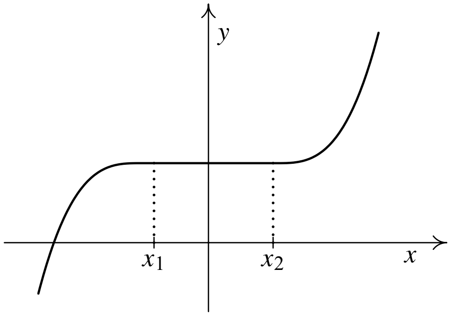
Méně triviálním příkladem funkce mající nejmenší periodu je tzv. *Riemannova funkce* definovaná takto: $\rho(x) = 1$ pro $x \in \mathbb{Z}$, $\rho(p/q) = 1/q$ pro $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, p, q nesoudělné, a $\rho(x) = 0$ pro $x \in \mathbb{I}$. Tato funkce má za periody právě přirozená čísla, nejmenší perioda je 1.

O existenci nejmenší periody lze dokázat následující výsledky:

1. Nechť G_f je množina všech period funkce f. Je-li $\inf G_f = \omega > 0$, je $\omega \in G_f$, tj. ω je také perioda — viz cvičení 6 v kapitole 2.
2. Je-li periodická nekonstantní funkce spojitá aspoň v jednom bodě, má nejmenší periodu — viz cvičení 12 v kapitole 4. (S pojmem spojitosti se seznámíte v kapitole 4.)
3. Má-li funkce nejmenší periodu, pak všechny ostatní periody jsou její celočíselné násobky — viz cvičení 6 v této kapitole.



a) rostoucí



b) neklesající

Obr. 1.6: Monotonní funkce

Další vlastnosti, které funkce mohou mít, se týkají tzv. monotonie.

Definice 1.35. Nechť je dána funkce $f\colon D(f) \to \mathbb{R}$ a množina $I \subseteq D(f)$. Pak funkci f nazveme

rostoucí na množině I, jestliže pro každá dvě $x_1,\ x_2 \in I$ taková, že $x_1 < x_2$, je $f(x_1) < f(x_2)$,

klesající na množině I, jestliže pro každá dvě $x_1,\ x_2 \in I$ taková, že $x_1 < x_2$, je $f(x_1) > f(x_2)$,

nerostoucí na množině I, jestliže pro každá dvě $x_1,\ x_2 \in I$ taková, že $x_1 < x_2$, je $f(x_1) \geq f(x_2)$,

neklesající na množině I, jestliže pro každá dvě $x_1,\ x_2 \in I$ taková, že $x_1 < x_2$, je $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Funkce, která má některou z uvedených čtyř vlastností, se nazývá *monotonní na množině I*. Funkce, která je rostoucí nebo klesající, se nazývá *ryze monotonní*.

V praxi bývá množina I nejčastěji intervalem anebo je $I = D(f)$. Pro vyšetřování monotonie funkcí dosud nemáme vhodné nástroje, proto příklady zatím odložíme. Na obr. 1.6 a) je znázorněna funkce rostoucí na intervalu, na obr. 1.6 b) funkce neklesající na intervalu. Funkce na obr. 1.6 a) je samozřejmě rovněž neklesající na svém definičním intervalu.

Kromě pojmu funkce monotonní na množině se zavádí také pojem funkce monotonní v bodě. Zatímco první pojem je tzv. *globální*, druhý je tzv. *lokální*.

Definice 1.36. Řekneme, že funkce f je *rostoucí v bodě* x_0, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tak, že pro $x_0 - \delta < x < x_0$ je $f(x) < f(x_0)$ a pro $x_0 < x < x_0 + \delta$ je $f(x) > f(x_0)$.
Analogicky se definuje funkce *klesající v bodě*, *neklesající v bodě* a *nerostoucí v bodě*. Společný název pro tyto čtyři vlastnosti je funkce *monotonní v bodě*, pro první dvě vlastnosti pak funkce *ryze monotonní v bodě*.

V předchozí definici se požaduje existence funkčních hodnot v jistém okolí bodu x_0. Implicitně se tedy říká, že musí existovat okolí $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že platí $\mathcal{O}(x_0) \subseteq D(f)$.

Pokud je definičním oborem funkce f interval a bod x_0 je jeho krajním bodem, požaduje se splnění příslušné nerovnosti jen v příslušném levém nebo pravém okolí.

Pro případ, že definičním oborem f je interval, je vztah mezi monotonií na intervalu a v jeho jednotlivých bodech popsán v následující větě. V jejím důkazu si všimněte, jak důležitou roli hraje axiom (R13) o existenci suprema z definice 1.8.

Věta 1.37. *Funkce je rostoucí na intervalu právě tehdy, když je rostoucí v každém jeho bodě. Analogická tvrzení platí pro další typy monotonie.*

Důkaz. Je-li f rostoucí na intervalu I, je zřejmě rostoucí v každém jeho bodě. Důkaz opačného tvrzení je obtížnější.

Nechť $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$. Označme $A = \{x \in [x_1, x_2] : f(x) > f(x_1)\}$. Protože f je rostoucí v bodě x_1, existuje okolí $\mathcal{O}_{\delta_1}(x_1)$ takové, že pro $x \in (x_1, x_1 + \delta_1)$ je $f(x) > f(x_1)$, takže množina A je neprázdná. Dále je shora ohraničená číslem x_2, tudíž existuje $\sup A = c \leq x_2$. Ukážeme, že $c \in A$.

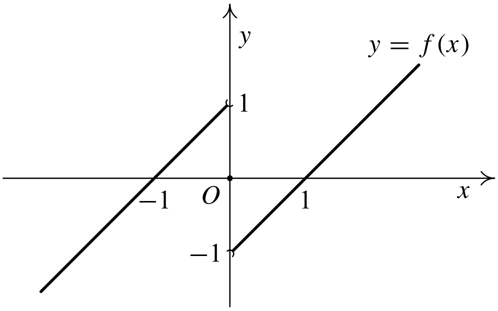
Protože f je rostoucí v bodě c, existuje okolí $\mathcal{O}_{\delta_2}(c)$ takové, že pro $x \in (c - \delta_2, c)$ je $f(x) < f(c)$ a pro $x \in (c, c+\delta_2) \cap [x_1, x_2]$ je $f(x) > f(c)$. Nechť $c \notin A$. Z definice suprema vyplývá, že existuje $x_3 \in (c - \delta_2, c) \cap A$. Pak $f(x_1) < f(x_3) < f(c)$, což je spor, a tedy $c \in A$.

Připusťme, že $c < x_2$. Pak pro $x_4 \in (c, c+\delta_2) \cap [x_1, x_2]$ je $f(x_1) < f(c) < f(x_4)$, takže $x_4 \in A$. To je ale spor s definicí suprema c. Tedy $x_2 = c \in A$ a platí $f(x_1) < f(x_2)$. □

Příklad 1.38. Ověřte, že funkce

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{pro } x < 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ x-1 & \text{pro } x > 0 \end{cases}$$

je ryze monotonní v každém bodě, ale není monotonní na množině $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda je tato funkce monotonní na množině $M = (-1, 0) \cup (0, 1)$.



Obr. 1.7

Řešení. Funkce je zřejmě rostoucí na intervalu $(-\infty, 0)$ a podobně je rostoucí na intervalu $(0, +\infty)$. Je tedy rostoucí v každém bodě $x \neq 0$. V bodě $x = 0$ je však klesající — za okolí $\mathscr{O}(0)$ vyhovující definici 1.36 lze volit např. interval $(-1, 1)$. Že není monotonní na $\mathbb{R}$, plyne z věty 1.37, je to však jasné i bez ní — viz obr. 1.7.

Ani na množině M není funkce f monotonní. Vzhledem k předchozím úvahám by musela být leda rostoucí, ale platí $f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} > -\frac{1}{2} = f(\frac{1}{2})$, přičemž $-\frac{1}{2} < \frac{1}{2}$. Všimněte si, že funkce f roste v každém bodě množiny M. Nejde však o spor s větou 1.37, protože M není interval.

▲

Příklad 1.39. Dokažte, že funkce $f(x) = x\big(2 + \cos(1/x)\big)$ pro $x \neq 0$, $f(0) = 0$, je rostoucí v bodě 0.

Řešení. Protože pro $x \neq 0$ je $-1 \leq \cos(1/x) \leq 1$, je $1 \leq 2 + \cos(1/x) \leq 3$. Tedy $f(x) \geq x > 0 = f(0)$ pro $x > 0$ a $f(x) \leq x < 0 = f(0)$ pro $x < 0$.

Přitom lze ověřit, že tato funkce není monotonní na žádném ryzím levém okolí $(-\delta, 0)$ ani na žádném ryzím pravém okolí $(0, \delta)$, kde $\delta > 0$ — viz cvičení 10 ke kapitole 6. ▲

Definice 1.40. Buďte $\varphi\colon D(\varphi) \to \mathbb{R}$ a $f\colon D(f) \to \mathbb{R}$ funkce.
Pak $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \exists u \in \mathbb{R}$ s vlastností $(x, u) \in \varphi \wedge (u, y) \in f\}$ se nazývá *složená funkce*. Píšeme $F(x) = f[\varphi(x)]$. Funkce φ se nazývá *vnitřní* složkou, funkce f *vnější* složkou.

Snadno se ověří, že relace $F \subseteq \mathbb{R}^2$ z předchozí definice je zobrazením, takže jde skutečně o funkci. Z definice vyplývá, že musíme najít ta $x \in D(\varphi)$, pro něž je $u = \varphi(x) \in D(f)$. Hodnotu složené funkce potom dostaneme dosazením tohoto u do funkce f, tj. $F(x) = f(u) = f[\varphi(x)]$. Aby tedy složená funkce existovala (tj. aby množina dvojic s vlastností požadovanou v definici 1.40 nebyla prázdná), je nutné a stačí, aby $H(\varphi) \cap D(f) \neq \emptyset$.

Rozklad do složek samozřejmě není jednoznačný. Např. pro funkci $(x+1)^2$ máme „přirozený" rozklad $\varphi(x) = x + 1$, $f(u) = u^2$ a „umělý" rozklad (jeden z nekonečně mnoha) $\varphi(x) = 2(x + 1)$, $f(u) = \frac{1}{4}u^2$.

Příklad 1.41. Určete složky následujících funkcí a najděte jejich definiční obory:

a) $\sin x^2$, b) $\sqrt{1 - x^2}$, c) $\log(-x^2)$.

Řešení.

a) Je $\varphi(x) = x^2$, $D(\varphi) = \mathbb{R}$, $f(u) = \sin u$, $D(f) = \mathbb{R}$. Protože platí $H(\varphi) = [0, +\infty) \subseteq D(f)$, je $F(x) = f[\varphi(x)] = \sin x^2$ definovaná na $D(F) = \mathbb{R}$.

b) Je $\varphi(x) = 1 - x^2$, $D(\varphi) = \mathbb{R}$, $f(u) = \sqrt{u}$, $D(f) = [0, +\infty)$. Tedy $F(x) = f[\varphi(x)] = \sqrt{1 - x^2}$ existuje, jen pokud $D(\varphi)$ zúžíme na interval $[-1, 1]$, neboť pak $1 - x^2 \in [0, 1] \subseteq [0, \infty) = D(f)$. Tudíž $D(F) = [-1, 1]$.

c) Je $\varphi(x) = -x^2$, $D(\varphi) = \mathbb{R}$, $f(u) = \log u$, $D(f) = (0, +\infty)$. Protože $H(\varphi) = (-\infty, 0]$, je $H(\varphi) \cap D(f) = \emptyset$ a neexistuje složená funkce $F(x) = f[\varphi(x)] = \log(-x^2)$. ▲

Poznámka 1.42. Proces skládání funkcí lze několikrát opakovat a obdržíme tak funkci vícenásobně složenou.

Příklad 1.43. Určete složky a definiční obor složené funkce

$$f\colon\ y = \log^2 \sqrt{\cos x}$$

Řešení. Je $y = w^2$, $w = \log v$, $v = \sqrt{u}$, $u = \cos x$. Určíme definiční obor funkce f. Musí být $u = \cos x > 0$. Pak bude i $v > 0$, tedy

$$D(f) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left((4k-1)\frac{\pi}{2}, (4k+1)\frac{\pi}{2} \right).$$

▲

V následující definici je zaveden velmi důležitý pojem inverzní funkce.

Definice 1.44. Nechť f je funkce, která je *bijekcí* množiny $D(f)$ na množinu $H(f)$. Pak $f^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in f\}$ se nazývá *inverzní funkcí* k funkci f.

Poznámka 1.45.

i) Z předchozí definice vyplývá, že k funkci f existuje inverzní funkce f^{-1} právě tehdy, když f je prostá funkce, tj. když pro $x_1, x_2 \in D(f)$, $x_1 \neq x_2$, platí $f(x_1) \neq f(x_2)$.

ii) Mezi definičními obory a obory hodnot platí následující vztahy:

$$D(f^{-1}) = H(f) \qquad \text{a} \qquad H(f^{-1}) = D(f).$$

Dále $f^{-1}(y) = x$ právě tehdy, když $f(x) = y$.

iii) Inverzní funkcí k funkci f^{-1} je f.

iv) Platí: $f^{-1}(f(x)) = x$ pro každé $x \in D(f)$,
$f(f^{-1}(y)) = y$ pro každé $y \in H(f)$.

v) Funkce $y = f(x)$ a $x = f^{-1}(y)$ chápané jako relace jsou tvořeny týmiž dvojicemi $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Při zápisu funkce je běžné značit nezávislou proměnnou x a závislou proměnou y, proto místo vztahu $x = f^{-1}(y)$ píšeme $y = f^{-1}(x)$. Protože
$$[x, y] \in f \quad \Leftrightarrow \quad [y, x] \in f^{-1},$$
jsou grafy prosté funkce $y = f(x)$ a funkce k ní inverzní $y = f^{-1}(x)$ symetrické podle přímky $y = x$.

Věta 1.46. *Inverzní funkce k funkci f rostoucí (klesající) na množině $D(f)$ je rostoucí (klesající) na množině $H(f)$.*

Důkaz. Nejprve poznamenejme, že je zřejmé, že ryze monotonní funkce f je prostá, tedy inverzní funkce f^{-1} existuje. Budeme předpokládat, že f je např. rostoucí, a ukážeme, že f^{-1} je také rostoucí.

Připusťme, že funkce f^{-1} není rostoucí. Existují tedy taková $y_1, y_2 \in H(f)$, $y_1 < y_2$, pro která $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$. Funkce f je rostoucí, z čehož plyne, že $f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2))$, a tedy $y_1 \geq y_2$, což je spor. Funkce f^{-1} je tedy rostoucí.

Důkaz pro případ, že f je klesající, se provede analogicky. □

Cvičení

1. Nakreslete grafy funkcí:

   a) $|x - 1|$, b) $2 - |x|$, c) $|x - 1| + |x + 1|$.

2. Řešte následující nerovnice:

   a) $|x - 1| < 2 - |x|$, b) $|2 - x| < 3$, c) $|2 - 3x| > |x - 1| + |x + 1|$.

3. Nakreslete grafy následujících funkcí. Rozhodněte, zda jsou periodické, a pokud ano, určete jejich nejmenší periodu.

   a) $y = x - \lfloor x \rfloor$, b) $\chi(\chi(x))$.

4. Rozhodněte, zda pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí:

   a) $\operatorname{sgn}|x| = |\operatorname{sgn} x|$, b) $|\lfloor x \rfloor| = \lfloor |x| \rfloor$.

5. Dokažte, že každou funkci definovanou na „symetrickém“ definičním oboru (tj. pro $x \in D(f)$ je také $-x \in D(f)$) lze jednoznačně vyjádřit jako součet sudé a liché funkce.

6. Dokažte tvrzení 3 z poznámky 1.34.

7. Dokažte: Nechť f je lichá funkce. Je-li $0 \in D(f)$, pak $f(0) = 0$.

8. Existuje funkce definovaná na $\mathbb{R}$, která je současně sudá i lichá?

9. Rozhodněte, která z následujících funkcí je lichá a která sudá:

   a) $|x+1|$, b) $\dfrac{\cos x}{x}$, c) $\lfloor x^3 \rfloor$, d) $x^4 - 1$, e) $-\sqrt[3]{x}$.

10. Najděte inverzní funkci k funkcím

   a) $y = \dfrac{2x-1}{3x+5}$, b) $y = 10^{x-3}$, c) $y = \dfrac{1}{x}$.

*

Matematika je jemná dohoda o tom, že dvě a dvě jsou čtyři.

*

Jeden filosof nechtěl věřit Bertrandu Russellovi, když mu tvrdil, že z nepravdivého tvrzení vyplývá jakékoliv tvrzení. Povídá: „To tvrdíte, že z výroku dvě a dvě jsou pět, vyplývá, že jste papež?“ Russell přisvědčil. Filosof pochyboval. „Můžete to dokázat?“ Russell mu odpověděl: „Zajisté,“ a na místě vymyslel tento důkaz:

1. *Předpokládejme, že* $2 + 2 = 5$.
2. *Odečteme-li od obou stran rovnice dvě, vyjde nám* $2 = 3$.
3. *Převedeme-li obě strany rovnice na strany opačné, vyjde nám* $3 = 2$.
4. *Když od každé strany odečteme 1, vyjde nám* $2 = 1$.

No a papež a já jsme dvě osoby. Poněvadž dvě se rovná jedné, papež a já jsme jedna osoba. Jsem tedy papež.

Kapitola 2

Posloupnosti

Důležitým speciálním případem funkce je posloupnost, tj. funkce definovaná na množině přirozených čísel. Obsahem této kapitoly je pojem limita a obecnější pojem hromadné body posloupnosti. Pomocí limity jisté posloupnosti budeme definovat Eulerovo číslo, které je důležité pro zavedení elementárních funkcí.

2.1. Limita posloupnosti

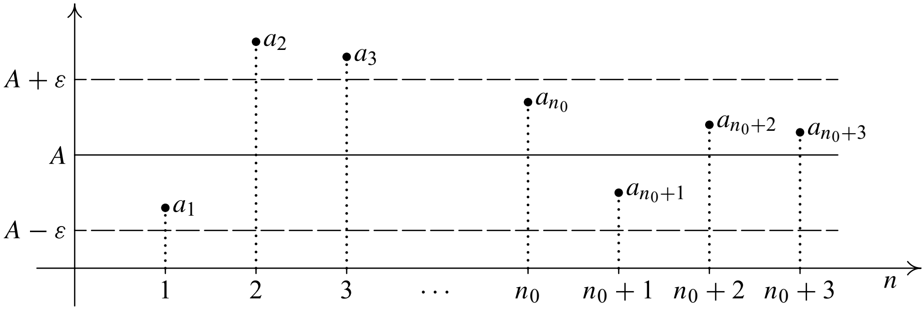
Definice 2.1. *Posloupnost* je zobrazení $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, jehož hodnoty obvykle místo $a(n)$ značíme a_n. Hodnotu a_n nazýváme *n-tý člen posloupnosti* a celou posloupnost pak zapisujeme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nebo $\{a_n\}$, příp. (a_n).

Posloupnost je nejčastěji zadána buď výčtem členů, tj. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1, a_2, \dots\}$, nebo rekurentním vzorcem, např. $a_{n+1} = a_n + d$, $a_1 = 1$, nebo explicitním vzorcem pro n-tý člen, např. $a_n = \frac{1}{n}$.

Poznámka 2.2. Posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá

rostoucí, jestliže $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$;
klesající, jestliže $a_n > a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$;
nerostoucí, jestliže $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$;
neklesající, jestliže $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$;
shora ohraničená, jestliže existuje $U \in \mathbb{R}$ takové, že $a_n \leq U$ pro každé $n \in \mathbb{N}$;
zdola ohraničená, jestliže existuje $L \in \mathbb{R}$ takové, že $a_n \geq L$ pro každé $n \in \mathbb{N}$;
ohraničená , jestliže je ohraničená shora a i zdola.

Poznamenejme, že takto definované pojmy jsou ve shodě s definicemi 1.29 a 1.35 pro funkce $a\colon M \to \mathbb{R}$ s obecnou množinou $M \subseteq \mathbb{R}$.



Obr. 2.1 : Definice limity posloupnosti

Definice 2.3. Nechť je dána posloupnost $\{a_n\}$ a číslo $A \in \mathbb{R}$. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ *má limitu* A, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí, že $|a_n - a| < \varepsilon$. Pomocí kvantifikátorů lze psát:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tak, že } \forall n \geq n_0 \text{ platí } |a_n - A| < \varepsilon.$$

Pokud má posloupnost $\{a_n\}$ limitu, říkáme, že *konverguje*, a značíme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, případně $a_n \to A$ pro $n \to \infty$.
Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu $+\infty$, jestliže jestliže ke každému $A \in \mathbb{R}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí, že $a_n > A$. Značíme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = {}$ $= +\infty$ a pomocí kvantifikátorů zapisujeme

$$\forall A > 0 \, \exists \, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tak, že } \forall n \geq n_0 \text{ platí } a_n > A.$$

Podobně definujeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Pokud má posloupnost $\{a_n\}$ limitu $+\infty$ nebo $-\infty$, říkáme, že posloupnost *diverguje*. Jestliže posloupnost nekonverguje ani nediverguje, řekneme, že *osciluje*.

Místo termínu *posloupnost konverguje* resp. *diverguje* říkáme též, že *posloupnost má vlastní limitu* resp. *nevlastní limitu*.

Poznámka 2.4. Platí $|a_n - A| < \varepsilon$ právě tehdy, když $a_n \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$.

Věta 2.5. *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

Důkaz. Větu dokážeme sporem. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost a předpokládejme, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $a, b \in \mathbb{R}$ a $a \neq b$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a < b$ (pro $a > b$ postupujeme analogicky). Zvolme $\varepsilon := \frac{b-a}{2}$. Podle definice limity existují

$$n_1 \text{ takové, že } \forall n \geq n_1 \text{ platí } a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon),$$
$$n_2 \text{ takové, že } \forall n \geq n_2 \text{ platí } a_n \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon).$$

Pro $n \geq \max(n_1, n_2)$ platí, že $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ a současně $a_n \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$, což je spor, protože tyto intervaly jsou disjunktní (tj. jejich průnik je prázdná množina).

Obdobně se vyšetří případy $a = -\infty$ resp. $b = +\infty$. □

Příklad 2.6. Dokažte z definice, že

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0,$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty.$

Řešení.

a) Nechť je dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Hledáme n_0 takové, aby pro všechna $n \geq n_0$ platilo $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$. Platí

$$\left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Zvolíme $n_0 := \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$. Pak pro $n \geq n_0$ platí $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Tvrzení je dokázáno.

b) Nechť je dáno libovolné $A \in \mathbb{R}$. Hledáme n_0 takové, aby pro všechna $n \geq n_0$ bylo $n > A$. Vidíme, že zvolíme-li $n_0 := \max(\lfloor A \rfloor + 1, 1)$, pak $n > A$. Tvrzení je dokázáno. ▲

Věta 2.7. *Každá konvergentní posloupnost je ohraničená.*

Důkaz. K důkazu ohraničenosti posloupnost $\{a_n\}$ je třeba najít $K \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo $|a_n| < K$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Označme $A := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ a zvolme $\varepsilon := 1$. Podle definice limity k tomuto ε existuje n_0 takové, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $|a_n - A| < 1$. Potom

$$|a_n| = |a_n - A + A| \leq |a_n - A| + |A| < 1 + |A|.$$

Pokud platí $n_0 = 1$, zvolíme $K := |A| + 1$. V opačném případě označme $M := \{|a_n| : n \in \mathbb{N}, n < n_0\}$ a zvolme $K := \max(\max M, |A| + 1)$. Pro takto zvolené K platí $|a_n| < K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, což jsme měli dokázat. □

2.2. Věty o limitách

Věta 2.8. *Nechť* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *a posloupnost* $\{b_n\}$ *je ohraničená. Pak* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0.$

Důkaz. Chceme dokázat, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že pro všechna $n \geq n_0$ je $|a_n \cdot b_n - 0| < \varepsilon$, tj. $|a_n||b_n| < \varepsilon$.

Podle předpokladů existuje $K > 0$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $|b_n| < K$. Dále k nějakému $\varepsilon^* > 0$ (které určíme později) existuje n_a tak, že pro každé $n \geq n_a$ je $|a_n| < \varepsilon^*$. Nechť tedy $n_0 := n_a$ a $\varepsilon^* := \frac{\varepsilon}{K}$. Vidíme, že pro $n \geq n_0$ je

$$|a_n| \cdot |b_n| < \varepsilon^* \cdot K = \varepsilon,$$

a tvrzení je dokázáno. □

Příklad 2.9. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin(n^2+1)}{n}$.

Řešení. Posloupnost $\{\sin(n^2+1)\}$ je ohraničená: $|\sin(n^2+1)| < 2$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Dále $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Tedy podle předchozí věty je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n^2+1)}{n} = 0.$$

▲

Věta 2.10. *Nechť jsou dány posloupnosti $\{a_n\}, \{b_n\}$ a existuje n_0 tak, že pro každé $n \geq n_0$ je $a_n \leq b_n$. Pak platí:*

1. *Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, pak i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$.*
2. *Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, pak i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.*

Důkaz. Důkaz provedeme pouze pro tvrzení 1 (druhé se dokáže analogicky).

Nechť tedy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Z definice limity k libovolnému $A \in \mathbb{R}$ existuje n_a tak, že pro všechna $n \geq n_a$ je $a_n > A$. Navíc dle předpokladu existuje n_0 tak, že pro všechna $n \geq n_0$ je $a_n \leq b_n$. Zvolme $n_0^* := \max(n_a, n_0)$ a vidíme, že pro všechna $n \geq n_0^*$ je $b_n \geq a_n > A$ a tvrzení je dokázáno. □

Příklad 2.11. Určete $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+n}{n}$.

Řešení. Upravíme tvar členů posloupnosti:

$$\frac{n^2+n}{n} = \frac{n(n+1)}{n} = n+1 > n.$$

Protože $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$, je podle předchozí věty také

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n} = \infty.$$

▲

Věta 2.12. *Nechť jsou dány konvergentní posloupnosti* $\{a_n\}, \{b_n\}$ *a* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$*. Pak platí:*

1. *Jestliže* $a < b$*, pak existuje* n_0 *tak, že pro všechna* $n \geq n_0$ *platí* $a_n < b_n$.
2. *Jestliže existuje* n_0 *tak, že pro všechna* $n \geq n_0$ *je* $a_n \leq b_n$*, pak* $a \leq b$.

Důkaz. První tvrzení plyne snadno z definice limity. Druhé tvrzení plyne z prvního: Kdyby bylo $a > b$, pak by pro velká n platilo $a_n > b_n$, což je spor. □

I když bude v druhém tvrzení předchozí věty platit $a_n < b_n$, může být $a = b$, jak ukazuje příklad posloupností $a_n = 1/n$, $b_n = 2/n$, kdy $a = b = 0$.

Věta 2.13. *Nechť jsou dány posloupnosti* $\{a_n\}, \{b_n\}$ *a* $\{c_n\}$ *a číslo* $L \in \mathbb{R}$ *takové, že* $a_n \leq b_n \leq c_n$ *pro všechna* $n > n_0$*, a* $\lim_{n\to\infty} a_n = L = \lim_{n\to\infty} c_n$*. Pak také* $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

Důkaz. Z definice limity k libovolnému $\varepsilon > 0$ existují

$$
\begin{aligned}
&n_a \text{ takové, že pro všechna } n \geq n_a \text{ platí } L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon,\\
&n_c \text{ takové, že pro všechna } n \geq n_c \text{ platí } L - \varepsilon < c_n < L + \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Zvolíme-li $n_0^* := \max(n_a, n_c, n_0)$, pak pro všechna $n \geq n_0^*$ platí

$$L - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < L + \varepsilon,$$

tj. $|b_n - L| < \varepsilon$. Tvrzení je dokázáno. □

Příklad 2.14. Určete $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

Řešení. Pro každé n platí $n^2 + 1 > n$. Odtud máme $0 < \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n}$, přičemž $0 \to 0$ a $\frac{1}{n} \to 0$. Podle předchozí věty

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0.$$

▲

Věta 2.15. *Nechť* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *a* $\lim_{n\to\infty} b_n = b$*, kde* $a, b \in \mathbb{R}$*. Pak platí:*

1. $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.
2. $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$.
3. $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.
4. *Pokud* $b \neq 0$*, pak* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Důkaz.

1. Podle předpokladu platí

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \, \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon.$$

   Z vlastností absolutní hodnoty plyne: $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon$ a tvrzení je dokázáno.

2. Chceme ukázat, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že pro všechna $n \geq n_0$ je $|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon$. Dle předpokladů existuje pro nějaké $\varepsilon^* > 0$ (určíme je později)

$$n_a \text{ tak, že pro všechna } n \geq n_a \text{ je } |a_n - a| < \varepsilon^* \text{ a}$$
$$n_b \text{ tak, že pro všechna } n \geq n_b \text{ je } |b_n - b| < \varepsilon^*.$$

   Zvolme $n_0 := \max(n_a, n_b)$ a $\varepsilon^* := \frac{\varepsilon}{2}$. Vidíme, že pro všechna $n \geq n_0$ je :

$$|(a_n + b_n) - (a + b) = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon^* + \varepsilon^* = \varepsilon$$

   a tvrzení je dokázáno.

3. Postupujeme obdobně jako v případě 2, opět k nějakému ε^* najdeme n_a, n_b požadovaných vlastností. Dále podle věty 2.7 existuje $K \in R$ tak, že $|a_n| < K$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Upravujme:

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| < K\varepsilon^* + |b|\varepsilon^*.$$

   Vidíme, že když zvolíme $\varepsilon^* := \frac{\varepsilon}{K+|b|}$, je tvrzení dokázáno.

4. Protože $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$, stačí dokázat, že $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$, zbytek plyne z předchozího tvrzení. Nejprve provedeme úpravu

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b - b_n|}{|b_n||b|}.$$

   Podle tvrzení 1 platí $|b_n| \to |b|$ a podle věty 2.12 existuje n_1 tak, že pro všechna $n \geq n_1$ je $|b_n| > \frac{|b|}{2} > 0$. Obdobně jako v předchozích tvrzeních existuje k nějakému $\varepsilon^* > 0$ index n_b tak, že pro všechna $n \geq n_b$ je $|b_n - b| < \varepsilon^*$. Zvolme $n_0 := \max(n_1, n_b)$. Pak pro všechna $n \geq n_0$ platí

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b - b_n|}{|b_n||b|} < \frac{\varepsilon^*}{|b|\frac{|b|}{2}} = \frac{2}{b^2}\,\varepsilon^*.$$

   Stačí tedy zvolit $\varepsilon^* := \frac{\varepsilon b^2}{2}$ a tvrzení je dokázáno. □

Poznámka 2.16.

a) Bez předpokladu existence obou limit posloupností nejsou úpravy

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n,\qquad \lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n$$

ekvivalentní. Např. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[(-1)^n+(-1)^{n+1}\right]=0$, ale $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ neexistuje. Podobně $\lim\limits_{n\to\infty}[(-1)^n\cdot(-1)^n]=1$.
Také úprava $\lim\limits_{n\to\infty}ca_n=c\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ není ekvivalentní pro $c=0$.

b) Předchozí věta platí i pro $a,b\in\mathbb{R}^*$, má-li pravá strana příslušného vzorce smysl, tj. je-li dotyčná algebraická operace pro hodnoty a,b definovaná — viz poznámka 1.17.

Příklad 2.17. Určete $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+1}{3n+n^2}$.

Řešení. Podle Věty 2.15 platí

$$\lim\frac{n^2\left(3+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(\frac{3}{n}+1\right)}=\lim\frac{3+\frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n}+1}=\frac{3+0}{0+1}=3.$$

▲

Věta 2.18. *Nechť je dána posloupnost* $\{a_n\}$.

1. *Jestliže* $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=+\infty$, *pak* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n}=0$ *(heslo „*$\frac{1}{\infty}=0$*“).*
2. *Jestliže* $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ *a existuje* n_0 *takové, že pro všechna* $n>n_0$ *je* $a_n>0$, *pak* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n}=+\infty$ *(heslo „*$\frac{1}{0+}=+\infty$*“).*
   Analogicky platí tvrzení vystižené heslem „$\frac{1}{0-}=-\infty$*“.*

Důkaz.

1. Buď $\varepsilon>0$. Chceme ukázat, že existuje n_0 takové, že pro všechna $n>n_0$ je $\left|\frac{1}{a_n}-0\right|=\frac{1}{|a_n|}<\varepsilon$. Z existence limity $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=+\infty$ plyne, že k číslu $A:=\frac{1}{\varepsilon}$ existuje n_0 tak, že všechna $n>n_0$ platí $|a_n|>\frac{1}{\varepsilon}$. Pak pro $n>n_0$ platí $0<\frac{1}{|a_n|}<\varepsilon$ a tvrzení je dokázáno.
2. Buď $A>0$. Chceme dokázat, že existuje n_0^* takové, že pro všechna $n>n_0^*$ je $\frac{1}{a_n}>A$. Podle předpokladu platí $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. Proto k číslu $\varepsilon:=\frac{1}{A}$ existuje n_1 takové, že pro všechna $n>n_1$ je $a_n\in(-\varepsilon,\varepsilon)$. Zvolme $n_0^*:=\max(n_0,n_1)$. Pak pro $n>n_0^*$ je $0<a_n<\varepsilon=\frac{1}{A}$, odkud $\frac{1}{a_n}>A$. Tvrzení je dokázáno. □

Poznámka 2.19. V případě limit typu „$\infty - \infty$“, „$\frac{\infty}{\infty}$“, „$\frac{0}{0}$“ limita může existovat, ale nemusí.

V případě typu „$\frac{1}{0}$“ mohou nastat tři případy: limita je $+\infty$, $-\infty$ nebo limita neexistuje. Jako ilustraci uveďme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n}} = \infty, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{-\frac{1}{n}} = -\infty, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{(-1)^n}{n}} \text{ neexistuje.}$$

Věta 2.20. *Každá neklesající shora ohraničená posloupnost $\{a_n\}$ má vlastní limitu. Přitom platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_1, a_2, \dots\}$.*

Podobně každá nerostoucí zdola ohraničená posloupnost $\{b_n\}$ má vlastní limitu a platí $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \inf\{b_1, b_2, \dots\}$.

Důkaz. Dokážeme pouze první tvrzení, důkaz druhého se provede analogicky.

Nechť $\{a_n\}$ je neklesající posloupnost shora ohraničená. Podle axiomu (R13) má každá neprázdná shora ohraničená množina supremum. Označíme tudíž $s := = \sup\{a_1, a_2, \cdots\}$, $s \in \mathbb{R}$, a dokážeme, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = s$.

Z druhé vlastnosti suprema plyne, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že $s - \varepsilon < a_{n_0} \le s$. Posloupnost $\{a_n\}$ je neklesající, proto pro každé $n > n_0$ je $a_{n_0} \le a_n$. Odtud $s - \varepsilon < a_n \le s$, neboli $a_n \in (s - \varepsilon, s + \varepsilon)$. Tvrzení je dokázáno. □

Příklad 2.21. Vypočtete limitu

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} \right).$$

Řešení. Nejprve si uvědomíme, že platí $\frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ (ověřte sami). Potom

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} \right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = 1.$$

▲

Příklad 2.22. Vypočtete

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - 2 + 3 - 4 + \cdots - 2n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Řešení. Podle vzorce pro součet členů aritmetické posloupnosti je

$$s_l(n) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = \frac{n}{2}(1 + 2n - 1) = n^2,$$
$$s_s(n) = 2 + 4 + \cdots + 2n = \frac{n}{2}(2 + 2n) = n + n^2.$$

Potom

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-2+3-4+\cdots-2n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{s_l(n)-s_s(n)}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n-n^2}{\sqrt{n^2+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-n\cdot\frac{1}{n}}{\sqrt{n^2+1}\cdot\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{\sqrt{\frac{n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}}} = \frac{-1}{1} = -1.$$

▲

Příklad 2.23. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$.

Řešení. Máme

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n^2+1-n^2)}{\sqrt{n^2+1}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} = \frac{1}{2}.$$

▲

Příklad 2.24. Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{2n^5+3n+1}+\sqrt{5n^2+3n}}{\sqrt{2n^3+4n+1}-\sqrt[3]{5n^5+1}}.$$

Řešení. Vytkneme z každé odmocniny člen v nejvyšší mocnině

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^5}\cdot\sqrt[3]{2+\frac{3}{n^4}+\frac{1}{n^5}}+n\cdot\sqrt{5+\frac{3}{n}}}{\sqrt{n^3}\cdot\sqrt{2+\frac{4}{n^2}+\frac{1}{n^3}}-\sqrt[3]{n^5}\cdot\sqrt[3]{5+\frac{1}{n^5}}}.$$

Zkrátíme zlomek výrazem $\sqrt[3]{n^5}$ a dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{2+\frac{3}{n^4}+\frac{1}{n^5}}+\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\cdot\sqrt{5+\frac{3}{n}}}{\frac{1}{\sqrt[6]{n}}\cdot\sqrt{2+\frac{4}{n^2}+\frac{1}{n^3}}-\sqrt[3]{5+\frac{1}{n^5}}} = \frac{\sqrt[3]{2+0+0}+0\cdot\sqrt{5+0}}{0\cdot\sqrt{2+0+0}-\sqrt[3]{5+0+0}} = -\sqrt[3]{\frac{2}{5}}.$$

▲

Příklad 2.25. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n}\right)$.

Řešení. Postupujeme obdobně jako v příkladě 2.23:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+1-(n^2-n)}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \frac{2}{2} = 1.$$

▲

2.3. Eulerovo číslo

Věta 2.26. *Posloupnost* $\{a_n\}$, *kde* $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, *je rostoucí a shora ohraničená, posloupnost* $\{b_n\}$, *kde* $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, *je klesající a zdola ohraničená, jsou tedy obě konvergentní. Mají tutéž limitu.*

Důkaz. Ukážeme nejprve, že posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí a $\{b_n\}$ je klesající. Pro $n \geq 2$ je podle Bernoulliovy nerovnosti (viz příklad 1.15)

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} > \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n}{n-1} = 1,$$

takže $a_n > a_{n-1}$ pro každé $n > 1$. Podobně

$$\begin{aligned}\frac{b_{n-1}}{b_n} &= \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} > \\ &> \left(1 + \frac{n}{n^2-1}\right) \cdot \frac{n}{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n}{n+1} = 1,\end{aligned}$$

tedy $b_{n-1} > b_n$ pro každé $n > 1$.

Protože $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot a_n > a_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, platí $a_1 \leq a_n < b_n \leq b_1$ pro $n \in \mathbb{N}$. Posloupnost $\{a_n\}$ je tedy shora ohraničená a posloupnost $\{b_n\}$ je zdola ohraničená. Podle věty 2.20 mají obě limitu. Konečně $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. □

Společná limita obou posloupností z předchozího příkladu má velký význam.

Definice 2.27. Limitu $\mathrm{e} := \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ nazýváme *Eulerovo číslo*.

Poznámka 2.28. O čísle e lze dokázat, že je iracionální — viz např. [7, str. 81], [17, str. 181] nebo [21, str. 89]; rovněž číslo π je iracionální — viz [15, str. 183].

Číslo se nazývá *algebraické*, je-li kořenem nějakého nenulového polynomu s celočíselnými koeficienty. Mezi tato čísla patří všechna racionální čísla. Příkladem iracionálních algebraických čísel je třeba $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2 - \sqrt{3}}$ a pod. Zbývající reálná čísla se nazývají *transcendentní*. Číslo e je transcendentní — viz [8, str. 147]. Také číslo π je transcendentní — viz [18, str. 205]. Srovnejte též příklad D.43 dodatku.

Příklad 2.29. Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n.$$

Řešení. Využijeme znalost limity posloupnosti $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$. Upravíme

$$\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}}.$$

Označíme $2n = m$ a dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}} = \lim_{m\to\infty} \sqrt{\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}} = \sqrt{\mathrm{e}}.$$

(Využili jsme toho, že odmocnina je spojitá funkce, platí tedy $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$, jak uvidíme dále ve větě 4.22.) ▲

2.4. Hromadné body posloupnosti

Definice 2.30. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost a nechť $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ se nazývá *vybraná posloupnost* (*podposloupnost*) z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Příklad 2.31. Najděte všechny konvergentní podposloupnosti posloupnosti $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$.

Řešení. Posloupnost $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$ má vybrané konvergentní posloupnosti

$$\{a_{2n}\} = \{1, 1, \dots\} \quad \text{a} \quad \{a_{2n+1}\} = \{-1, -1, \dots\},$$

mající limity 1 resp. -1. Každá jiná vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}$ bude konvergentní, jen když bude od jistého členu konstantní. To ukážeme následovně. K číslu $0 < \varepsilon < 1$ lze najít k_0 takové, že pro $k \geq k_0$ je $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$, kde a je limita této posloupnosti. Pak pro $k, m \geq k_0$ je $|a_{n_k} - a_{n_m}| = |a_{n_k} - a + a - a_{n_m}| \leq |a_{n_k} - a| + |a_{n_m} - a| < 2\varepsilon < 2$. Protože $|1 - (-1)| = 2$, musí být pro $k \geq k_0$ buď pořád $a_{n_k} = 1$ nebo pořád $a_{n_k} = -1$. ▲

Věta 2.32. *Nechť $\{a_{n_k}\}$ je vybraná posloupnost z posloupnosti $\{a_n\}$ a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Potom $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.*

Důkaz. Tvrzení dokážeme přímo z definice limity. Nechť je dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Pak podle předpokladu existuje n^* takové, že pro všechna $n \geq n^*$ je $|a_n - a| < \varepsilon$. Posloupnost $\{n_k\}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel, proto můžeme zvolit k_0 tak, že $n_{k_0} \geq n^*$. Pak pro všechna $k > k_0$ je $n_k > n_{k_0} \geq n^*$, a proto platí $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$. Tvrzení je dokázáno. □

Předchozí věta se někdy užívá pro důkaz neexistence limity dané posloupnosti. Ukažme si to na jednoduché posloupnosti $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$ z příkladu 2.31. Kdyby existovala limita $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n = a$, pak by toto číslo bylo limitou i každé vybrané posloupnosti, a proto by muselo platit, že

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1, \quad a = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} (-1) = -1,$$

což je evidentní spor, a tedy daná posloupnost $\{(-1)^n\}$ nemá limitu.

Pro posloupnosti, které nejsou konvergentní, je důležitý pojem hromadného bodu zobecňující pojem limity posloupnosti.

Definice 2.33. Číslo $a \in \mathbb{R}^*$ se nazývá *hromadný bod* posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže pro každé okolí $\mathscr{O}(a)$ existuje nekonečně mnoho indexů $n \in \mathbb{N}$, pro které platí, že $a_n \in \mathscr{O}(a)$.

Věta 2.34. *Číslo a je hromadným bodem posloupnosti $\{a_n\}$ právě tehdy, když existuje vybraná podposloupnost $\{a_{n_k}\}$ taková, že $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.*

Důkaz. Tvrzení snadno plyne přímo z definice hromadného bodu a vybrané posloupnosti. □

Příklad 2.35. Najděte všechny hromadné body posloupnosti $\{a_n\} = \left\{\cos \dfrac{2n\pi}{3}\right\}$.

Řešení. Budeme postupovat pomocí předchozí věty — vyšetříme všechny vybrané podposloupnosti. Nechť $k \in \mathbb{N}$. Pro $n = 3k$ dostáváme

$$\cos\frac{2n\pi}{3} = \cos\frac{6k\pi}{3} = \cos 2k\pi = 1.$$

Položme $n_k = 3k$. Pak $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = 1$ a číslo 1 je hromadným bodem posloupnosti $\{a_n\}$. Obdobně pro $n = 3k + 1$, kde $k \in \mathbb{N}$, dostáváme

$$\cos\frac{2n\pi}{3} = \cos\frac{2(3k+1)\pi}{3} = \cos\left(2k\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

a pro $n = 3k + 2$, kde $k \in \mathbb{N}$, dostáváme

$$\cos\frac{2n\pi}{3} = \cos\frac{2(3k+2)\pi}{3} = \cos\left(2k\pi + \frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Analogicky jako v příkladu 2.31 se ukáže, že další podposloupnosti jsou konvergentní, jen když jsou od jistého indexu konstantní. Posloupnost $\{a_n\}$ má tudíž celkem tři hromadné body 1 a $\pm 1/2$. ▲

Lemma 2.36. *Každá posloupnost má nejmenší a největší hromadný bod.*

Důkaz. Důkaz tohoto intuitivně zřejmého tvrzení je následující.

Nechť je posloupnost $\{a_n\}$ ohraničená. Definujme dvě pomocné posloupnosti $\{h_n\}$ a $\{d_n\}$ následovně: $h_n = \sup\{a_k;\, k \geq n\}$ a $d_n = \inf\{a_k;\, k \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Zřejmě platí $d_n \leq a_n \leq h_n$. Dále posloupnost $\{h_n\}$ je nerostoucí a posloupnost $\{d_n\}$ je neklesající. Obě jsou ohraničené. Podle věty 2.20 existují tedy $\lim_{n\to\infty} h_n = h \in \mathbb{R}$ a $\lim_{n\to\infty} d_n = d \in \mathbb{R}$, přičemž $d \leq h$ podle věty podle 2.12, 2.

Ukážeme, že d a h jsou hromadné body posloupnosti $\{a_n\}$. Ověříme to např. pro h. Z definice suprema plyne, že ke každému $n \in \mathbb{N}$ existuje index $k_n > n$ takový, že platí nerovnost $h_n - 1/n < a_{k_n} \leq h_n$. Přitom lze předpokládat (po případném přechodu k podposloupnosti), že posloupnost $\{k_n\}$ je rostoucí. Z věty 2.13 nyní plyne, že $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = h$. Existuje tudíž vybraná podposloupnost, která má za limitu h.

Dále ukážeme, že pro libovolný hromadný bod a posloupnosti $\{a_n\}$ je $d \leq a \leq h$. Existuje totiž vybraná konvergentní podposloupnost $\{a_{n_k}\}$, pro niž $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. Pak platí nerovnost $d_{n_k} \leq a_{n_k} \leq h_{n_k}$, z čehož podle věty 2.12, 2 plyne tvrzení. Tedy h je největší a d je nejmenší hromadný bod posloupnosti $\{a_n\}$.

Nyní vyšetříme neohraničené posloupnosti. Je-li posloupnost $\{a_n\}$ shora resp. zdola neohraničená, ukážeme, že $+\infty$ resp. $-\infty$ je její hromadný bod.

Nechť je $\{a_n\}$ posloupnost shora neohraničená, tj. pro každé $K > 0$ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $a_n > K$. Indukcí můžeme sestrojit rostoucí posloupnost indexů $\{n_k\}$ takovou, že $a_{n_k} > k$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$. Pak zřejmě podle věty 2.10, 1 je $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = +\infty$, proto je podle věty 2.34 také $+\infty$ hromadným bodem posloupnosti $\{a_n\}$.

Analogicky bychom vyšetřili případ zdola neohraničené posloupnosti; v tomto případě pak je $-\infty$ hromadným bodem posloupnosti.

Konečně si všimneme, že posloupnost $\{h_n\}$ lze definovat pro libovolnou shora ohraničenou posloupnost (pak ovšem může být i $h = -\infty$; příkladem je posloupnost $\{-n\}$) a posloupnost $\{d_n\}$ lze definovat pro libovolnou zdola ohraničenou posloupnost (pak ovšem může být i $d = +\infty$; příkladem je posloupnost $\{n\}$). Přitom bude platit $a_n \leq h_n$ resp. $d_n \leq a_n$. Je-li např. $h = -\infty$, je vzhledem k nerovnosti $a_n \leq h_n$ podle věty 2.10, 2 také $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Podobně se postupuje v případě $d = +\infty$.

Tedy ve všech případech existuje největší a nejmenší hromadný bod. □

Poznámka 2.37. Posloupnosti $\{h_n\}$ a $\{d_n\}$ z předchozího důkazu je možné zavést dokonce pro libovolnou posloupnost, pokud pro shora (resp. zdola) neohraničené posloupnosti položíme $h_n = +\infty$ (resp. $d_n = -\infty$) pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pak klademe $h = +\infty$ (resp. $d = -\infty$).

Ilustrujme konstrukci z předchozího důkazu na příkladech.

(a) Pro $a_n = 1/n$ je $h_n = 1/n$, $d_n = 0$, $h = 0$ a $d = 0$.

(b) Pro $a_n = n$ je $h_n = +\infty$, $d_n = n$, $h = +\infty$ a $d = +\infty$.

(c) Pro $a_n = (-1)^n$ je $h_n = 1$, $d_n = -1$, $h = 1$ a $d = -1$.

(d) Pro $a_n = (-1)^n \cdot n/(n+1)$ je $h_n = 1$, $d_n = -1$, $h = 1$ a $d = -1$.

Důsledek 2.38. *Každá posloupnost má alespoň jeden hromadný bod.*

Následující věta má velký význam v řadě partií matematické analýzy. Její důkaz bezprostředně vyplývá z lemmatu 2.36.

Věta 2.39 (Bolzanova-Weierstrassova). *Z každé ohraničené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.*

Definice 2.40. Nechť je dána posloupnost $\{a_n\}$. Pak největší hromadný bod této posloupnosti nazveme *limita superior* a označujeme

$$\limsup_{n\to\infty} a_n;$$

nejmenší hromadný bod této posloupnosti nazveme *limita inferior* a označujeme

$$\liminf_{n\to\infty} a_n.$$

Příklad 2.41. Vypočtěte $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ a $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ posloupnosti $\{a_n\} = \left\{\dfrac{1+(-1)^n}{2}\right\}$.

Řešení. Pro $n_k = 2k$, resp. pro $n_k = 2k+1$ ($k \in \mathbb{N}$) platí

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \frac{1+1}{2} = 1, \qquad \text{resp.} \qquad \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \frac{1-1}{2} = 0.$$

Jiné hromadné body neexistují (ověří se jako v příkladu 2.31). Proto $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ a $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. ▲

Z předchozího snadno plyne následující důležitá věta.

Věta 2.42. *Posloupnost $\{a_n\}$ má limitu právě tehdy, když $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$. Všechny tři hodnoty jsou pak stejné.*

Důkaz. „$\Rightarrow$“ Existuje-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, pak každá vybraná podposloupnost má tutéž limitu L. Posloupnost má proto jediný hromadný bod L, takže její limita superior a limita inferior se musí rovnat.

„$\Leftarrow$“ Označme L společnou hodnotu limity superior a limity inferior. Nechť nejprve $L \in \mathbb{R}$. K libovolnému $\varepsilon > 0$ lze najít index n_0 tak, že pro $n \geq n_0$ je $L - \varepsilon < < d_n \leq h_n < L + \varepsilon$. Protože platí $d_n \leq a_n \leq h_n$, je $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$ kdykoliv $n \geq n_0$, tedy limita posloupnosti $\{a_n\}$ existuje a je rovna L. Podobně se vyšetří případy $L = \pm\infty$. □

Následující tvrzení bývá často nazýváno *Bolzanovo-Cauchyovo kritérium*. Má především teoretický význam v důkazech existence limit.

Věta 2.43. *Posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní právě tehdy, když je cauchyovská, tj. když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n > n_0$, platí nerovnost $|a_n - a_m| < \varepsilon$. Zapsáno pomocí kvantifikátorů:*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\, \forall m, n \in \mathbb{N}, m, n > n_0 : |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Důkaz. Je-li posloupnost $\{a_n\}$ konvergentní, existuje k libovolnému $\varepsilon > 0$ index $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $n > n_0$ platí $|a - a_n| < \varepsilon/2$. Tedy pro $m, n > n_0$ je $|a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n| \leq$ $\leq |a_m - a| + |a_n - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, takže posloupnost je cauchyovská.

Nechť je naopak posloupnost cauchyovská. K číslu 1 existuje index $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $m, n > n_0$ je $|a_m - a_n| < 1$. Volbou $m = n_0 + 1$ dostaneme nerovnost $a_{n_0} - 1 < a_n < a_{n_0} + 1$ a tedy $|a_n| < |a_{n_0}| + 1$. Posloupnost je tudíž ohraničená a podle věty 2.39 z ní lze vybrat konvergentní podposloupnost $\{a_{n_k}\}$, kde $a_{n_k} \to a$. K libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje $r_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $m, n > r_0$ je $|a_m - a_n| < \varepsilon/2$. Dále lze najít $n_s > r_0$ tak, že $|a - a_{n_s}| < \varepsilon/2$. Nyní pro libovolné $n > r_0$ platí $|a - a_n| = |a - a_{n_s} + a_{n_s} - a_n| \leq |a - a_{n_s}| + |a_{n_s} - a_n| <$ $< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, takže posloupnost je konvergentní. □

Místo *cauchyovská posloupnost* se také používá název *fundamentální posloupnost*. Obsah věty 2.43 pak vyjadřujeme termínem, že množina $\mathbb{R}$ je *úplná*. Vlastnost úplnosti doplněná o archimedovskost je ve skutečnosti ekvivalentní axiomu (R13) z definice 1.8 a je významnou vlastností reálných čísel — viz dodatek, věta D.14. Dodejme, že např. množina $\mathbb{Q}$ úplná není.

Cvičení

1. Udejte příklad posloupností a_n, b_n, pro které $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ a přitom $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, resp. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$.

2. Vypočtěte limity posloupností:

   a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{a + \frac{1}{n}} - \sqrt{a}\right)$, b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 3^n}{3^n}$, c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n + n}{\sin n - n}$.

3. Vypočtěte limity následujících posloupností:

   a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!}$, b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{2^n + 1}$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[4]{n^5+2} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2} - \sqrt{n^3+1}}$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sqrt{4n^2+3n+1} - 2n^2}{n+1}$,

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{n\sqrt[3]{n^3+n^2} - n^2}$,

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}\right)$.

4. Vypočtěte limitu superior a limitu inferior posloupností

a) $(-1)^n\left(2+\dfrac{3}{n}\right)$,

b) $1+\dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$,

c) $n^{(-1)^n}$,

d) $a_n = (-1)^{n-1}\left(2+\dfrac{3}{n}\right)$,

e) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$,

f) $a_n = (-1)^n n$,

g) $a_n = 1 + n\sin\dfrac{n\pi}{2}$,

h) $a_n = 1+\dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$.

5. Zjistěte, zda existuje limita posloupnosti, případně určete hromadné body posloupnosti

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\dfrac{n\pi}{6}$.

6. Dokažte tvrzení 1 z poznámky 1.34.

*

Kolik matematiků je potřeba k výměně žárovky?
Žádný. Je to přenecháno čtenáři jako cvičení.

Kapitola 3

Elementární funkce

V této kapitole zavedeme základní elementární funkce — polynomy, racionální lomené funkce, goniometrické a cyklometrické funkce, funkce exponenciální, logaritmické a mocninné. Nejjednoduššími elementárními funkcemi jsou polynomy.

3.1. Polynomy

Definice 3.1. Funkci $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tvaru

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0, \qquad \text{kde } a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R},$$

nazýváme *polynomem* neboli *mnohočlenem*. Čísla a_i se nazývají *koeficienty* polynomu. Je-li $a_n \neq 0$, pak číslo n nazveme *stupněm* polynomu a značíme st P.

Příklad 3.2. Příkladem jsou již ze střední školy známé polynomy: $ax^2 + bx + c$ — kvadratický polynom, $ax + b$ — lineární polynom. Je-li $P(x) = a_0 \neq 0$, jde o polynom nulového stupně. Polynom $P(x) = 0$ nazýváme nulovým polynomem a přiřazujeme mu jako stupeň symbol $-\infty$ (někdy se mu stupeň nepřiřazuje).

Poznámka 3.3.

i) Definičním oborem polynomu je množina reálných čísel.
ii) Takto definovaný polynom (kde $a_i \in \mathbb{R}$ a $x \in \mathbb{R}$) se také nazývá *reálným polynomem* nad množinou $\mathbb{R}$. Pokud $x \in \mathbb{C}$, mluvíme o reálném polynomu nad množinou $\mathbb{C}$. Protože v celém textu rozumíme pod pojmem funkce pouze reálné funkce reálné proměnné, pod pojmem polynom rozumíme vždy reálný polynom nad $\mathbb{R}$. Podrobněji o polynomech viz [11].

iii) Mezi polynomy definujeme operace sčítání (resp. odčítání) a násobení tak, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $(P \pm Q)(x) = P(x) \pm Q(x)$ a $(P \cdot Q)(x) = P(x) \cdot Q(x)$. Součet (resp. rozdíl) a součin dvou polynomů je opět polynom. Platí $\operatorname{st}(P \pm Q) \leq \max(\operatorname{st} P, \operatorname{st} Q)$ a $\operatorname{st}(P \cdot Q) = \operatorname{st} P + \operatorname{st} Q$. Při sčítání (resp. odčítání) sčítáme (resp. odčítáme) koeficienty u stejných mocnin proměnné x. Při násobení jde o obyčejné násobení n-členů.

Definice 3.4. Číslo $\alpha \in \mathbb{C}$ se nazývá *kořen polynomu* P, jestliže

$$P(\alpha) = 0.$$

Číslo α je *k-násobným kořenem* polynomu P, existuje-li polynom Q takový, že

$$P(x) = (x - \alpha)^k Q(x),$$

a α není kořenem polynomu Q, tj. $Q(\alpha) \neq 0$. (Pro $k = 1$ používáme název *jednoduchý kořen*.) Číslo $k \in \mathbb{N}$ se pak nazývá násobnost kořene α polynomu P. Je-li α kořen, pak se polynom $(x - \alpha)$ nazývá *kořenový činitel* příslušný k α.

Následující tvrzení uvádíme bez důkazů. Teorie polynomů bude podrobněji probírána později v algebře, viz např. [11].

i) Je-li α kořen polynomu P, pak existuje polynom R tak, že $P(x) = (x - \alpha)R(x)$.

ii) *Základní věta algebry*:
Polynom P stupně $n \geq 0$ má v $\mathbb{C}$ právě n kořenů, počítáme-li každý kořen tolikrát, kolik je jeho násobnost.
Všimněte si, že nulový polynom má za kořen každé číslo.

iii) *Rozklad polynomu v $\mathbb{C}$.*
Důsledkem základní věty algebry je:
Je-li $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ polynom a $\alpha_1, \ldots \alpha_m$ (kde $m \leq n$) jsou všechny jeho navzájem různé kořeny s násobnostmi $k_1, \ldots k_m$, pak

$$P(x) = a_n (x - \alpha_1)^{k_1} \cdot \cdots \cdot (x - \alpha_m)^{k_m}.$$

Tento rozklad polynomu P se nazývá *rozklad polynomu v $\mathbb{C}$* nebo také *rozklad polynomu na součin kořenových činitelů.*
Například $P(x) = x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$ je rozklad v $\mathbb{C}$.

iv) Je-li komplexní číslo α k-násobným kořenem reálného polynomu P, je číslo komplexně sdružené $\bar{\alpha}$ rovněž k-násobným kořenem polynomu P.
Pro kořenové činitele příslušné komplexním kořenům $\alpha = c \pm \mathrm{i}d$ platí

$$\begin{aligned}
&\big(x - (c - \mathrm{i}d)\big)^r \big(x - (c + \mathrm{i}d)\big)^r = \\
&\qquad = \Big[\big((x - c) + \mathrm{i}d\big)\big((x - c) - \mathrm{i}d\big)\Big]^r = [(x - c)^2 + d^2]^r.
\end{aligned}$$

v) *Rozklad polynomu v* $\mathbb{R}$.
Je-li $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ polynom, pak podle základní věty algebry můžeme P rozložit v $\mathbb{C}$:

$$P(x) = a_n \underbrace{(x-\alpha_1)^{k_1} \cdot \cdots}_{\text{reálné kořeny}} \underbrace{\cdots \cdot (x-\alpha_m)^{k_m}}_{\text{komplexní kořeny}}.$$

Jsou-li $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ reálné kořeny s násobnostmi $k_1, \dots, k_r$ a $(c_1 \pm i d_1), \dots, (c_s \pm \mathrm{i} d_s)$ navzájem různé dvojice nereálných komplexně sdružených kořenů s násobnostmi $r_1, \dots, r_s$, platí

$$P(x) = a_n (x-\alpha_1)^{k_1} \cdot \cdots \cdot (x-\alpha_r)^{k_r} [(x-c_1)^2 + d_1^2]^{r_1} \cdot \cdots \cdot [(x-c_s)^2 + d_s^2]^{r_s}.$$

Tento rozklad se nazývá *rozklad polynomu v* $\mathbb{R}$.
Poznamenejme, že se někdy kvadratické výrazy $(x-c)^2 + d^2$, kde $d \neq 0$, píší ve tvaru kvadratických trojčlenů $x^2 + px + q$ se záporným diskriminantem, neboť

$$(x-c)^2 + d^2 = x^2 - 2cx + c^2 + d^2 = x^2 + px + q,$$

kde $-2c = p$, $c^2 + d^2 = q$ a $D = p^2 - 4q = 4c^2 - 4c^2 - 4d^2 < 0$.
Například, $P(x) = x^2 + 1$ je rozklad P v $\mathbb{R}$.

vi) *Znaménko polynomu — intervaly, kde je polynom kladný, resp.záporný.*
Z rozkladu polynomu určujeme znaménko hodnot polynomu. Je-li P polynom a jsou-li $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$ všechny jeho navzájem různé reálné kořeny s lichou násobností, pak v každém z intervalů $(-\infty, x_1)$, $(x_1, x_2), \dots, (x_m, \infty)$ je P stále nekladný nebo stále nezáporný. Vybereme-li dva sousední intervaly, pak v jednom z nich jsou hodnoty nekladné a v druhém nezáporné.

vii) Jestliže polynomy P, Q mají stupně nejvýše rovny danému přirozenému číslu n a jestliže existuje $n+1$ navzájem různých komplexních čísel a tak, že $P(a) = Q(a)$, pak jsou polynomy P, Q identické, tj. mají stejné koeficienty, takže rovnost $P(x) = Q(x)$ platí pro každé x.

Příklad 3.5. Rozložte v $\mathbb{R}$ polynom $x^3 + 1$.

Řešení. Můžeme postupovat dvojím způsobem:

1. Rozkladem pomocí známých vzorců, až dostaneme lineární polynomy nebo kvadratické polynomy se záporným diskriminantem. V tomto případě pomocí vzorce pro $a^3 + b^3$ dostaneme $(x^3+1) = (x+1)(x^2 - x + 1)$.
2. Pomocí rozkladu v $\mathbb{C}$, kdy řešíme známým postupem binomickou rovnici $x^3 = -1$. Platí

$$x^3 = \cos(\pi + 2k\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi + 2k\pi),$$
$$x = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Tedy $x_1 = \cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = \cos(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}) = -1$, $x_3 = \cos(\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}) = \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Rozklad polynomu $x^3 + 1$ v $\mathbb{C}$ je

$$(x+1)\Big(x-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)\Big(x-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) = (x+1)\Big[\Big(x-\frac{1}{2}\Big)^2+\frac{3}{4}\Big] = (x+1)(x^2-x+1).$$

▲

Příklad 3.6. Rozložte v $\mathbb{R}$ následující polynomy:

a) $P(x) = x^4 + 1$, b) $P(x) = x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1$.

Řešení. a) Upravíme a použijeme vzorec $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$:

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 + 1 + 2x^2 - 2x^2 = (x^2+1)^2 - 2x^2 = \\ &= (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1), \end{aligned}$$

což je hledaný rozklad, protože oba kvadratické trojčleny mají záporný diskriminant $D = -2$.

b) Potřebujeme rozložit daný mnohočlen na součin. S použitím vzorce $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ lze postupovat např. takto:

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3(x^2+x+1) - (x^2+x+1) = (x^2+x+1)(x^3-1) = \\ &= (x^2+x+1)(x-1)(x^2+x+1) = (x-1)(x^2+x+1)^2. \end{aligned}$$

Kvadratický trojčlen $x^2 + x + 1$ má záporný diskriminant. Proto rozklad v $\mathbb{R}$ je

$$P(x) = (x-1)(x^2+x+1)^2.$$

▲

Příklad 3.7. Proveďte rozklad v $\mathbb{R}$ polynomu

$$P(x) = x^4 - 15x^3 + 83x^2 - 359x + 290.$$

Řešení. Pokusíme se najít celočíselný kořen. Z algebry — viz [11] — je známo, že celočíselný kořen mnohočlenu s celočíselnými koeficienty musí být dělitelem absolutního členu. Provedeme rozklad čísla 290 na součin prvočísel: $290 = 1\cdot 2\cdot 5\cdot 29$. Kandidáty na celočíselné kořeny jsou čísla

$$\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10, \pm 29, \pm 58, \pm 145, \pm 290.$$

Počítejme Hornerovým schématem (viz [11]): budeme postupně zkoušet všechna tato čísla. (Kořen může být vícenásobný; v tomto případě počítáme s koeficienty nového polynomu).

	1	-15	83	-359	290	
1	1	-14	69	-290	0	$x = 1$ je kořen
1	1	-13	56	-234		$x = 1$ je pouze jednoduchý kořen
$\vdots$			$\vdots$			
10	1	-4	29	0		další kořen je $x = 10$

Kvadratický trojčlen $x^2 - 4x + 29$ je již dále nerozložitelný (jeho diskriminant $D = 16 - 4 \cdot 29 < 0$). Rozklad daného polynomu v $\mathbb{R}$ je

$$P(x) = (x - 1)(x - 10)(x^2 - 4x + 29). \qquad \blacktriangle$$

Příklad 3.8. Nalezněte polynom nejnižšího stupně s reálnými koeficienty, který má kořen $x = 1 + \mathrm{i}$ a dvojnásobný kořen $x = 2$.

Řešení. Pro polynom s reálnými koeficienty platí, že je-li komplexní číslo z jeho kořenem, je i číslo k němu komplexně sdružené $\bar{z}$ kořenem. V našem případě proto hledáme polynom P s kořeny $1 + \mathrm{i}$, $1 - \mathrm{i}$ a dvojnásobným kořenem 2. Tedy

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - 1 - \mathrm{i})(x - 1 + \mathrm{i})(x - 2)^2 = \\ &= (x^2 - 2x + 2)(x^2 - 4x + 4) = x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 16x + 8. \end{aligned} \qquad \blacktriangle$$

3.2. Racionální funkce

Definice 3.9. Buďte P, Q nenulové polynomy. Funkce

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

se nazývá *racionální funkce* (též racionální lomená funkce). Tuto funkci dále nazveme *ryze lomenou*, platí-li $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$, a *neryze lomenou*, platí-li $\operatorname{st} P \geq \operatorname{st} Q$.

Příkladem ryze lomené racionální funkce jsou funkce $\frac{1}{x}$, $\frac{x^2+1}{x^5}$; příkladem neryze lomené racionální funkce jsou funkce $\frac{ax+b}{cx+d}$, kde $a \neq 0$, $\frac{x^2+1}{x}$ nebo $\frac{x^2+2}{2x^2-1}$.

Platí následující tvrzení:

i) Definičním oborem racionální funkce $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ je množina tvaru $D(R) = (-\infty, \infty) \smallsetminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, kde $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ jsou všechny reálné kořeny polynomu Q.

ii) Je-li $\frac{P(x)}{Q(x)}$ neryze lomená racionální funkce, pak dělením polynomů P a Q obdržíme součet polynomu a ryze lomené racionální funkce. Například:

$$\frac{x^3+2x}{x^2+2x+1} = x-1+\frac{2x-1}{x^2+x+1}\,.$$

iii) *Znaménko racionální funkce.* Buď R racionální funkce, jejíž čitatel a jmenovatel nemají společné kořeny. Buďte $x_1 < \cdots < x_p$ všechny navzájem různé reálné kořeny čitatele a jmenovatele s lichou násobností. Pak v každém z intervalů $(-\infty, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_p, \infty)$ jsou všechny hodnoty R stále nezáporné nebo nekladné (ve všech bodech, v nichž je R definovaná). V sousedních intervalech se střídají znaménka.

Příklad 3.10. Určete všechny maximální intervaly, na kterých mají hodnoty R stejné znaménko.

$$R(x) = \frac{(x-2)^2(x+1)(x^2-9)(x-1)^4}{(x^2+1)\,x^5}\,.$$

Řešení. Reálné kořeny čitatele s lichou násobností jsou čísla -3, -1 a 3; reálným kořenem jmenovatele s lichou násobností je číslo 0. Pro $x > 3$ je zřejmě $R(x) > 0$, v dalších intervalech se znaménko funkce R pravidelně střídá. Znaménko této funkce je uvedeno v následující tabulce:

x	$(-\infty,-3)$	$(-3,-1)$	$(-1,0)$	$(0,3)$	$(3,\infty)$
$R(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

▲

Následující věta má zásadní význam pro integraci racionálních funkcí. Její důkaz lze nalézt např. v [10, 14].

Věta 3.11 (Věta o rozkladu racionální funkce na parciální zlomky). *Buď $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ryze lomená racionální funkce, nechť polynomy P, Q nemají společné kořeny a buď*

$$Q(x) = a_n(x-\alpha)^k \cdot \cdots \cdot (x-\lambda)^r[(x-a)^2+b^2]^s \cdot \cdots \cdot [(x-p)^2+q^2]^v$$

rozklad jmenovatele v $\mathbb{R}$. Pak existuje n reálných čísel $A_1, \ldots A_k, \ldots, L_1, \ldots, L_r, M_1, N_1, \ldots, M_s, N_s, \ldots, U_1, V_1, \ldots, U_v, V_v$ takových, že pro každé $x \in \mathbb{R}$, pro něž $Q(x) \neq 0$, platí

$$\begin{aligned} R(x) = \Bigg[&\frac{A_k}{(x-\alpha)^k} + \cdots + \frac{A_1}{x-\alpha} + \cdots + \frac{L_r}{(x-\lambda)^r} + \cdots + \frac{L_1}{x-\lambda} + \\ &+ \frac{M_s x + N_s}{[(x-a)^2+b^2]^s} + \cdots + \frac{M_1 x + N_1}{[(x-a)^2+b^2]} + \\ &+ \cdots + \frac{U_v x + V_v}{[(x-p)^2+q^2]^v} + \cdots + \frac{U_1 x + V_1}{(x-p)^2+q^2} \Bigg]. \end{aligned}$$

Sčítance rozkladu z předchozí věty nazýváme *parciální zlomky*.

Poznámka 3.12. Konstanty v parciálních zlomcích (lze ukázat, že jsou určeny jednoznačně) nalezneme metodou neurčitých koeficientů, tj. napíšeme formální tvar rozkladu a celou rovnost vynásobíme polynomem Q. Dostaneme tak rovnost dvou polynomů pro všechna x kromě kořenů jmenovatele. Tyto polynomy jsou proto identické, tj. mají stejné koeficienty, které určíme pomocí dvou možných způsobů:

1. porovnáním koeficientů u odpovídajících si mocnin,
2. dosazením konkrétních hodnot x (vhodné jsou zvláště kořeny jmenovatele Q).

Získáme soustavu n lineárních rovnic pro n neznámých konstant, kterou vyřešíme.

Algoritmus rozkladu racionální funkce:

Neryze lomená racionální funkce — vydělíme čitatele a jmenovatele a tím získáme polynom a ryze lomenou racionální funkci, kterou rozložíme následovně:

Ryze lomená racionální funkce — rozložíme jmenovatele v $\mathbb{R}$, napíšeme si formální tvar rozkladu na parciální zlomky a určíme konstanty.

Příklad 3.13. Rozložte na parciální zlomky racionální funkci

a) $R(x) = \dfrac{12x + 7}{x^2 - 9x + 18}$, b) $R(x) = \dfrac{1}{x^3(x + 1)}$.

Řešení. a) Nejprve rozložíme jmenovatele

$$x^2 - 9x + 18 = (x - 6)(x - 3).$$

Podle věty 3.11 je formální tvar parciálních zlomků

$$\frac{12x + 7}{x^2 + 9x + 18} = \frac{A}{x - 6} + \frac{B}{x - 3}.$$

Po vynásobení této rovnosti jmenovatelem dostáváme

$$12x + 7 = A(x - 3) + B(x - 6) = x(A + B) - 3A - 6B.$$

Porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 12 &= A + B, \\ 7 &= -3A - 6B, \end{aligned}$$

která má za řešení $A = \frac{79}{3}$, $B = -\frac{43}{3}$. Rozklad funkce je

$$R(x) = \frac{79}{3(x - 6)} - \frac{43}{3(x - 3)}.$$

b) Podle věty 3.11 je rozklad tvaru

$$\frac{1}{x^3(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x+1},$$

odkud

$$1 = Ax^2(x+1) + Bx(x+1) + C(x+1) + Dx^3.$$

Pro určení koeficientů kombinujeme obě metody. Dosazením za $x = 0$ a $x = -1$ dostáváme $C = 1,\ D = -1$ a porovnáním koeficientů u mocnin x^3 a x^2

$$A + D = 0,\ A + B = 0,\ \text{tj. } A = 1, B = -1.$$

Hledaný rozklad je

$$R(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x+1}.$$

▲

Příklad 3.14. Rozložte na parciální zlomky funkci

a) $R(x) = \dfrac{x^2 - x + 10}{(x^2 - 3x + 10)^2}$, b) $R(x) = \dfrac{x+1}{x^5 + 3x^3 + 2x}$.

Řešení. a) Kvadratický trojčlen ve jmenovateli má diskriminant záporný, takže jej nelze rozložit v $\mathbb{R}$. Formální rozklad na parciální zlomky je tvaru

$$\frac{x^2 - x + 10}{(x^2 - 3x + 10)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 - 3x + 10} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 3x + 10)^2}.$$

Po vynásobení polynomem $(x^2 + 3x + 10)^2$ dostaneme

$$\begin{aligned} x^2 - x + 10 &= (Ax + B)(x^2 - 3x + 10) + Cx + D \\ &= Ax^3 + x^2(B - 3A) + x(10A - 3B + C) + 10B + D. \end{aligned}$$

Porovnáme koeficienty u jednotlivých mocnin x a dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} x^3: &\qquad 0 = A, \\ x^2: &\qquad 1 = B - 3A, \\ x^1: &\qquad -1 = 10A - 3B + C, \\ x^0: &\qquad 10 = 10B + D, \end{aligned}$$

která má za řešení $A = 0$, $B = 1$, $C = 2$, $D = 0$. Hledaný rozklad je

$$R(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 10} + \frac{2x}{(x^2 - 3x + 10)^2}.$$

b) Podle věty 3.11 platí

$$R(x) = \frac{x+1}{x(x^2+2)(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2} + \frac{Dx+E}{x^2+1}.$$

Vynásobíme tuto rovnost polynomem Q ve jmenovateli a po úpravě dostáváme

$$\begin{aligned} x+1 &= A(x^2+2)(x^2+1) + (Bx+C)x(x^2+1) + (Dx+E)x(x^2+2) = \\ &= A(x^4+3x^2+2) + (Bx+C)(x^3+x) + (Dx+E)(x^3+2x) = \\ &= x^4(A+B+C) + x^3(C+E) + x^2(3A+B+2D) + x(C+2E) + 2A. \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin x dostáváme 5 rovnic pro 5 neznámých:

$$\begin{aligned} x^4: &\qquad & A+B+C &= 0, \\ x^3: &\qquad & C+E &= 0, \\ x^2: &\qquad & 3A+B+2D &= 0, \\ x^1: &\qquad & C+2E &= 1, \\ x^0: &\qquad & 2A &= 1. \end{aligned}$$

Řešení této soustavy je $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = -1$, $D = -1$, $E = 1$. Výsledný rozklad je

$$R(x) = \frac{1}{2x} + \frac{x-2}{2(x^2+2)} + \frac{-x+1}{x^2+1}.$$

▲

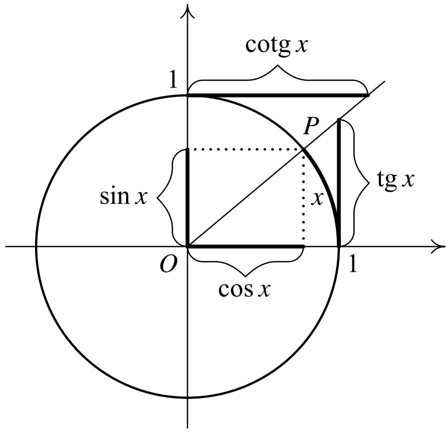
3.3. Goniometrické a cyklometrické funkce

Definice 3.15. Buď $x \in \mathbb{R}$. Nechť P je koncový bod oblouku na jednotkové kružnici, jehož počáteční bod je $[1, 0]$ a jehož délka je $|x|$; přitom oblouk je od bodu $[1, 0]$ k bodu P orientován v protisměru resp. ve směru chodu hodinových ručiček podle toho, zda $x \geq 0$ resp. $x < 0$. Pak první souřadnici bodu P nazýváme $\cos x$ a druhou souřadnici $\sin x$. Dále definujme

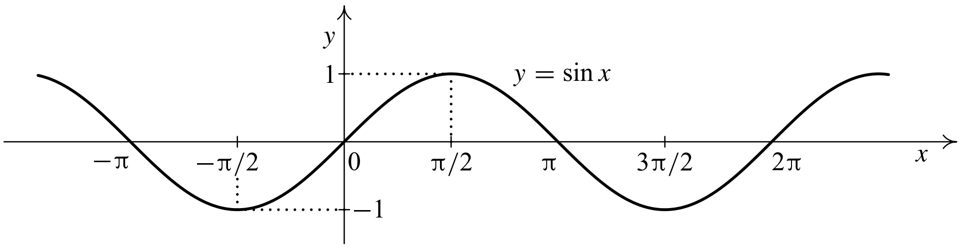
$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Funkce $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ nazýváme funkce *goniometrické*.

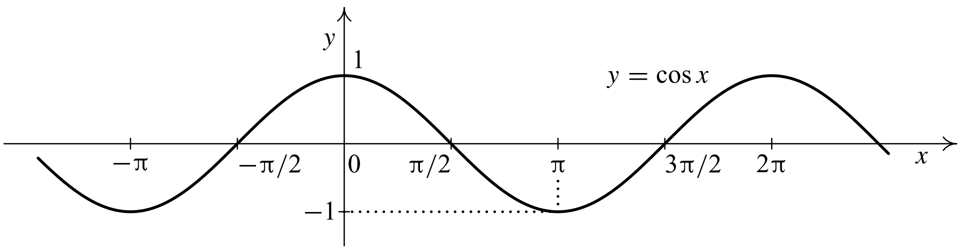
Geometrický význam této definice je znázorněn na obr. 3.1, grafy goniometrických funkcí na obr. 3.2 a 3.3.



Obr. 3.1: Definice goniometrických funkcí

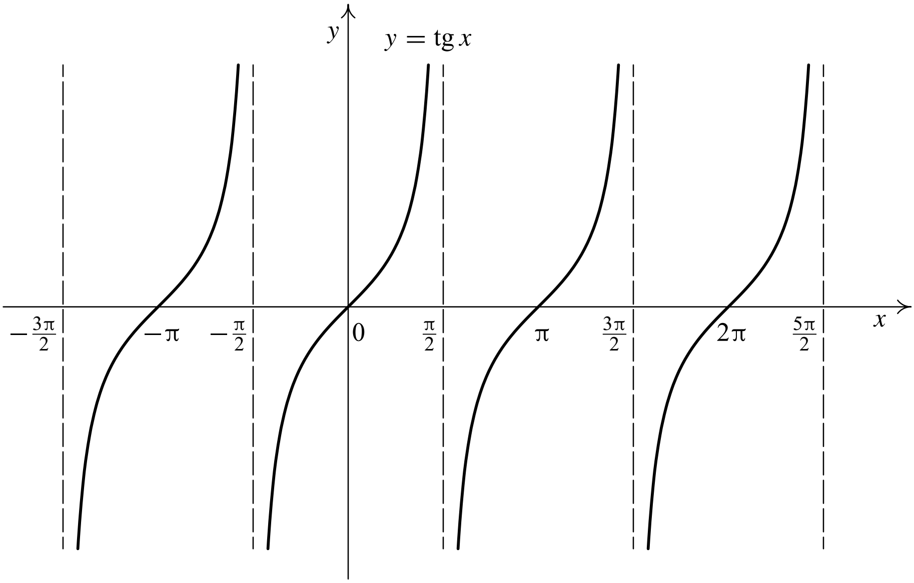


a) Graf funkce sinus: $D(\sin) = \mathbb{R}$, $H(\sin) = [-1, 1]$

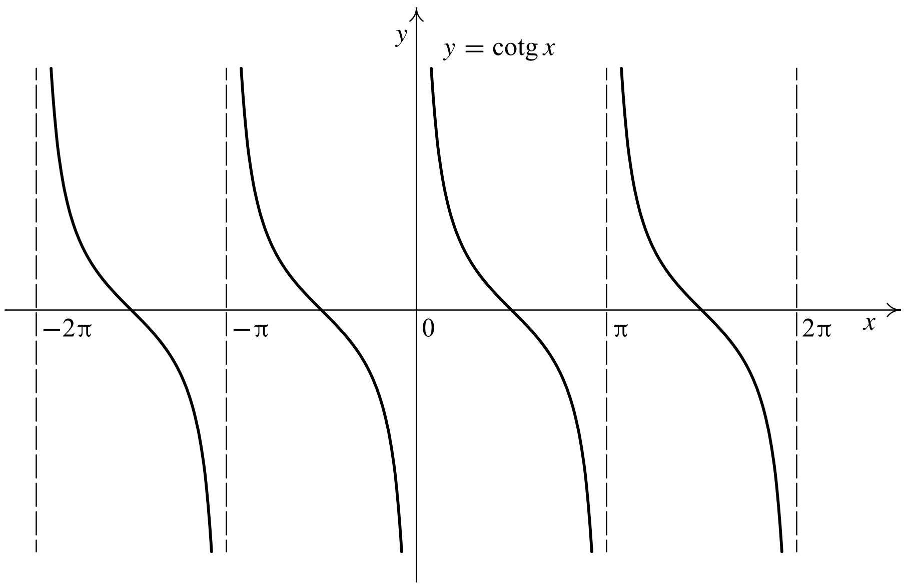


b) Graf funkce kosinus: $D(\cos) = \mathbb{R}$, $H(\cos) = [-1, 1]$

Obr. 3.2: Grafy goniometrických funkcí



a) Graf funkce tangens: $D(\mathrm{tg}) = \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, $H(\mathrm{tg}) = \mathbb{R}$



b) Graf funkce kotangens: $D(\mathrm{cotg}) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, $H(\mathrm{cotg}) = \mathbb{R}$

Obr. 3.3: Grafy goniometrických funkcí

Poznámka 3.16. *Vlastnosti goniometrických funkcí.*
Funkce sin, tg a cotg jsou liché, funkce cos je sudá. Všechny goniometrické funkce jsou periodické, a to funkce sin a cos s nejmenší periodou 2π, funkce tg a cotg s nejmenší periodou π.

Vztahy mezi goniometrickými funkcemi:

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$
$$\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \operatorname{cotg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \qquad \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1,$$
$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x,$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x,$$
$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y,$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y,$$
$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y},$$
$$\operatorname{cotg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} y \mp 1}{\operatorname{cotg} y \pm \operatorname{cotg} x},$$
$$\sin x + \sin y = 2 \sin\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2},$$
$$\sin x - \sin y = 2 \cos\frac{x+y}{2} \cdot \sin\frac{x-y}{2},$$
$$\cos x + \cos y = 2 \cos\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2},$$
$$\cos x - \cos y = -2 \sin\frac{x+y}{2} \cdot \sin\frac{x-y}{2},$$
$$\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y},$$
$$\operatorname{cotg} x \pm \operatorname{cotg} y = \frac{\sin(y \pm x)}{\sin x \sin y}.$$

Nabízí se otázka, zda existují inverzní funkce k funkcím goniometrickým. Protože inverzní funkce existuje pouze k prosté funkci, můžeme inverzní funkce k funkcím goniometrickým definovat jenom v těch intervalech definičních oborů goniometrických funkcí, kde jsou tyto funkce ryze monotonní, a tedy prosté. Výběr intervalů se provádí takto:

funkce f	$D(f)$	$H(f)$	inverzní funkce	čte se
sin	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$[-1, 1]$	arcsin	arkussinus
cos	$[0, \pi]$	$[-1, 1]$	arccos	arkuskosinus
tg	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$(-\infty, \infty)$	arctg	arkustangens
cotg	$(0, \pi)$	$(-\infty, \infty)$	arccotg	arkuskotangens

Odtud plyne následující definice.

Definice 3.17. Inverzní funkce k funkci sin definované na intervalu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ se značí arcsin.
Inverzní funkce k funkci cos definované na intervalu $[0, \pi]$ se značí arccos.
Inverzní funkce k funkci tg definované na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ se značí arctg.
Inverzní funkce k funkci cotg definované na intervalu $(0, \pi)$ se značí arccotg.
Funkce arcsin, arccos, arctg a arccotg nazýváme *cyklometrické funkce*.

Grafy jsou znázorněny na obr. 3.4.

Věta 3.18. *Cyklometrické funkce mají následující vlastnosti:*

1. *Funkce* arcsin *a* arctg *jsou rostoucí, funkce* arccos *a* arccotg *jsou klesající.*
2. *Funkce* arcsin *a* arctg *jsou liché.*

Důkaz. Tvrzení 1 je zřejmé — plyne z věty 1.46 o inverzní funkci k funkci ryze monotonní. Stačí dokázat tvrzení 2. Nechť $x \in [-1, 1]$ a označme $y = \arcsin x$. Pak $\sin y = x$. Platí $y \in [-\pi/2, \pi/2]$, a proto rovněž $-y \in [-\pi/2, \pi/2]$. Protože funkce $\sin x$ je lichá, platí $-x = -\sin y = \sin(-y)$, a tudíž $-y = \arcsin(-x) = -\arcsin x$ a tvrzení je dokázáno. Podobně pro $\operatorname{arctg} x$. □

Příklad 3.19. Dokažte, že pro každé $x \in [-1, 1]$ platí

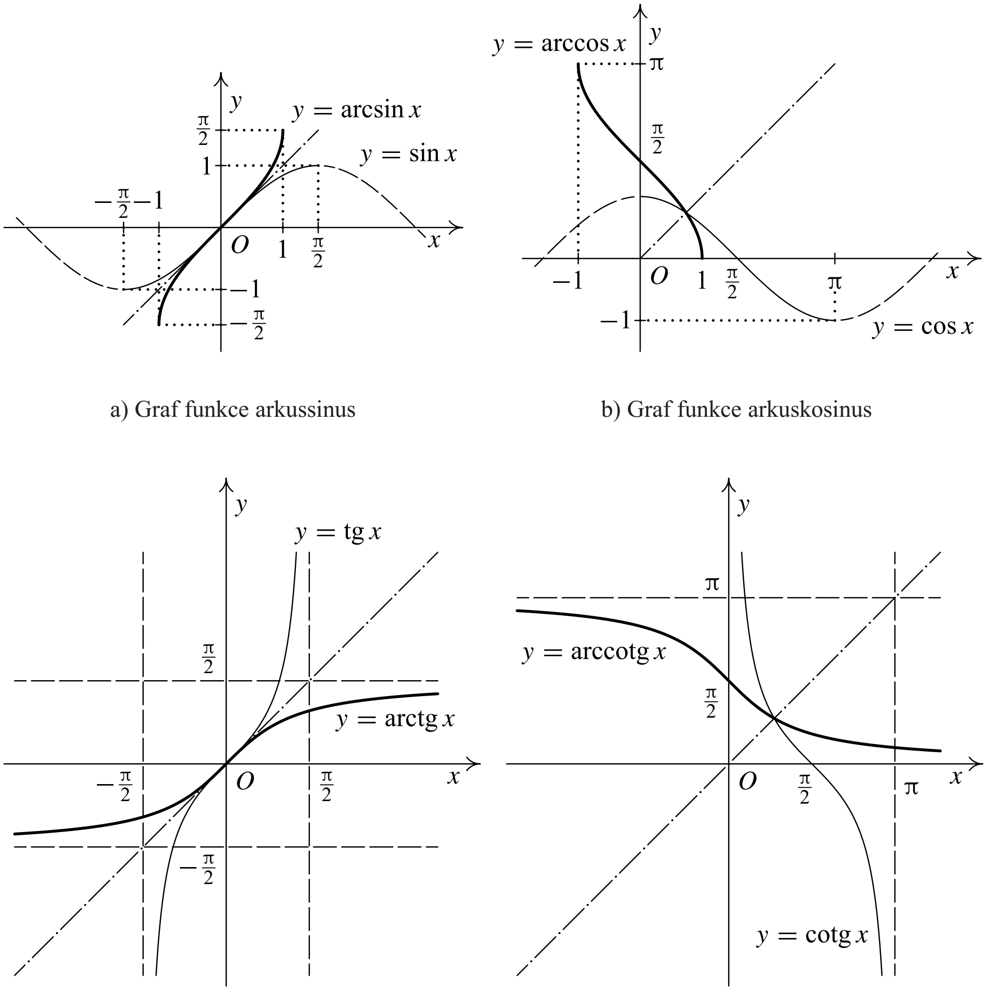
$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

a pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}\,.$$

Řešení. Obě tvrzení se odvodí ze vztahů mezi funkcemi goniometrickými. Nechť $x \in [-1, 1]$ a označme $\arcsin x = y$. Podle definice $y \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ a $\sin y = x$. Ze vztahu mezi $\sin x$ a $\cos x$ plyne

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \sin y = x,$$



a) Graf funkce arkussinus

b) Graf funkce arkuskosinus

c) Graf funkce arkustangens

d) Graf funkce arkuskotangens

Obr. 3.4: Grafy cyklometrických funkcí

přičemž $\frac{\pi}{2} - y \in [0, \pi]$. Z definice funkce $\arccos x$ dostáváme $\frac{\pi}{2} - y = \arccos x$, odkud

$$\arccos x + \arcsin x = y + \frac{\pi}{2} - y = \frac{\pi}{2}.$$

Druhé tvrzení se dokáže analogicky ze vztahu $\operatorname{cotg}(\frac{\pi}{2} - y) = \operatorname{tg} y$. ▲

Poznámka 3.20. Vzhledem k definici inverzní funkce platí:

$$\begin{aligned} &\arcsin(\sin x) = x && \text{pro } x \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right], && \arccos(\cos x) = x && \text{pro } x \in [0, \pi],\\ &\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x && \text{pro } x \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right), && \operatorname{arccotg}(\operatorname{cotg} x) = x && \text{pro } x \in (0, \pi). \end{aligned}$$

Mimo uvedené intervaly ale rovnosti neplatí — viz následující příklad a cvičení 9.

Příklad 3.21. Nakreslete graf funkce $f(x) = \arcsin(\sin x)$.

Řešení. Zřejmě $D_f = (-\infty, +\infty)$. Funkce $\arcsin y$ se zavádí jako funkce inverzní k funkci $\sin x$, což svádí k napsání rovnosti $\arcsin(\sin x) = x$. Toto je zásadní chyba, neboť je třeba si uvědomit, že funkci $\arcsin y$ definujeme jako inverzní funkci k funkci $\sin x$ uvažované pouze na intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$. Proto platí $\arcsin(\sin x) = x$ pouze pro $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

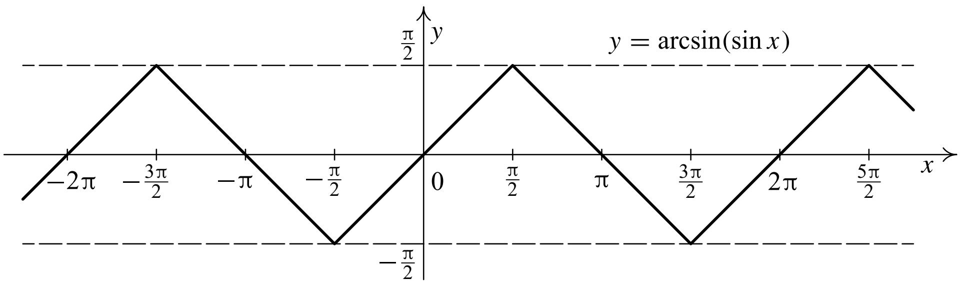
Pro detailní rozbor funkce $\arcsin(\sin x)$ je dobré si povšimnout, že tato funkce je periodická s periodou 2π (díky tomu, že má tuto vlastnost funkce $\sin x$). Stačí proto uvažovat danou funkci na intervalu délky 2π. Vyberme interval $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Na intervalu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, jak již bylo řečeno, je

$$\arcsin(\sin x) = x.$$

Na intervalu $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ je

$$\begin{aligned} \arcsin(\sin x) &= \arcsin\bigl(\sin\bigl((x-\pi)+\pi\bigr)\bigr) = \\ &= \arcsin\bigl(-\sin(x-\pi)\bigr) = -\arcsin\bigl(\sin(x-\pi)\bigr) = \\ &= -(x-\pi) = \pi - x, \end{aligned}$$

neboť $x - \pi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Pro nakreslení grafu funkce $\arcsin(\sin x)$ využijeme periodičnosti, viz obr. 3.5. ▲



Obr. 3.5: Graf funkce $y = \arcsin(\sin x)$

3.4. Exponenciální a logaritmické funkce

Zavedení těchto funkcí je poměrně obtížné, protože nelze aritmetickými operacemi zavést mocniny s iracionálním exponentem. Je možné postupovat dvěma způsoby: definovat nejprve funkci logaritmickou jako primitivní funkci k funkci $\frac{1}{x}$, a pak pomocí funkce k ní inverzní zavést funkci exponenciální, nebo definovat nejprve funkci exponenciální a přes inverzi funkci logaritmickou. Protože první postup vyžaduje znalosti základů integrálního počtu, z názorných důvodů zvolíme druhý postup — zavedeme nejprve funkci exponenciální.

Ze střední školy je známo, jak definujeme mocninu a^c, kde $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $c \in \mathbb{Q}$:

1. Pro $c \in \mathbb{N}$ je $a^c = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{c\text{-krát}}$ (může být i $a \leq 0$), pro $c = 0$ je $a^0 = 1$,
2. pro $c = -n$, kde $n \in \mathbb{N}$, je $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (může být i $a < 0$),
3. pro $c = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, kde $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, je $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ (pro $m > 0$ může být i $a = 0$).

(Připomeňme, že existence odmocniny byla dokázána v lemmatu 1.14 a rovněž bylo upozorněno na korektnost definice pro racionální exponent.)

Nyní již můžeme přistoupit k definici mocniny a^c pro libovolné kladné reálné a a libovolné reálné c.

Definice 3.22. Buď $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ a $c \in \mathbb{R}$. Pro $a > 1$ definujme

$$a^c = \sup\{a^x : x \in \mathbb{Q}, x \leq c\}.$$

Pro $a = 1$ položme $a^c = 1^c = 1$ a pro $0 < a < 1$ definujme $a^c = \left(\frac{1}{a}\right)^{-c}$.

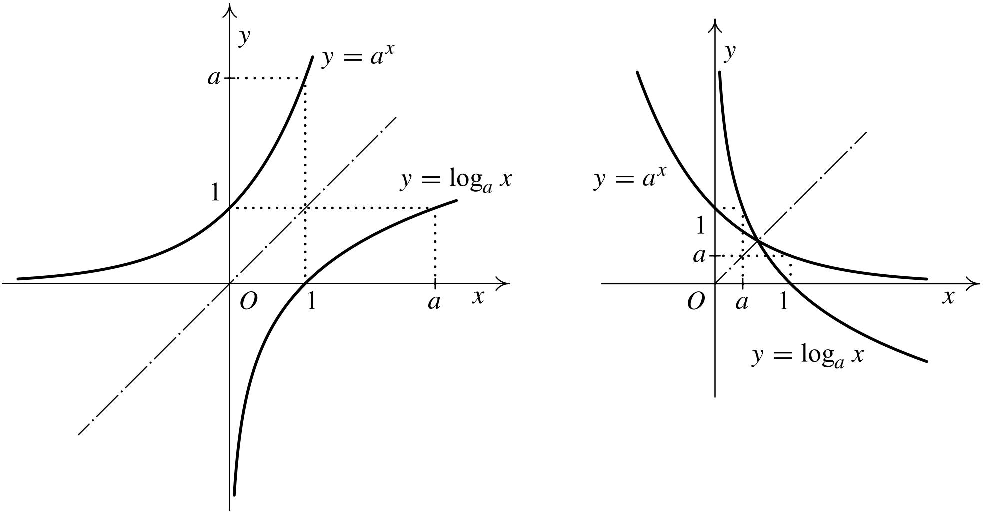
Snadno se ověří, že pro $c \in \mathbb{Q}$ je tato nová definice ve shodě s původní. Rovněž je možné dokázat pravidla pro počítání s mocninami, známá pro racionální exponenty. Zejména platí ($a, b, r, s \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$)

$$a^{r+s} = a^r \cdot a^s, \quad a^{r-s} = \frac{a^r}{a^s}, \quad (ab)^r = a^r \cdot b^r, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{a^s}, \quad (a^r)^s = a^{rs}.$$

Důkazy viz [17, str. 45], kde lze nalézt i důkazy vět 3.24 a 3.26.

Definice 3.23. Buď $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Funkci f určenou předpisem $f(x) = a^x$ nazveme *exponenciální funkcí o základu a*.

Největší význam z exponenciálních funkcí má funkce o základu e (Eulerovo číslo — viz definice 2.27), tj. funkce $y = \mathrm{e}^x$.



a) $a > 1$ b) $0 < a < 1$

Obr. 3.6: Grafy logaritmické a exponenciální funkce

Věta 3.24. *Exponenciální funkce* $f(x) = a^x$ *má tyto vlastnosti:*

1. $D(f) = (-\infty, +\infty)$ *a* $H(f) = (0, +\infty)$ *pro* $a \neq 1$, $H(f) = \{1\}$ *pro* $a = 1$.
2. *Funkce* f *je rostoucí v* $\mathbb{R}$ *pro* $a > 1$, *klesající v* $\mathbb{R}$ *pro* $a < 1$ *(viz obr. 3.6) a konstantní v* $\mathbb{R}$ *pro* $a = 1$.

Definice 3.25. Buď $a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$. Funkce inverzní k funkci $y = a^x$ se nazývá *logaritmická funkce o základu a*, značí se $y = \log_a x$.

Z věty 3.24 vyplývá, že pro $a \neq 1$ je exponenciální funkce a^x ryze monotonní, takže inverzní funkce skutečně existuje. Grafy jsou znázorněny na obr. 3.6

Je-li $a = \mathrm{e}$, nazývá se logaritmická funkce $\log_{\mathrm{e}} x$ *přirozený logaritmus* a značí se $y = \ln x$.

Je-li $a = 10$, nazývá se logaritmická funkce $\log_{10} x$ *dekadický logaritmus* a značí se $y = \log x$.

Věta 3.26. *Logaritmická funkce* $f(x) = \log_a x$ *má tyto vlastnosti:*

1. $D(f) = (0, +\infty)$, $H(f) = (-\infty, +\infty)$.
2. *Funkce* f *je rostoucí na* $(0, +\infty)$ *pro* $a > 1$ *a klesající na* $(0, +\infty)$ *pro* $a < 1$.

3. *Pro* $x, y \in (0, +\infty)$ *a* $z \in \mathbb{R}$ *platí*

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y, \quad \log_a x^z = z \log_a x.$$

4. *Pro* $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$ *a* $x \in (0, +\infty)$ *platí*

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Poznámka 3.27. Z definice logaritmu a jeho vlastností uvedených ve větě 3.26 plyne:

i) Platí

$$\log_a a = 1, \qquad \log_a \frac{1}{a} = -1, \qquad \log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x.$$

Proto jsou grafy funkcí $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ a $y = \log_a x$ souměrné podle osy x.

ii) Pro $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$ platí

$$\log_a a^x = x \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}, \qquad a^{\log_a x} = x \quad \text{pro } x > 0.$$

3.5. Mocninná funkce

Definice 3.22 nám dovoluje zavést funkci x^s pro libovolné reálné číslo s.

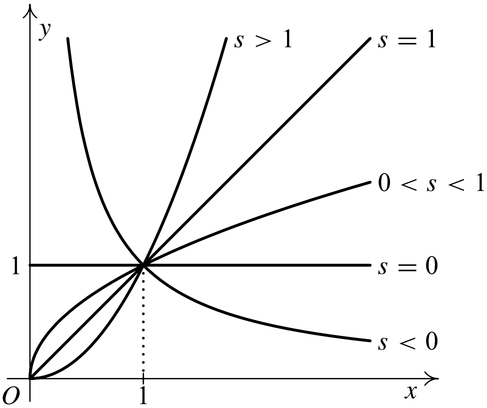
Definice 3.28. Buď $s \in \mathbb{R}$. Pro $x > 0$ definujeme funkci $y = x^s$ a nazýváme ji *mocninnou funkcí*.

Věta 3.29. *Mocninná funkce* $f(x) = x^s$ *má tyto vlastnosti:*

1. $D(f) = (0, +\infty)$ *a* $H(f) = (0, +\infty)$ *pro* $s \neq 0$, $H(f) = \{1\}$ *pro* $s = 0$.
2. *Funkce* f *je rostoucí na* $(0, +\infty)$ *pro* $s > 0$, *klesající na* $(0, +\infty)$ *pro* $s < 0$ *a konstantní na* $(0, +\infty)$ *pro* $s = 0$ — *viz obr.* 3.7.
3. *Platí* $f(x) = x^s = \left(\mathrm{e}^{\ln x}\right)^s = \mathrm{e}^{s \ln x}$ *pro* $x \in (0, +\infty)$.

Poznámka 3.30. V některých speciálních případech lze definiční obor $(0, +\infty)$ funkce $f(x) = x^s$ ještě rozšířit.

1. Je-li $s \in \mathbb{N}$, je $D(f) = \mathbb{R}$ (např. x^2, x^5) — viz obr. 3.8 a) a 3.8 c).
2. Je-li $s \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, je $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (např. x^{-1}, x^{-2} — viz obr. 3.9 — nebo x^0).
3. Je-li $s \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, kde $s = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, je $D(f) \supseteq [0, +\infty)$ (např. $x^{1/2}, x^{1/3}, x^{2/6}$). Viz též dále bod 5.
4. Funkci $\sqrt[n]{x}$, kde $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, chápeme jako inverzní funkci k mocnině x^n.
   a) V případě, že n je sudé, není funkce x^n prostá na $\mathbb{R}$, ale je prostá na intervalu $[0, +\infty)$. Tedy pro sudé n je funkce $\sqrt[n]{x}$ definovaná jen pro $x \geq 0$.



Obr. 3.7: Graf funkce $y = x^s$, $s \in \mathbb{R}$, $x > 0$

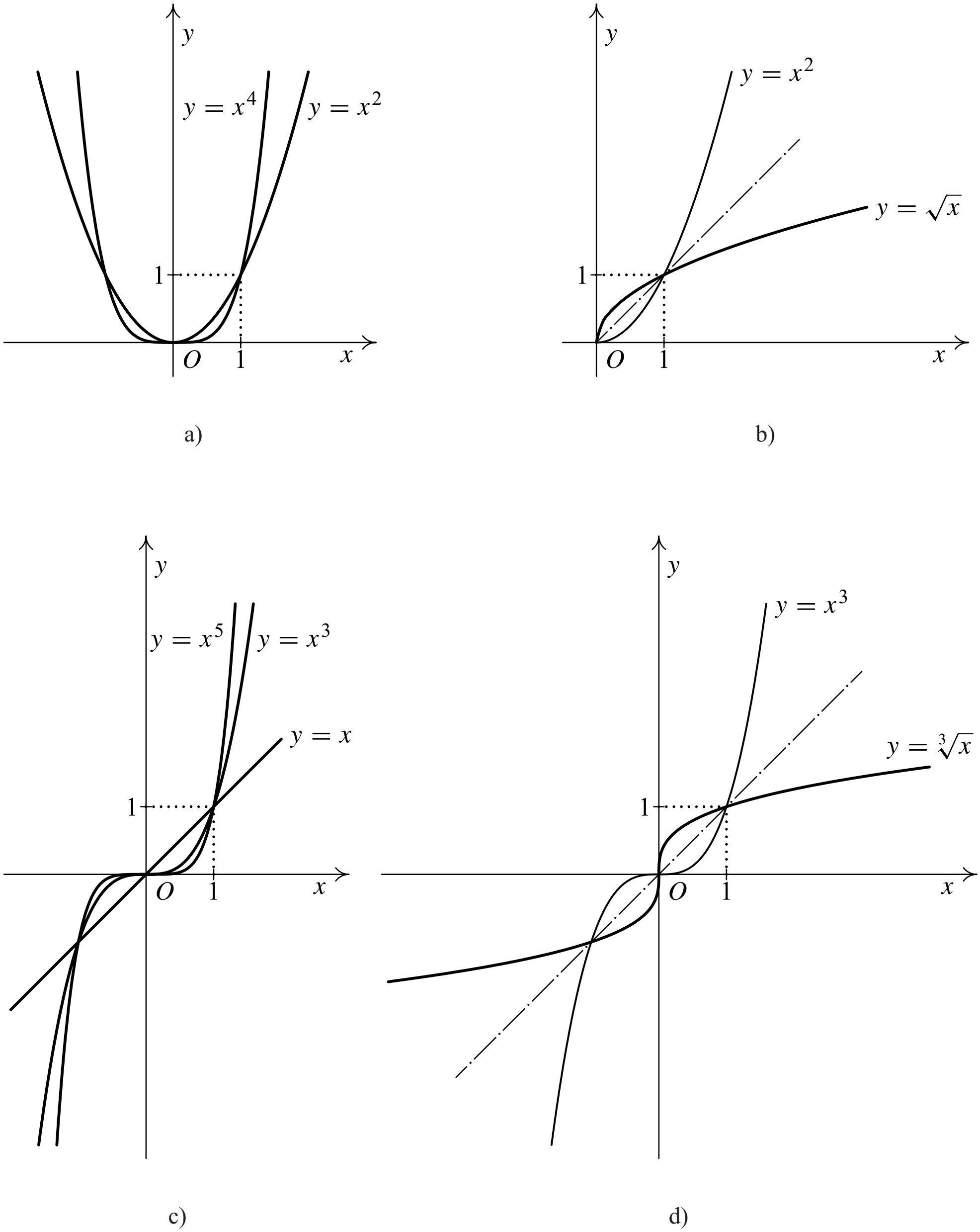
b) V případě, že n je liché, je funkce x^n prostá na $\mathbb{R}$. Tedy pro liché n je funkce $\sqrt[n]{x}$ definovaná pro libovolné $x \in \mathbb{R}$.

Funkce $\sqrt[n]{x^m}$, kde $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, je pak složenou funkcí s vnitřní složkou $z = x^m$ a s vnější složkou $y = \sqrt[n]{z}$. Její definiční obor závisí na konkrétních číslech m a n.

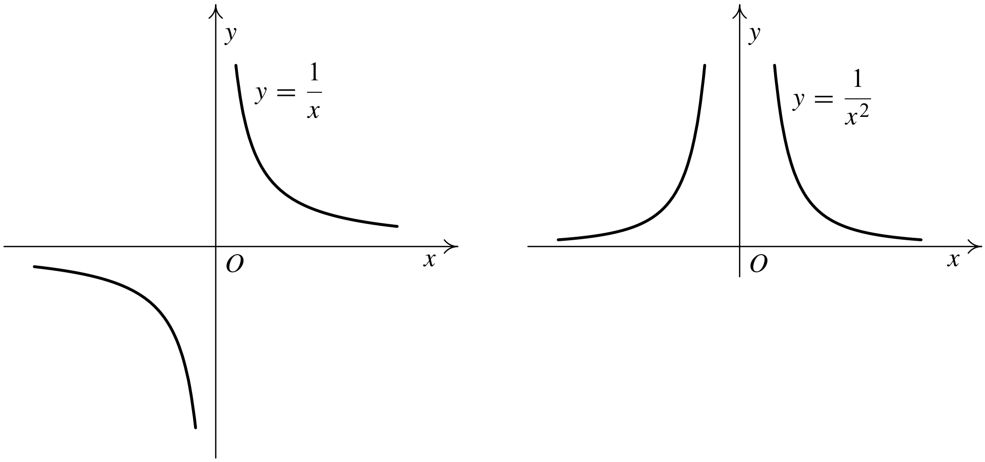
5. Obecně, je-li $s \in \mathbb{Q}$, definujeme x^s, kde $x < 0$, právě když *v základním tvaru* $\frac{m}{n}$ čísla s (tj. $s = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ a čísla m a n jsou *nesoudělná*) je číslo n *liché*. Pak klademe $x^s = \sqrt[n]{x^m}$ (symbolem $\sqrt[1]{a}$ rozumíme a). Tedy $(-8)^{2/6} = (-8)^{1/3} = \sqrt[3]{-8} = -2$, zatímco $(-4)^{2/4}$ není definované, protože základní tvar zlomku $\frac{2}{4}$ je $\frac{1}{2}$ a číslo 2 ve jmenovateli je sudé. Tato obecná definice je ve shodě s body 1 a 2.
Např. funkce $x^{1/3} = x^{2/6} = \sqrt[3]{x}$ je definovaná pro $x \in \mathbb{R}$ (viz obr. 3.8 d)), kdežto funkce $x^{1/2} = x^{2/4} = \sqrt{x}$ je definovaná jen pro $x \geq 0$ (viz obr. 3.8 b)).
6. Dále si všimněme vztahu mezi funkcemi $x^{m/n}$ a $\sqrt[n]{x^m}$, kde $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ a $\frac{m}{n} \notin \mathbb{Z}$.

   a) Složená funkce $\sqrt[3]{x^2}$ je definovaná pro $x \in \mathbb{R}$ a platí $\sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{|x|^2} = |x|^{2/3} = x^{2/3}$ pro $x \in \mathbb{R}$.
   b) Složená funkce $\sqrt[6]{x^2}$ je definovaná pro $x \in \mathbb{R}$ a platí $\sqrt[6]{x^2} = \sqrt[6]{|x|^2} = |x|^{1/3}$ pro $x \in \mathbb{R}$. Tedy pro $x < 0$ je $\sqrt[6]{x^2} = |x|^{1/3} \neq x^{1/3}$.
   c) Podobně musíme přistupovat k funkcím $x^{m/n}$ a $\sqrt[n]{x^m}$, kde $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ a $\frac{m}{n} \in \mathbb{Z}$. Např. funkce $x^{2/2} = x$ pro $x \in \mathbb{R}$ (podle bodu 1 resp. 5), zatímco složená funkce $\sqrt{x^2} = |x|$ pro $x \in \mathbb{R}$, jde tedy o dvě různé funkce se stejným definičním oborem, jejichž hodnoty se shodují pouze pro $x \geq 0$.

Předchozí příklady ukazují, že je nutné respektovat rozdíl mezi funkcemi $x^{m/n}$ a $\sqrt[n]{x^m}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, chceme-li se vyhnout chybám. Např. zatímco funkce $x^{1/3}$ a $x^{2/6}$, $x \in \mathbb{R}$, jsou podle bodu 5 stejné, složené funkce $\sqrt[3]{x}$ a $\sqrt[6]{x^2}$ se shodují pro $x \geq 0$, avšak pro $x < 0$ dávají různé hodnoty (funkce $\sqrt[3]{x}$ je lichá, kdežto funkce $\sqrt[6]{x^2}$ je sudá).
Poznamenejme, že v některých učebnicích se mocnina x^s pro záporné x a necelé s nezavádí.



Obr. 3.8: Grafy některých mocninných funkcí s kladným exponentem



a) b)

Obr. 3.9: Grafy některých mocninných funkcí se záporným exponentem

Poznámka 3.31. Při zavádění goniometrických funkcí jsme nepostupovali tak exaktně, jak to matematikové od poloviny 19. století vyžadují. Kvůli rozsahu celého textu jsme také nedokazovali všechny uváděné vlastnosti elementárních funkcí. Jiné, preciznější přístupy by vyžadovaly nejprve zavést pojmy jako limita, spojitost a derivace. Nejčastějšími prostředky takových přístupů jsou mocninné řady nebo funkcionální rovnice. S různými variantami těchto pojetí je možné se seznámit např. v [15, 17, 21].

Pro první seznámení se základy diferenciálního počtu je však tento přístup příliš náročný a zdlouhavý, a proto jsme vyšli ze středoškolských znalostí a volili postup založený na jistém „přijatelném názoru" zejména pokud jde o orientovaný úhel a délku oblouku kružnice. Takový postup je ospravedlněný tím, že všechny zaváděné pojmy a o nich uváděná tvrzení lze vybudovat bez tohoto názoru.

Cvičení

1. Rozložte polynom P na součin kořenových činitelů v reálném oboru a určete znaménko hodnot P na jednotlivých intervalech.

   a) $P(x) = x^6 - 1$, b) $P(x) = x^6 + 1$, c) $P(x) = x^4 - 1$.

2. Víte-li, že polynom $P(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 4x - 8$ má kořen $2\mathrm{i}$, najděte ostatní jeho kořeny, rozložte ho na součin kořenových činitelů v reálném oboru a určete znaménko jeho hodnot na jednotlivých intervalech.

3. Vyjádřete racionální funkci jako součet polynomu a ryze lomené racionální funkce.

   a) $R(x) = \dfrac{2x^5 - x^4 + 3x^2 - x + 1}{x^2 - 2x + 4}$, b) $R(x) = \dfrac{3x^4 + 2x^3 - x^2 + 1}{3x + 2}$,

   c) $R(x) = \dfrac{-4x^2 + 10x - 1}{x^2 - 3x + 6}$, d) $R(x) = \dfrac{3x^5 - 3x^2 + 2x - 5}{x^3 - x + 1}$,

   e) $R(x) = \dfrac{2x^6 - 9x^4 + 4x^3 + 8x^2 - 7x + 4}{x^4 - 3x^2 + 2x - 1}$.

4. Určete definiční obor funkce $R(x)$ a najděte všechny maximální intervaly, na kterých mají hodnoty R stejné znaménko.

   a) $\dfrac{(2x-3)x}{(3x-1)(5-x)(2-x^2)(x^2+5x+6)}$, b) $\dfrac{(x-1)(x+2)}{x(x+3)}$,

   c) $\dfrac{(x-2)(x+3)(x-1)}{x^2(x+1)(x-3)}$, d) $\dfrac{(x+1)(x+3)}{x-2}$,

   e) $\dfrac{x^2(x-2)(x+3)}{x+1}$, f) $\dfrac{(x+3)(x+1)^3}{(x-1)^2(x+2)}$.

5. Rozložte racionální funkci na parciální zlomky:

   a) $R(x) = \dfrac{4x^2 + 13x - 2}{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}$, b) $R(x) = \dfrac{-5x + 2}{x^4 - x^3 + 2x^2}$,

   c) $R(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2 + x - 2}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}$, d) $R(x) = \dfrac{9x^3 - 4x + 1}{x^4 - x^2}$,

   e) $R(x) = \dfrac{2x^2 + 4x + 9}{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}$, f) $R(x) = \dfrac{x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 1}{x^5 + 2x^3 + x}$.

6. Určete polynom co nejnižšího stupně s reálnými koeficienty mající jeden trojnásobný kořen $\alpha = 0$ a kořen $\beta = 2+3\mathrm{i}$, který má u nejvyšší mocniny koeficient -2. Najděte všechny maximální intervaly, na kterých mají hodnoty tohoto polynomu stejné znaménko.

7. Nakreslete grafy funkcí

a) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$, b) $y = \ln|x|$, c) $y = |\ln x|$,

d) $y = 2\arcsin\frac{x}{3}$, e) $y = 3\operatorname{arccotg} x$, f) $y = \operatorname{arctg}(x+1)$,

g) $y = \frac{1}{1-x}$, h) $y = \ln(x-1)$.

8. Určete definiční obor funkce $y = \ln|\cos x|$. Je tato funkce periodická, sudá, resp. lichá?

9. Určete definiční obor a nakreslete graf funkce $f\colon\ y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.

10. Určete definiční obor a nakreslete graf funkce:

a) $y = \sin(\arcsin x)$, b) $y = \cos(\arccos x)$,
c) $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$, d) $y = \operatorname{cotg}(\operatorname{arccotg} x)$.

11. Nakreslete grafy funkcí a určete jejich nejmenší periodu.

a) $y = \sin|x|$, b) $y = \sin^2 x$, c) $y = \cos x^2$, d) $y = \sin\frac{1}{x}$.

12. Určete nejmenší periodu funkcí.

a) $y = \sin\frac{x}{2} + 2\cos 2x$, b) $y = \cos 3x + \sin x + \operatorname{tg} x$,

c) $y = \operatorname{tg}\frac{x}{3} + \sin 3x - 2\cos 2x$, d) $y = \cos 2x + \sin 3x$,

e) $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \sin 2x + \cos\frac{x}{3}$.

13. Určete definiční obory následujících funkcí.

a) $\arcsin(2-3x)$, b) $\arccos\frac{1-2x}{4}$,

c) $\arcsin\frac{1}{2x-1}$, d) $\sqrt{3-x} + \arcsin\frac{3-2x}{5}$,

e) $\arcsin(1-x) + \ln\ln x$, f) $\arcsin\frac{x-3}{2} + \ln(x^3 - x)$,

g) $\frac{\ln(2x-3)}{\sqrt{x^2-1}} + \arcsin\frac{x-4}{7}$, h) $\arccos(2x-5)$,

i) $\arccos\frac{2x+3}{6}$, j) $\arcsin\frac{2x}{1+x}$,

k) $\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}$, l) $\sqrt{\ln\frac{5x-x^2}{4}} + \arcsin\frac{3}{x}$.

14. K daným funkcím určete interval, na kterém je funkce prostá, a stanovte inverzní funkci a její definiční obor.

a) $y = 2\cos(1-3x)$, b) $y = 2 + \operatorname{tg}(5x-2)$,
c) $y = 3 + 4\arccos(2x-1)$, d) $y = 2 - \operatorname{arccotg}(x-2)$,
e) $y = \sin(3x-1)$, f) $y = 1 + \operatorname{arctg}(3x-4)$,
g) $y = 2 - \cos(2x+1)$, h) $y = \ln(2-x)$,
i) $y = 1 + \sqrt{3 + \mathrm{e}^{2x}}$, j) $y = \dfrac{4+\mathrm{e}^x}{4-\mathrm{e}^x}$,
k) $y = \ln(5-2x)$, l) $y = \sqrt{3-\mathrm{e}^x}$,
m) $y = \dfrac{2+\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}$, n) $y = -3 + \cos\dfrac{4x-5}{2}$,
o) $y = 3\arccos\dfrac{x}{2}$, p) $y = x^2,\ x \le 0$.

15. Upravte.

a) $\sin\arccos x,\ x \in [-1, 1]$, b) $\sin\operatorname{arctg} x,\ x \in \mathbb{R}$.

16. Dokažte, že platí následující rovnosti.

a) $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arccotg}\dfrac{1}{x}$ pro $x > 0$, b) $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arccotg}\dfrac{1}{x} - \pi$ pro $x < 0$.

17. Zjistěte, zda daná funkce je sudá nebo lichá.

a) $y = \ln\dfrac{2-x}{2+x}$, b) $y = \dfrac{a^x+1}{a^x-1}$,
c) $y = \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$, d) $y = \dfrac{\sinh x}{\sin x}$.

18. Funkce určené předpisy

$$\sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2},$$
$$\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \qquad \operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

se nazývají *hyperbolický sinus, kosinus, tangens a kotangens*. Společný název je *hyperbolické funkce*.

a) Určete jejich definiční obory.
b) Rozhodněte, zda jsou sudé nebo liché.

c) Najděte (na vhodných intervalech) jejich inverzní funkce (tzv. *hyperbolometrické funkce* argsinh, argcosh, argtgh a argcotgh — čte se *argument hyperbolického sinu* atd.).
d) Rozhodněte, zda jsou hyperbolometrické funkce sudé nebo liché.

*

Život je komplexní. Má reálnou a imaginární složku.

Kapitola 4

Limita a spojitost funkce

Pojem limity funkce patří k základním pojmům diferenciálního počtu. Mít limitu je lokální vlastnost funkce popisující chování funkce v ryzím okolí bodu, v němž limitu určujeme. Skutečnost, že jde o ryzí okolí (tj. okolí kromě tohoto bodu), znamená, že limita nezávisí na funkční hodnotě funkce v tomto bodě — funkční hodnota se může lišit od limity v tomto bodě, nebo funkce nemusí být v daném bodě definovaná.

Spojitost funkce má lokální nebo globální charakter. Spojitost funkce v daném bodě znamená, že limita funkce v daném bodě je rovna funkční hodnotě v tomto bodě. Pomocí spojitosti v bodě je definována spojitost na intervalu, případně obecně na množině. Důležité vlastnosti spojitých funkcí na intervalu jsou uvedeny v závěru této kapitoly.

4.1. Limita

Univerzální definice limity funkce je založena na pojmu okolí zavedeném v definici 1.19 a popisuje všechny případy limit.

Definice 4.1. Nechť $x_0, L \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 *limitu* rovnou číslu L a píšeme $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, jestliže ke každému okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu L existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ bodu x_0 tak, že pro všechna $x \in \mathcal{O}(x_0) \smallsetminus \{x_0\}$ platí $f(x) \in \mathcal{O}(L)$. Píšeme $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.
Pomocí kvantifikátorů lze psát

$$\forall \mathcal{O}(L)\ \exists \mathcal{O}(x_0)\ \forall x \in \mathcal{O}(x_0) \smallsetminus \{x_0\} : f(x) \in \mathcal{O}(L)\,.$$

Specifikací bodů x_0, L (zda jsou z $\mathbb{R}$ či $\pm\infty$) dostáváme tyto speciální případy limity:

a) *Vlastní limita ve vlastním bodě*, je-li x_0, $L \in \mathbb{R}$ — viz obr. 4.1 a).
b) *Vlastní limita v nevlastním bodě*, je-li $x_0 = \pm\infty$ a $L \in \mathbb{R}$ — viz obr. 4.1 b).
c) *Nevlastní limita*, je- li $L = \pm\infty$ — viz obr. 4.1 c) a 4.1 d).

V případě vlastní limity ve vlastním bodě popíšeme okolí $\mathscr{O}(L)$ pomocí ε a $\mathscr{O}(x_0)$ pomocí δ a dostaneme následující tzv. ε–δ definici.

Definice 4.2. *(ε–δ definice)*
Nechť x_0, $L \in \mathbb{R}$. Řekneme, že $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$, jestliže

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R} : 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

V případě vlastní limity v nevlastním bodě $+\infty$ popíšeme okolí $\mathscr{O}(L)$ pomocí ε a $\mathscr{O}(\infty)$ jako interval (A, ∞). Definici je v tomto případě následující.

Definice 4.3. Řekneme, že $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$, $L \in \mathbb{R}$, jestliže

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists A > 0\ \forall x \in \mathbb{R} : x > A \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Podobně definujeme ostatní případy nevlastních limit v nevlastních bodech (celkem dostáváme 9 speciálních případů limit).

Poznámka 4.4. Z grafu funkcí (obr. 3.4 c) a 3.9 b)) je vidět, že existují limity

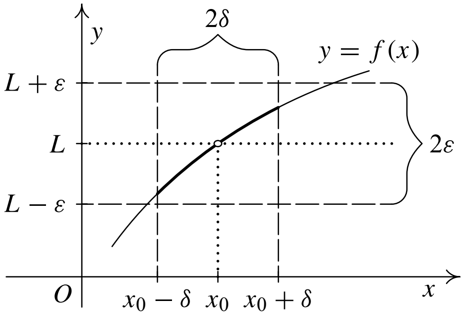
$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Naopak limita $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ neexistuje, neboť v pravém okolí nuly jsou hodnoty funkce rovny 1 a v levém -1. Z definice limity lze snadno dokázat, že Dirichletova funkce χ nemá limitu v žádném bodě.

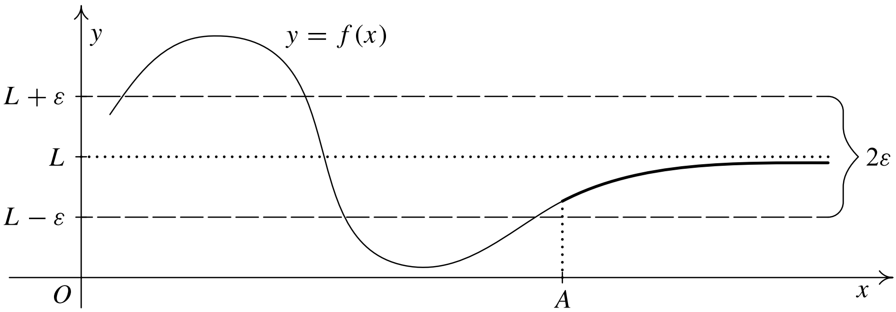
Příklad 4.5. Z definice limity dokažte, že $\lim\limits_{x\to 1} (2x + 1) = 3$.

Řešení. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Potřebujeme najít $\delta > 0$ tak, aby pro všechna x taková, že $0 < |x - 1| < \delta$, platilo, že $|2x + 1 - 3| < \varepsilon$, neboli $2|x - 1| < \varepsilon$, odkud vidíme, že stačí zvolit libovolné $\delta \le \frac{\varepsilon}{2}$, např. $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. ▲

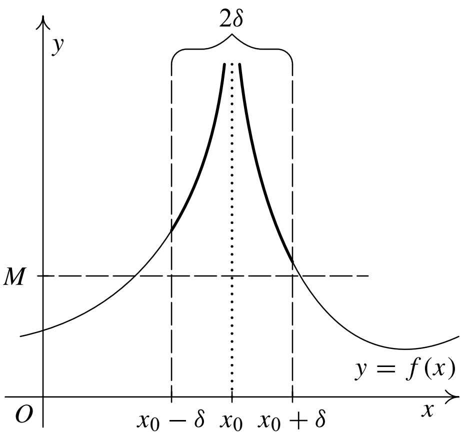
Funkce $\operatorname{sgn} x$ (obr. 1.3 c)) nemá limitu v bodě $x_0 = 0$, přestože je v levém i pravém okolí tohoto bodu dokonce konstantní. Proto zavádíme pojem jednostranné limity.



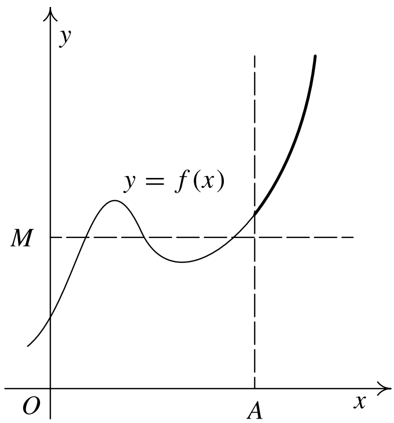
a) vlastní limita ve vlastním bodě



b) vlastní limita v nevlastním bodě



c) nevlastní limita ve vlastním bodě



d) nevlastní limita v nevlastním bodě

Obr. 4.1 Různé druhy limit

Definice 4.6. Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 limitu zprava rovnu číslu L a píšeme $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$, jestliže

$$\forall \mathscr{O}(L)\ \exists \delta > 0\ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) : f(x) \in \mathscr{O}(L).$$

Podobně definujeme limitu zleva $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$.

Např. z grafu na obr. 1.3 c) je zřejmé, že platí $\lim\limits_{x \to 0^+} \operatorname{sgn} x = 1$, $\lim\limits_{x \to 0^-} \operatorname{sgn} x = -1$.

4.2. Věty o limitách

Věta 4.7. *Funkce f má v libovolném bodě nejvýše jednu limitu.*

Důkaz. Důkaz provedeme sporem. Budeme předpokládat, že $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L_1$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L_2$ a $L_1 \neq L_2$. Podle podle poznámky 1.20 o okolí existují $\mathscr{O}(L_1)$, $\mathscr{O}(L_2)$ takové, že $\mathscr{O}(L_1) \cap \mathscr{O}(L_2) = \emptyset$. Z definice limity plyne

$$\exists \mathscr{O}_1(x_0) \text{ takové, že } \forall x \in \mathscr{O}_1(x_0) \smallsetminus \{x_0\} \text{ platí } f(x) \in \mathscr{O}(L_1),$$
$$\exists \mathscr{O}_2(x_0) \text{ takové, že } \forall x \in \mathscr{O}_1(x_0) \smallsetminus \{x_0\} \text{ platí } f(x) \in \mathscr{O}(L_2).$$

Podle téže poznámky o okolí je $\mathscr{O}_1(x_0) \cap \mathscr{O}_2(x_0) = \mathscr{O}(x_0)$ také okolím bodu x_0 a zároveň musí platit, že pro každé $x \in \mathscr{O}(x_0) \smallsetminus \{x_0\}$ je $f(x) \in \mathscr{O}(L_1) \cap \mathscr{O}(L_2)$, což je evidentní spor. □

Věta 4.8. *Má-li funkce f v bodě x_0 vlastní limitu $L \in \mathbb{R}$, pak existuje $\mathscr{O}(x_0)$ takové, že f je na $\mathscr{O}(x_0)$ ohraničená.*

Důkaz. Nechť $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$. Potřebujeme určit K_1, K_2 takové, aby $K_1 \leq f(x) \leq$ $\leq K_2$ pro všechna $x \in \mathscr{O}(x_0)$. Z definice limity existuje k číslu $\varepsilon = 1$ okolí $\mathscr{O}(x_0)$ takové, že pro všechna $x \in \mathscr{O}(x_0) \smallsetminus \{x_0\}$ platí $L - 1 < f(x) < L + 1$. Zvolme tudíž $K_1 := \min\{L - 1, f(x_0)\}$ a $K_2 := \max\{L + 1, f(x_0)\}$, pokud $f(x_0)$ existuje, a $K_1 := L - 1$, $K_2 := L + 1$, pokud $f(x_0)$ neexistuje. □

Věta 4.9. *Platí $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ právě tehdy, když $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$.*

Důkaz. Tvrzení „⇒“ je triviální. Nechť tedy $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$ a zároveň $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) =$ $= A$. K libovolnému $\mathscr{O}(A)$ existují kladná čísla δ_1 tak, že pro všechna $x \in (x_0, x_0+\delta_1)$ je $f(x) \in \mathscr{O}(A)$, a δ_2 tak, že pro všechna $x \in (x_0 - \delta_2, x_0)$ je $f(x) \in \mathscr{O}(A)$.

Zvolíme-li $\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$, pak pro všechna $0 < |x - x_0| < \delta$ je $f(x) \in \mathscr{O}(x_0)$, a tvrzení je dokázáno. □

Věta 4.10.

1. *Nechť existuje okolí $\mathscr{O}(x_0)$ takové, že pro všechna $x \in \mathscr{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ platí rovnost $f(x) = g(x)$. Pak*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} g(x) = A, \quad \textit{kde } A \in \mathbb{R}^*.$$

2. *Nechť $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B \in \mathbb{R}^*$. Jestliže $A < B$, pak existuje $\mathscr{O}(x_0)$ takové, že pro všechna $x \in \mathscr{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $f(x) < g(x)$.*
   Naopak, je-li $f(x) \le g(x)$ v nějakém ryzím okolí bodu x_0, je $A \le B$.

Důkaz.

1. Předpokládejme, že $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. Chceme dokázat, že $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$. Nechť je dále dáno libovolné $\mathscr{O}(A)$. K němu z definice limity existuje $\mathscr{O}_1(x_0)$ takové, že pro všechna $x \in \mathscr{O}_1(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $f(x) \in \mathscr{O}(A)$. Zvolme $\mathscr{O}_2(x_0) := \mathscr{O}(x_0) \cap \mathscr{O}_1(x_0)$. Pak pro $x \in \mathscr{O}_2(x_0) \setminus \{x_0\}$ platí $f(x) = g(x) \in \mathscr{O}(A)$ a tvrzení je dokázáno.
2. a) Nejprve provedeme důkaz pro $A, B \in \mathbb{R}$. Podle předpokladu je $A < B$. Zvolme $\varepsilon := \frac{B-A}{2}$. K tomuto ε existují z definice limity okolí

$$\mathscr{O}_1(x_0) \text{ tak, že } \forall x \in \mathscr{O}_1(x_0) \setminus \{x_0\} \text{ je } f(x) \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon) \text{ a}$$
$$\mathscr{O}_2(x_0) \text{ tak, že } \forall x \in \mathscr{O}_2(x_0) \setminus \{x_0\} \text{ je } g(x) \in (B-\varepsilon, B+\varepsilon).$$

Zvolíme-li $\mathscr{O}(x_0) := \mathscr{O}_1(x_0) \cap \mathscr{O}_2(x_0)$, pak pro všechna $x \in \mathscr{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ platí

$$f(x) < A + \varepsilon = A + \frac{B-A}{2} = \frac{A+B}{2},$$
$$g(x) > B - \varepsilon = B - \frac{B-A}{2} = \frac{A+B}{2}.$$

Odtud plyne

$$f(x) < \frac{A+B}{2} < g(x).$$

b) Nechť nyní $A \in \mathbb{R}$, $B = \infty$ (pro ostatní případy, kdy $A = -\infty$, $B \in \mathbb{R}^*$, se důkaz provede analogicky). K $\varepsilon = 1$ existuje z definice limity $\mathscr{O}_1(x_0)$ tak, že pro všechna $x \in \mathscr{O}_1(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $f(x) < A + 1$). Dále existuje $\mathscr{O}_2(x_0)$ takové, že pro všechna $x \in \mathscr{O}_2(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $g(x) > A + 1$, jelikož $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$. Zvolme opět $\mathscr{O}(x_0) := \mathscr{O}_1(x_0) \cap \mathscr{O}_2(x_0)$ a vidíme, že pro všechna $x \in \mathscr{O}(x_0)$ je $f(x) < A + 1 < g(x)$, a tvrzení je dokázáno.

c) Dokážeme druhou část tvrzení 2. Kdyby bylo $A > B$, dostali bychom spor s první částí tvrzení 2. $\square$

Je-li v druhém tvrzení předchozí věty $f(x) < g(x)$, nemusí být $A < B$, jak ukazuje příklad $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x^2$, $x \to 0$. Je totiž $A = B = 0$ (viz dále).

Věta 4.11. *Nechť* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$. *Jestliže pro funkci g existuje okolí* $\mathscr{O}(x_0)$ *bodu* x_0 *takové, že g je v něm ohraničená, pak* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0$.

Důkaz. Důkaz provedeme z definice — k libovolnému $\varepsilon > 0$ hledáme vhodné okolí $\mathscr{O}_2(x_0)$. Podle předpokladů existuje konstanta K taková, že $|g(x)| \le K$ pro všechna $x \in \mathscr{O}(x_0)$. Protože $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, pro $\varepsilon^* > 0$ (určíme později) existuje $\mathscr{O}_1(x_0)$ takové, že pro všechna $x \in \mathscr{O}_1(x_0) \smallsetminus \{x_0\}$ platí $|f(x)| < \varepsilon^*$. Položme $\mathscr{O}_2(x_0) = \mathscr{O}_1(x_0) \cap \mathscr{O}(x_0)$. Potom pro všechna $x \in \mathscr{O}_2(x_0) \smallsetminus \{x_0\}$ platí, že $|f(x)g(x) - 0| = |f(x)||g(x)| < K \cdot \varepsilon^* = \varepsilon$. Vidíme, že ε^* zvolíme jako $\frac{\varepsilon}{K}$ a věta je dokázána. □

Příklad 4.12. Vypočtěte $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x}$.

Řešení. Jde o typický příklad na použití věty 4.11. I když limita $\lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$ neexistuje, využijeme ohraničenosti funkce $\sin \frac{1}{x}$ a existence limity $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$. Podle věty 4.11 platí $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$. ▲

Věta 4.13 (Početní operace s limitami). *Nechť existují obě limity* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L_1$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L_2$, $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$ *(tj. vlastní limity). Pak platí:*

1. $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = L_1 \pm L_2$,
2. $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = L_1 \cdot L_2$,
3. *Je-li* $L_2 \neq 0$, *pak* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$,
4. $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |\lim\limits_{x \to x_0} f(x)|$.

Důkaz.

1. Chceme dokázat, že k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje okolí $\mathscr{O}(x_0)$ takové, že pro všechna $x \in \mathscr{O}(x_0) \smallsetminus \{x_0\}$ platí $|f(x) + g(x) - (L_1 + L_2)| < \varepsilon$. Nechť je dáno libovolné $\varepsilon > 0$. K $\varepsilon^* > 0$ (určíme později) existují

$$\mathscr{O}_1(x_0) \text{ takové, že } \forall x \in \mathscr{O}_1(x_0) \smallsetminus \{x_0\} \text{ platí } |f(x) - L_1| < \varepsilon^*,$$
$$\mathscr{O}_2(x_0) \text{ takové, že } \forall x \in \mathscr{O}_2(x_0) \smallsetminus \{x_0\} \text{ platí } |g(x) - L_2| < \varepsilon^*.$$

Položme $\mathscr{O}(x_0) = \mathscr{O}_1(x_0) \cap \mathscr{O}_2(x_0)$. Pak pro všechna $x \in \mathscr{O}(x_0) \smallsetminus \{x_0\}$ platí $|f(x) + g(x) - (L_1 + L_2)| = |f(x) - L_1 + g(x) - L_2| \le |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| < \varepsilon^* + \varepsilon^*$. Vidíme, že pokud zvolíme $\varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{2}$, bude tato podmínka splněna a tvrzení je dokázáno. Důkaz pro rozdíl je analogický.

2. V tomto případě postupujeme obdobně — ke každému ε hledáme vhodné $\mathscr{O}(x_0)$ takové, aby pro všechny $x \in \mathscr{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ platilo $|f(x)g(x) - L_1L_2| < \varepsilon$. Funkce g má v bodě x_0 vlastní limitu, a proto podle Věty 4.8 existuje $\mathscr{O}_1(x_0)$, v němž je g ohraničená, tzn. existuje $K > 0$ takové, že $|g(x)| \leq K$ pro všechna $x \in \mathscr{O}_1(x_0)$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Z existence limit obou funkcí f, g plyne, že pro $\varepsilon^* > 0$ (opět určíme vhodně později) existuje $\mathscr{O}_2(x_0)$ takové, že pro všechna $x \in \mathscr{O}_2(x_0) \setminus \{x_0\}$ platí $|f(x) - L_1| < \varepsilon^*$, a k $\varepsilon^{**} > 0$ existuje $\mathscr{O}_3(x_0)$ takové, že pro všechna $x \in \mathscr{O}_3(x_0) \setminus \{x_0\}$ platí $|g(x) - L_2| < \varepsilon^{**}$. Buď nyní $\mathscr{O}(x_0) = \mathscr{O}_1(x_0) \cap \mathscr{O}_2(x_0) \cap \mathscr{O}_3(x_0)$. Pak pro všechna $x \in \mathscr{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ je
$$\begin{aligned}|f(x)g(x) - L_1L_2| &= |f(x)g(x) - L_1L_2 + g(x)L_1 - g(x)L_1| = \\ &= |(f(x) - L_1)g(x) + (g(x) - L_2)L_1| \leq \\ &\leq |g(x)| \cdot |f(x) - L_1| + |L_1| \cdot |g(x) - L_2| < K\varepsilon^* + |L_1|\varepsilon^{**}.\end{aligned}$$
Stačí proto vhodně zvolit $\varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{2K}$ a $\varepsilon^{**} = \frac{\varepsilon}{2|L_1|}$ a tvrzení je dokázáno.
3. Postupujeme obdobně jako v případech 1 a 2. Funkce f má v bodě x_0 vlastní limitu, proto existuje okolí $\mathscr{O}_1(x_0)$, kde je ohraničená, tj. existuje $K > 0$ takové, že pro všechna $x \in \mathscr{O}_1(x_0)$ je $|f(x)| \leq K$. Dále podle definice limity k číslu $\frac{|L_2|}{2} > 0$ existuje okolí $\mathscr{O}_2(x_0)$ takové, že pro všechna $x \in \mathscr{O}_2(x_0) \setminus \{x_0\}$ platí $g(x) \in \left(L_2 - \frac{|L_2|}{2}, L_2 + \frac{|L_2|}{2}\right)$, tj. $\frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|L_2|}$. Nyní k $\varepsilon^* > 0$ existuje $\mathscr{O}_3(x_0)$ takové, že pro všechna $x \in \mathscr{O}_3(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $|f(x) - L_1| < \varepsilon^*$, a k $\varepsilon^{**} > 0$ existuje $\mathscr{O}_4(x_0)$ takové, že pro všechna $x \in \mathscr{O}_4(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $|g(x) - L_2| < \varepsilon^{**}$. Zvolme okolí $\mathscr{O}(x_0)$ jako průnik všech těchto okolí. Potom pro všechna $x \in \mathscr{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ platí
$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{L_1}{L_2}\right| &= \left|\frac{f(x)}{g(x)} - f(x)\frac{1}{L_2} + f(x)\frac{1}{L_2} - \frac{L_1}{L_2}\right| \leq \\ &\leq |f(x)|\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{L_2}\right| + \frac{1}{|L_2|}|f(x) - L_1| = \\ &= \frac{|f(x)|}{|L_2|}\underbrace{\frac{1}{|g(x)|}}_{<2/L_2}\underbrace{|g(x) - L_2|}_{<\varepsilon^{**}} + \frac{1}{|L_2|}\underbrace{|f(x) - L_1|}_{<\varepsilon^*} < \\ &< \frac{K}{L_2} \cdot \frac{2}{L_2}\varepsilon^{**} + \frac{\varepsilon^*}{L_2}.\end{aligned}$$
Stačí zvolit $\varepsilon^* = \varepsilon\frac{|L_2|}{2}$ a $\varepsilon^{**} = \varepsilon\frac{L_2^2}{4K}$ a tvrzení je dokázáno.
4. K libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje okolí $\mathscr{O}(x_0)$ tak, že pro všechna $x \in \mathscr{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ platí $f(x) \in (L_1 - \varepsilon, L_1 + \varepsilon)$, tj. $|L_1 - f(x)| < \varepsilon$. Protože $\big||L_1| - |f(x)|\big| \leq |L_1 - f(x)|$, je $f(x) \in (|L_1| - \varepsilon, |L_1| + \varepsilon)$, což jsme měli dokázat. □

Poznámka 4.14. Podobně jako u posloupností platí věty vyjádřené hesly

$$\frac{1}{\pm\infty} = 0, \qquad \frac{1}{+0} = +\infty, \qquad \frac{1}{-0} = -\infty.$$

Důkaz se provede obdobně jako ve větě 2.18. Například, $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$. Proto $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ neexistuje.

V případech limit typu „$\infty - \infty$“, „$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$“ a „$\frac{0}{0}$“ je situace opět nejednoznačná. Jak postupovat v těchto případech, ukážeme v kapitole 5.

Následující věta plyne přímo z definice limity a má praktický význam.

Věta 4.15. *Nechť existuje ryzí okolí bodu x_0, v němž platí $f(x) \le g(x) \le h(x)$. Jestliže $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L = \lim\limits_{x\to x_0} h(x)$, pak $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L$.*

Věta 4.16 (Limita složené funkce). *Nechť $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \alpha$, $\lim\limits_{y\to\alpha} f(y) = L$ a existuje $\mathscr{O}_1(x_0)$ takové, že pro všechna $x \in \mathscr{O}_1(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $\varphi(x) \ne \alpha$. Pak $\lim\limits_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = L$.*

Důkaz. Máme ukázat, že k libovolnému okolí $\mathscr{O}(L)$ existuje okolí $\mathscr{O}(x_0)$ takové, že pro $x \in \mathscr{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $f(\varphi(x)) \in \mathscr{O}(L)$.

Zvolme okolí $\mathscr{O}(L)$. K němu existuje okolí $\mathscr{O}(\alpha)$ takové, že pro $y \in \mathscr{O}(\alpha) \setminus \{\alpha\}$ je $f(y) \in \mathscr{O}(L)$. Dále k okolí $\mathscr{O}(\alpha)$ existuje $\mathscr{O}_2(x_0)$ tak, že pro všechna $x \in \mathscr{O}_2(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $\varphi(x) \in \mathscr{O}(\alpha)$. Položme $\mathscr{O}(x_0) = \mathscr{O}_1(x_0) \cap \mathscr{O}_2(x_0)$. Ukážeme, že má požadovanou vlastnost. Pro $x \in \mathscr{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $\varphi(x) \in \mathscr{O}(\alpha) \setminus \{\alpha\}$, a tedy $f(\varphi(x)) \in \mathscr{O}(L)$. $\square$

Poznámka 4.17. Předpoklad $\varphi(x) \ne \alpha$ je podstatný. Například pro funkce

$$\varphi(x) = 0, \qquad f(y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } y \ne 0, \\ 2 & \text{pro } y = 0 \end{cases}$$

platí $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = 0$, $\lim\limits_{y\to 0} f(y) = 1$. Přitom $\lim\limits_{x\to 0} f(\varphi(x)) = \lim\limits_{x\to 0} f(0) = \lim\limits_{x\to 0} 2 = 2 \ne 1$ (je $x_0 = \alpha = 0$).

S jinou variantou předchozí věty se setkáme v následujícím oddílu (věta 4.22), kde bude kladena podmínka naopak na vnější složku.

Lemma 4.18. *Nechť funkce f je monotonní v nějakém ryzím pravém okolí $(x_0, x_0+\delta)$ bodu x_0, $-\infty \le x_0 < +\infty$. Pak existuje $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$, $L \in \mathbb{R}^*$. Obdobné tvrzení platí pro limitu zleva.*

Důkaz. Nechť je f například neklesající na $(x_0, x_0 + \delta)$. Případ nerostoucí funkce se vyšetří obdobně. Označme $L = \inf\{f(x) : x \in (x_0, x_0 + \delta)\}$. Z definice infima a monotonie f se snadno ověří, že $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$. $\square$

Složitější příklady na výpočet limit, které budou ilustrovat použití předchozích vět, uvedeme až v oddílu 4.6. Chybí nám totiž zatím znalost limit elementárních funkcí, které budou sloužit jako stavební kameny složitějších příkladů. K jejich určení budou sloužit pojmy zavedené v následujících dvou oddílech.

4.3. Spojitost funkce v bodě

Pomocí pojmu limita funkce definujeme spojitost funkce v bodě.

Definice 4.19. Buď $x_0 \in \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f je v bodě x_0 *spojitá*, jestliže

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Podobně definujeme i jednostranné spojitosti — funkce f je v bodě x_0 *spojitá zprava* resp. *spojitá zleva*, jestliže

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0), \qquad \text{resp.} \qquad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Poznámka 4.20.

i) Je-li funkce f spojitá v bodě x_0 (resp. spojitá zprava, zleva), znamená to, že f je v tomto bodě definovaná.

ii) Protože $f(x_0) \in \mathbb{R}$, je $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ vlastní. Definici spojitosti lze psát pomocí kvantifikátorů takto: f je spojitá právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Následující věta plyne bezprostředně z věty o početních operacích s limitami.

Věta 4.21. *Jsou-li funkce f, g spojité v bodě x_0, jsou také funkce $f \pm g$, $f \cdot g$ spojité v bodě x_0. Je-li $g(x_0) \neq 0$, je v x_0 spojitá i funkce f/g.*

Následující věta má velký praktický význam pro počítání limit složených funkcí.

Věta 4.22. *Nechť $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \alpha$ a funkce f je spojitá v bodě α. Pak platí, že $\lim\limits_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = f(\alpha)$.*

Důkaz. Budeme postupovat jako v důkazu věty 4.16. K libovolnému okolí $\mathscr{O}(f(\alpha))$ musíme najít okolí $\mathscr{O}(x_0)$ takové, že pro $x \in \mathscr{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $f(\varphi(x)) \in \mathscr{O}(f(\alpha))$.

Zvolme okolí $\mathcal{O}(f(\alpha))$. K němu ze spojitosti f existuje okolí $\mathcal{O}(\alpha)$ takové, že pro $y \in \mathcal{O}(\alpha)$ je $f(y) \in \mathcal{O}(f(\alpha))$. Dále k okolí $\mathcal{O}(\alpha)$ existuje $\mathcal{O}(x_0)$ tak, že pro všechna $x \in \mathcal{O}(x_0) \smallsetminus \{x_0\}$ je $\varphi(x) \in \mathcal{O}(\alpha)$. Toto okolí má požadovanou vlastnost. Pro $x \in \mathcal{O}(x_0) \smallsetminus \{x_0\}$ je $\varphi(x) \in \mathcal{O}(\alpha)$, a tedy $f(\varphi(x)) \in \mathcal{O}(f(\alpha))$. □

Všimněte si, že k platnosti věty o limitě složené funkce nestačí existence limit vnitřní a vnější složky — viz poznámka 4.17. Buď je třeba předpokládat, že vnitřní složka má jakousi dodatečnou vlastnost (věta 4.16), nebo je třeba předpokládat, že vnější složka je spojitá (věta 4.22).

Z předchozí věty plyne věta o spojitosti složené funkce:

Věta 4.23. *Je-li funkce $u = \varphi(x)$ spojitá v x_0 a $y = f(u)$ spojitá v bodě $u_0 = \varphi(x_0)$, je funkce $y = f(\varphi(x))$ spojitá v x_0.*

Věta 4.24. *Následují funkce jsou spojité v každém bodě $x \in \mathbb{R}$:*

1. $f(x) = c$,
2. $f(x) = x$,
3. *polynom,*
4. *racionální lomená funkce (v každém bodě, v kterém je definovaná),*
5. $\sin x$, $\cos x$,
6. $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$ *(všude, kde jsou definovány).*

Důkaz.

1. Tvrzení je zřejmé.
2. Buď $x_0 \in \mathbb{R}$ libovolné, $\varepsilon > 0$ libovolné. Položme $\delta := \varepsilon$. Pak pro libovolné $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ platí $|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon$, což znamená, že $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
3. Funkce $f(x) = x$ je spojitá podle 2, dále x^2, $x^3, \dots$ jsou spojité podle věty 4.21, $a_0, \dots, a_n$ jsou spojité podle bodu 1, proto je i $a_0 x^n + \cdots + a_n$ spojitá.
4. Plyne bezprostředně z věty 4.21 a bodu 3.
5. Budeme postupovat po krocích:
   (a) $\sin x$ je spojitá v bodě 0, neboť ze vztahu $0 < \sin x < x$ pro $0 < x$ (tato nerovnost bude dokázána v příkladu 4.25) a z faktu, že $\lim\limits_{x \to 0} 0 = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$, plyne z věty 4.15, že $\lim\limits_{x \to 0^+} \sin x = 0$. Protože sinus je lichá funkce, je pro $x < 0$ splněno $x < \sin x < 0$, a podobně se dokáže, že $\lim\limits_{x \to 0^-} \sin x = 0$, což dohromady dává spojitost funkce sinus v nule.
   (b) $\cos x$ je spojitá v bodě 0, což plyne ze vztahu $\cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x}$, z vět 4.21 a 4.22 a bodu 5(a) (spojitost odmocniny bude dokázána v důsledku 4.41).

(c) $\sin x$ je spojitá v libovolném bodě. Vskutku, je $\lim\limits_{x\to x_0} \sin x = \lim\limits_{h\to 0} \sin(x_0+h) =$
$= \lim\limits_{h\to 0}(\sin x_0 \cos h) + \lim\limits_{h\to 0}(\sin h \cos x_0) = \sin x_0 \cdot 1 + 0 \cdot \cos x_0 = \sin x_0.$

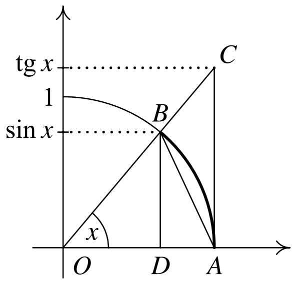
(d) $\cos x$ je spojitá v libovolném bodě (analogicky pomocí bodu 5(a)).

6. Plyne bezprostředně z věty 4.21 a bodu 5. □

Příklad 4.25. Dokažte, že

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Řešení. K důkazu využijeme větu 4.15. Z obr. 4.2 je zřejmé, že plocha trojúhelníka $\triangle OAB$ je menší než plocha kruhové výseče OAB a ta je menší než plocha trojúhelníka $\triangle OAC$. Tudíž platí nerovnosti



Obr. 4.2

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x}.$$

Z nich po úpravě dostaneme, že pro $0 < x < \pi/2$ je

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Protože $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$ (funkce $\cos x$ je spojitá), je podle Věty 4.15 $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$. Funkce $\frac{\sin x}{x}$ je sudá, a proto také $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$, odkud již plyne tvrzení. ▲

Příklad 4.26. Dokažte, že platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Řešení. Vyšetříme nejprve limitu zprava. Nechť $0 < x < \frac{1}{2}$ a nechť $n \in \mathbb{N}$ je takové, že $\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$. Podle definice Eulerova čísla (definice 2.27) platí (viz věta 2.26)

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < e < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n}.$$

Odtud plyne $e^x \leq e^{1/n} < 1 + \frac{1}{n-1}$ a zároveň $e^x > e^{1/(n+1)} > 1 + \frac{1}{n+1}$, tj.

$$1 + \frac{1}{n+1} < e^x < 1 + \frac{1}{n-1}.$$

Protože $n \leq \frac{1}{x}$, dostáváme $n+1 \leq \frac{1}{x}+1 = \frac{x+1}{x}$, tj. $\frac{1}{n+1} \geq \frac{x}{x+1}$. Podobně z nerovnosti $n+1 > \frac{1}{x}$ plyne $n-1 > \frac{1}{x} - 2 = \frac{1-2x}{x}$, tj. $\frac{1}{n-1} < \frac{x}{1-2x}$. Odtud pro $x \in (0, 1/2)$ platí nerovnost

$$1 + \frac{x}{x+1} < \mathrm{e}^x < 1 + \frac{x}{1-2x};$$

odečteme-li číslo 1 a podělíme-li kladným číslem x, dostaneme

$$\frac{1}{x+1} < \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} < \frac{1}{1-2x}.$$

Limitním přechodem pro $x \to 0+$ a s využitím věty 4.15 je $\lim\limits_{x \to x_0+} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$. Podobným způsobem vyšetříme limitu zleva, odkud pak plyne tvrzení. ▲

Příklad 4.27. Dokažte, že je exponenciální funkce a^x spojitá v každém bodě $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. Platí

$$\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{x_0} = \mathrm{e}^{x_0}(\mathrm{e}^{x-x_0} - 1) = \mathrm{e}^{x_0}(x - x_0)\,\frac{\mathrm{e}^{x-x_0} - 1}{x - x_0}.$$

Podle příkladu 4.26 a věty 4.16 je $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\mathrm{e}^{x-x_0}-1}{x-x_0} = 1$, proto

$$\lim_{x \to x_0} (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{x_0}) = \lim_{x \to x_0} \mathrm{e}^{x_0}(x - x_0)\,\frac{\mathrm{e}^{x-x_0}}{x - x_0} = 0.$$

Odtud $\lim\limits_{x \to x_0} \mathrm{e}^x = \lim\limits_{x \to x_0} (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{x_0}) + \lim\limits_{x \to x_0} \mathrm{e}^{x_0} = \mathrm{e}^{x_0}$. Pro $a \neq 1$ lze psát $a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$, proto podle předchozího a věty 4.16 platí $\lim\limits_{x \to x_0} a^x = \lim\limits_{x \to x_0} \mathrm{e}^{x \ln a} = \mathrm{e}^{x_0 \ln a} = a^{x_0}$. Pro $a = 1$ je vztah $\lim\limits_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$ zřejmý. ▲

Příklad 4.28. Buď

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{pro } x \leq 1, \\ 3 - ax^2 & \text{pro } x > 1. \end{cases}$$

Určete parametr a tak, aby byla funkce f spojitá ve všech bodech $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. Funkce je spojitá na intervalu $(-\infty, 1)$ i $(1, \infty)$. Jediným bodem, kde by funkce nemusela být spojitá, je bod $x = 1$. Potřebujeme, aby $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = f(1) = 1 + 1 = 2$, tj.

$$\lim_{x \to 1^+} (3 - ax^2) = 3 - a = 2.$$

Odtud plyne $a = 1$ a funkce f je spojitá v každém bodě $x \in \mathbb{R}$. ▲

Příklad 4.29. Je dána funkce

$$f(x) = \begin{cases} -2\sin x & \text{pro } x \leq -\frac{\pi}{2}\,, \\ A\sin x + B & \text{pro } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\,, \\ \cos x & \text{pro } x \geq \frac{\pi}{2}\,. \end{cases}$$

Určete konstanty A, B tak, aby byla funkce f spojitá v každém bodě $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. Problémové body jsou $x = -\frac{\pi}{2}$ a $x = \frac{\pi}{2}$. Potřebujeme, aby

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+}(A\sin x + B) = A\sin\Big(-\frac{\pi}{2}\Big) + B = f\Big(-\frac{\pi}{2}\Big) = -2\sin\Big(-\frac{\pi}{2}\Big) = 2,$$
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}(A\sin x + B) = A\sin\Big(\frac{\pi}{2}\Big) + B = f\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Dostáváme soustavu rovnic $-A + B = 2$, $A + B = 0$, po jejímž vyřešení dostáváme výsledek $A = -1$ a $B = 1$. ▲

Příklad 4.30. Uveďte příklad funkce f definované na celém $\mathbb{R}$, která není spojitá v žádném bodě $x \in \mathbb{R}$, ale jejíž absolutní hodnota $f^* = |f|$ je funkce spojitá v každém bodě $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. Příkladem může být funkce podobná Dirichletově funkci. Definujme

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \mathbb{Q}, \\ -1 & \text{pro } x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

Tato funkce evidentně není spojitá v žádném bodě, ale její absolutní hodnota je $f^*(x) = |f(x)| = 1$, $x \in \mathbb{R}$, což je funkce spojitá v každém bodě $x \in \mathbb{R}$. ▲

Příklad 4.31. Dokažte, že je funkce

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pro } x = \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \dots, \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

spojitá v bodě $x = 0$.

Řešení. Potřebujeme rozhodnout o existenci a hodnotě $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Funkci f můžeme odhadnout nerovnostmi $0 \leq f(x) \leq x^2$. Protože $\lim\limits_{x\to 0} 0 = \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$, je podle věty 4.15 také $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ a funkce f je v bodě 0 spojitá. ▲

4.4. Spojitost funkce na intervalu

Limita funkce a spojitost funkce v bodě jsou lokálními vlastnostmi, protože popisují chování funkce v okolí daného bodu. Vyšetřujeme-li chování funkce na nějaké množině (nejčastěji intervalu), mluvíme o globální vlastnosti. Globální vlastností je například periodičnost nebo sudost/lichost funkce a také následující vlastnost.

Definice 4.32. Buď f funkce, $I \subseteq D(f)$ interval. Řekneme, že f je *spojitá na intervalu* I, jestliže je spojitá v každém vnitřním bodě intervalu I a patří-li levý (pravý) koncový bod do I, je v něm spojitá zprava (zleva). Píšeme $f \in C(I)$ a je-li $I = [a, b]$, také $f \in C[a, b]$.

Z věty 4.24 např. dostáváme, že polynom je spojitá funkce na $(-\infty, \infty)$, tg je spojitá funkce na $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Věta 4.33 (Weierstrassova věta). *Nechť $f \in C[a, b]$. Pak je f na tomto intervalu ohraničená a nabývá v něm své největší i nejmenší hodnoty.*

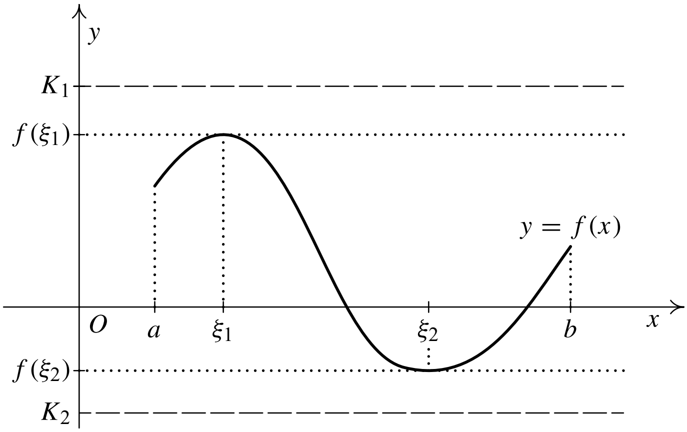
Důkaz. Nejprve ukážeme, že funkce f je ohraničená na intervalu $[a, b]$. Nechť f není ohraničená. Pak ke každému $n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in [a, b]$ takové, že $f(x_n) \geq n$. Podle věty 2.39 lze vybrat konvergentní podposloupnost $\{x_{n_k}\}$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = c \in [a, b]$. Z definice spojitosti a věty 4.8 vyplývá existence okolí $\mathscr{O}_\delta(c)$ takového, že f je ohraničená na $(c-\delta, c+ + \delta) \cap [a, b]$. Současně existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že pro $k > m$ je $x_{n_k} \in (c - \delta, c + \delta)$. Tedy f nabývá v $\mathscr{O}_\delta(c)$ libovolně velkých hodnot, což je spor.

Nyní ukážeme, že f nabývá svých extremálních hodnot. Ukážeme to např. pro maximum; důkaz pro minimum je obdobný. Podle první části důkazu je obor hodnot $H(f)$ shora ohraničená (a samozřejmě neprázdná) množina. Označme $d = \sup H(f)$. Připusťme, že $d \notin H(f)$. Pak pro $x \in [a, b]$ je $f(x) < d$, takže funkce $g(x) = \frac{1}{d-f(x)}$ je spojitá na $[a, b]$. To ale znamená, že $H(g)$ je shora ohraničená, tj. existuje $k > 0$ takové, že $0 < \frac{1}{d-f(x)} < k$. Odtud $f(x) < d - \frac{1}{k}$ a číslo $d - \frac{1}{k} < d$ je horní závora $H(f)$, což je spor. □

Geometrický význam Weierstrassovy věty je znázorněn na obr. 4.3. Je zřejmé, že bodů, v nichž funkce nabývá své největší resp. nejmenší hodnoty, může být i víc (např. funkce $\sin x$ na dostatečně dlouhém intervalu).

Poznámka 4.34. Následující příklady ukazují, že předpoklady ve Weierstrassově větě jsou podstatné a nejsou-li splněny, věta nemusí platit.

i) Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ je spojitá na intervalu $(0, 1)$, ale není zde ohraničená (interval $(0, 1)$ není uzavřený).
ii) Funkce $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ je na intervalu $[0, 1]$ ohraničená, ale nenabývá zde svého suprema (v tomto případě není splněn předpoklad spojitosti).



Obr. 4.3: Ilustrace Weierstrassovy věty

iii) Funkce $f(x) = x$ je spojitá na intervalu $[0, +\infty)$, ale není zde ohraničená (interval $[0, +\infty)$ není ohraničený).

Věta 4.35 (Bolzanova věta). *Nechť $f \in C[a, b]$. Pak f nabývá všech hodnot mezi svou největší a nejmenší hodnotou.*

Důkaz. Podle Weierstrassovy věty 4.33 existují $c_1, c_2 \in [a, b]$ taková, že $f(c_1) \leq f(x) \leq \leq f(c_2)$, $x \in [a, b]$. Stačí tedy ukázat, že pro libovolná $x_1, x_2 \in [a, b]$ a d ležící mezi $f(x_1)$ a $f(x_2)$ existuje $c \in [a, b]$ tak, že $f(c) = d$.

Nechť např. $x_1 < x_2$ a $f(x_1) < d < f(x_2)$. Označme $A = \{x \in [x_1, x_2] : f(x) < d\}$. Množina A je neprázdná, protože $x_1 \in A$, a shora ohraničená číslem x_2. Tedy existuje $\sup A = c \leq x_2$. Ukážeme, že $f(c) = d$.

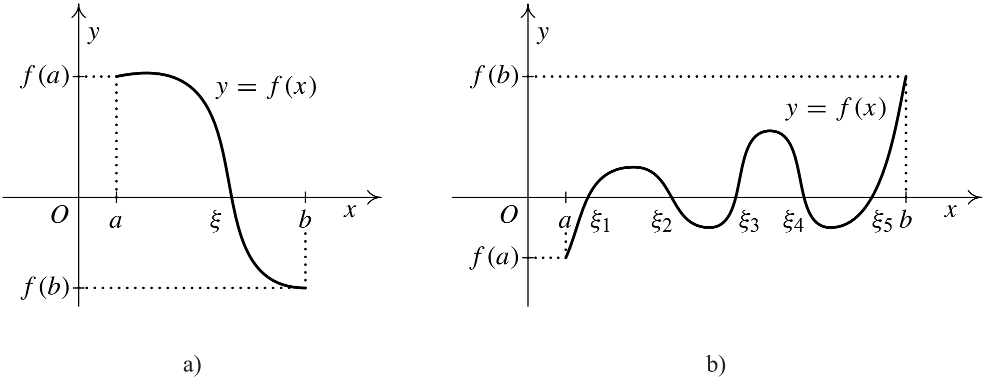
Předpokládejme, že $f(c) > d$. Ze spojitosti funkce f v bodě c plyne, že k číslu $\varepsilon = = f(c) - d > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro $x \in (c - \delta, c] \cap [x_1, x_2]$ je $f(x) > f(c) - \varepsilon = d$. To znamená, že libovolné $x \in (c - \delta, c) \cap [x_1, x_2]$ je horní závorou A, což je spor s definicí čísla c.

Předpokládejme nyní, že $f(c) < d$. Ze spojitosti funkce f v bodě c plyne, že k číslu $\varepsilon = d - f(c) > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro $x \in [c, c + \delta) \cap [x_1, x_2]$ je $f(x) < f(c) + \varepsilon = d$. To znamená, že libovolné $x \in (c, c + \delta) \cap [x_1, x_2]$ je prvkem A. To je opět spor s definicí čísla c. Musí tedy platit $f(c) = d$. □

Důsledek 4.36. *Je-li $f \in C[a, b]$ a $f(a)f(b) < 0$, pak existuje bod $\xi \in (a, b)$ takový, že $f(\xi) = 0$ — viz obr. 4.4.*

Poznámka 4.37. Označme $f(I) = \{f(x) : x \in I\}$. Z předchozích dvou vět vyplývá, že

- spojitá funkce zobrazuje interval I na bod nebo na interval $f(I)$,



Obr. 4.4: Ilustrace Bolzanovy věty

- spojitá funkce zobrazuje uzavřený ohraničený interval I na bod nebo na uzavřený interval $f(I)$,
- ryze monotonní spojitá funkce zobrazuje otevřený interval I na otevřený interval $f(I)$.

Případ, kdy funkce zobrazí interval na bod, nastane, je-li tato funkce konstantní. Není-li funkce ryze monotonní, může být obrazem otevřeného intervalu i uzavřený nebo polouzavřený interval. Např. funkce $y = \sin x$ zobrazuje otevřený interval $(-\pi, \pi)$ na uzavřený interval $[-1, 1]$ a otevřený interval $(0, \pi)$ na polouzavřený interval $(0, 1]$.

Příklad 4.38. Dokažte, že rovnice $x^3 - x - 1 = 0$ má v intervalu $(1, 2)$ řešení.

Řešení. Označme si $f(x) = x^3 - x - 1$. Polynom je spojitá funkce a pro hodnoty v krajních bodech intervalu $[1, 2]$ platí $f(1) = -1$, $f(2) = 5$ a $f(1)f(2) = -5 < 0$. Podle důsledku Bolzanovy věty 4.36 existuje $c \in (1, 2)$ tak, že $f(c) = 0$. Proto v intervalu $(1, 2)$ existuje číslo, který je řešením dané rovnice. ▲

Příklad 4.39. Dokažte, že pro obor hodnot exponenciální funkce $f\colon y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, platí $H(f) = (0, +\infty)$ — viz věta 3.24, tvrzení 2.

Řešení. Exponenciální funkce je ryze monotonní a spojitá (příklad 4.27) a $D(f) = \mathbb{R}$ je otevřený interval. Podle poznámky 4.37 je tudíž $H(f) = (\alpha, \beta)$, $0 \leq \alpha < \beta \leq \infty$.

Abychom ukázali, že $\beta = +\infty$, stačí ověřit, že funkce není shora ohraničená. Nechť např. $a > 1$. Položme $b = a - 1 > 0$. Pak podle Bernoulliovy nerovnosti (příklad 1.15) pro $n \in \mathbb{N}$ platí $a^n = (1+b)^n \geq 1+nb \to +\infty$ pro $n \to \infty$ a f je shora neohraničená. Díky monotonii dokonce $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$. Odtud už snadno plyne z pravidel pro počítání s limitami, že $\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to-\infty} 1/a^{-x} = \lim_{x\to+\infty} 1/a^x = 0$, což dává, že $\alpha = 0$.

Pro $0 < a < 1$ je $1/a > 1$, takže $\lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} (1/a)^{-x} = \lim_{x\to-\infty} (1/a)^x = 0$ a analogicky vyjde $\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$. ▲

Věta 4.40. *Nechť f je ryze monotonní a spojitá funkce na intervalu $I \subseteq D(f)$. Pak inverzní funkce f^{-1} je spojitá a ryze monotonní na intervalu $J = f(I)$.*

Důkaz. Z poznámky 4.37 vyplývá, že $J = f(I)$ je skutečně interval. Předpokládejme pro určitost, že f je rostoucí na I. Podle věty 1.46 je f^{-1} rostoucí na J. Nechť $x_1 \in J$ je libovolný bod, který není pravým koncovým bodem tohoto intervalu, a označme $y_1 = f^{-1}(x_1)$. Pak $y_1 \in I$, $f(y_1) = x_1$ a y_1 není pravým koncovým bodem intervalu I. Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné, ale takové, že $y_1 + \varepsilon \in I$. Položme $x_2 = f(y_1 + \varepsilon)$. Pak $x_2 \in J$ a protože f je rostoucí, je $x_2 = f(y_1 + \varepsilon) > f(y_1) = x_1$. Označme $x_2 - x_1 = \delta$. Pak $\delta > 0$ a pro $x \in [x_1, x_1 + \delta)$ platí nerovnost $f^{-1}(x_1) \le f^{-1}(x) < f^{-1}(x_1+\delta) = f^{-1}(x_2) = y_1+\varepsilon = f^{-1}(x_1)+\varepsilon$. Odtud $|f^{-1}(x) - f^{-1}(x_1)| < \varepsilon$, tj. f^{-1} je zprava spojitá v bodě x_1. Podobně dokážeme, že f^{-1} je zleva spojitá v každém bodě intervalu J, který není jeho levým koncovým bodem. Proto je f^{-1} spojitá na intervalu J. □

Důsledek 4.41. *Funkce* $\arcsin x$, $\arccos x$ *jsou spojité na* $[-1, 1]$*, funkce* $\operatorname{arctg} x$*,* $\operatorname{arccotg} x$ *spojité na* $\mathbb{R}$*, funkce* $\log_a x$*, $a > 0$, $a \ne 1$, je spojitá na* $(0, +\infty)$ *a funkce* x^s*, $s \in \mathbb{R}$, je spojitá na svém definičním oboru.*

Důkaz. Kromě obecné mocniny tvrzení plyne přímo z definic příslušných funkcí, z předchozí věty a z věty 4.24 a příkladu 4.27.

Pokud jde o obecnou mocninu, pro $x > 0$ je $x^s = \mathrm{e}^{s \ln x}$, takže pro $x > 0$ tvrzení plyne ze spojitosti exponenciální a logaritmické funkce a z věty 4.23. Je-li $s > 0$, $s \in \mathbb{Q}$, je podle věty 4.16 $\lim_{x\to0^+} \mathrm{e}^{s \ln x} = 0 = 0^s$, takže funkce je spojitá v nule zprava. Je-li definiční obor ještě širší (pak nutně $s \in \mathbb{Z}$), je funkce sudá nebo lichá, z čehož plyne opět spojitost na celém definičním oboru. □

Příklad 4.42. Vyšetřete spojitost funkcí $y = \log(x^2 + 1)$ a $y = x^x$.

Řešení.

1. Funkce $y = \log(x^2 + 1)$ je spojitá v každém $x \in \mathbb{R}$, protože funkce $z = x^2 + 1$ je spojitá pro každé $x \in \mathbb{R}$ a funkce $u = \log z$ je spojitá pro každé $z \in (0, +\infty)$.
2. Funkce $y = x^x$ je spojitá v každém bodě $x > 0$. Nejprve upravíme její předpis: $x^x = \left(\mathrm{e}^{\ln x}\right)^x = \mathrm{e}^{x \ln x}$. Funkce $z = \mathrm{e}^y$ je spojitá pro každé $y \in \mathbb{R}$ a funkce $y = x \ln x$ je spojitá pro každé $x > 0$. ▲

Poznámka 4.43. Z předchozích výsledků vyplývá, že všechny tzv. *elementární funkce*, tj.

— mnohočleny,
— exponenciální a logaritmické funkce,
— goniometrické a cyklometrické funkce,
— obecná mocnina

a všechny funkce, které z nich vzniknou konečným počtem aritmetických operací sečítání, odčítání, násobení a dělení a skládáním, jsou spojité na svých definičních oborech. Tedy limita takové funkce v daném bodě je rovna funkční hodnotě. Tuto skutečnost budeme v dalším textu mnohokrát mlčky využívat.

4.5. Body nespojitosti

Zaměřme se nyní na situaci, kdy daná funkce f není spojitá v bodě x_0. Předpokládejme, že je f definovaná na nějakém (ryzím) okolí bodu x_0. Podle definice pak neplatí, že $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Rozlišujeme následující situace, které mohou nastat:

1. Existuje vlastní limita $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, ale $a \neq f(x_0)$. Bod x_0 pak nazveme *bodem odstranitelné nespojitosti* funkce f. (Přitom připouštíme i situaci, kdy hodnota $f(x_0)$ není definována.)
2. Neexistuje vlastní limita $\lim_{x\to x_0} f(x)$. V tomto případě ještě rozlišujeme:
   a) Existují obě vlastní jednostranné limity $\lim_{x\to x_0+} f(x) = a_1$ a $\lim_{x\to x_0-} f(x) = a_2$, ale $a_1 \neq a_2$. V tomto případě bod x_0 nazýváme *bodem nespojitosti prvního druhu* funkce f.
   b) Alespoň jedna z jednostranných limit funkce f v bodě x_0 neexistuje nebo je nevlastní. Pak bod x_0 nazýváme *bodem nespojitosti druhého druhu* funkce f.

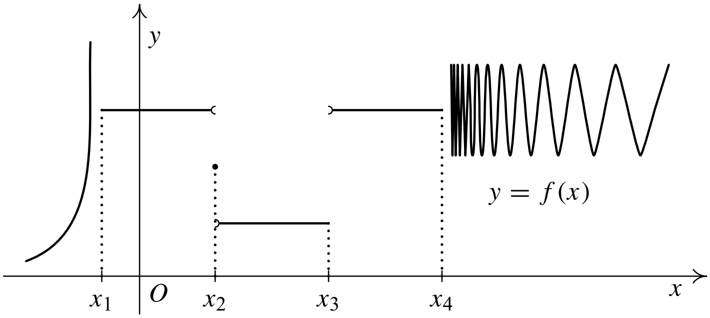
Nechť má funkce f v bodě x_0 odstranitelnou nespojitost a $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$. Pak můžeme definovat spojitou funkci g takto:

$$g(x) = \begin{cases} a & x = x_0, \\ f(x) & x \in D(f) \setminus \{x_0\}. \end{cases}$$

Říkáme, že jsme funkci f *spojitě dodefinovali* (případně předefinovali) v bodě x_0.

Na obr. 4.5 je znázorněn graf funkce mající čtyři body nespojitosti. V bodech x_2 a x_3 je nespojitost prvního druhu (jednostranné limity existují, ale jsou různé), v bodech x_1 a x_4 je nespojitost druhého druhu (v bodě x_1 je limita zleva nevlastní, v bodě x_4 limita zprava neexistuje).

Uveďme několik příkladů nespojitých funkcí:



Obr. 4.5: Body nespojitosti

1. Funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x$ má v bodě x_0 nespojitost prvního druhu, protože existují vlastní navzájem různé jednostranné limity.
2. Dirichletova funkce má nespojitost druhého druhu v každém bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, protože v žádném bodě neexistuje ani jedna její jednostranná limita.
3. Funkce $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ má v bodě 0 nespojitost druhého druhu, protože $\lim\limits_{x\to 0+} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = +\infty$ a $\lim\limits_{x\to 0-} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 0$, tj. jedna z jednostranných limit je nevlastní.
4. Funkce $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ má odstranitelnou nespojitost v bodě 1 (ukažte, že $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$). Jejím spojitým dodefinováním vznikne funkce $g(x) = x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Příklad 4.44. Určete definiční obor funkce f, body nespojitosti a jejich druh, je-li

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + x^n}.$$

Řešení. Nejprve zjistíme, kdy existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^n}$. Platí

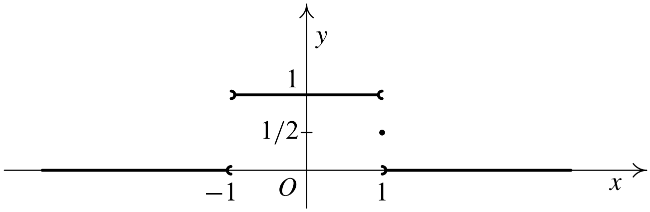
$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-1, 1), \\ 1 & \text{pro } x = 1, \\ +\infty & \text{pro } x \in (1, \infty), \\ \text{neexistuje} & \text{pro } x \in (-\infty, -1]. \end{cases}$$

Odtud plyne $(-1, \infty) \subseteq D(f)$ a funkce f je rovna

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in (-1, 1), \\ \frac{1}{2} & \text{pro } x = 1, \\ 0 & \text{pro } x \in (1, \infty). \end{cases}$$

Ukážeme ještě, že $(-\infty, -1) \subseteq D(f)$ (sami vysvětlete, proč $-1 \notin D(f)$). Pro $x < -1$ je $\lim\limits_{n\to\infty} |x|^n = +\infty$ a využitím nerovnosti $|x^n + 1| \geq |x|^n - 1$ dostáváme $\lim\limits_{n\to\infty} |x^n+1| = +\infty$, odkud plyne $\lim\limits_{n\to\infty} 1/|x^n+1| = 0$, proto také $\lim\limits_{n\to\infty} 1/(x^n+1) = 0$ (srv. cvičení 10). Tedy $f(x) = 0$ pro $x \in (-\infty, -1)$.

Bodem nespojitosti je bod $x = 1$, neboť $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1$, $f(1) = \frac{1}{2}$. Protože existují vlastní obě jednostranné limity a jsou různé, je bod 1 bodem nespojitosti prvního druhu. Podobně je bodem nespojitosti prvního druhu bod $x = -1$, neboť funkce f není v tomto bodě definovaná, $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = 1$ a $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = 0$, tj. obě jednostranné limity existují a jsou vlastní. Graf je na obr. 4.6. ▲



Obr. 4.6: Graf funkce z příkladu 4.44

4.6. Řešené příklady na limity

Příklad 4.45. Vypočtěte limity ($a_0 \neq 0$)

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^n + \cdots + a_n}{a_0x^n}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right)$, c) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x^2 - 5x + 6}$.

Řešení. a) Upravíme:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^n + \cdots + a_n}{a_0x^n} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{a_0} \cdot \frac{1}{x^n}\right) = 1.$$

b) Počítejme:

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{1 + x + x^2 - 3}{1 - x^3} =$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^2 + x - 2}{1 - x^3} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{1 - x^3} = \lim_{x\to 1} \frac{-(x+2)}{x^2 + x + 1} = -1.$$

c) Odstraníme odmocninu a dostáváme:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(x-2)(\sqrt{x+1}+2)}=$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{x+1-4}{(x-3)(x-2)(\sqrt{x+1}+2)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x-2)(\sqrt{x+1}+2)}=\frac{1}{4}\,.$$ ▲

Příklad 4.46. Vypočtěte limity

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^5-x^4}{\sqrt[3]{1+x^4}-1}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}$.

Řešení. a) Upravíme tak, abychom odstranili odmocninu ve jmenovateli

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x^5-x^4)\bigl(\sqrt[3]{(1+x^4)^2}+\sqrt[3]{1+x^4}+1\bigr)}{1+x^4-1}=$$
$$=\lim_{x\to 0}(x-1)\bigl(\sqrt[3]{(1+x^4)^2}+\sqrt[3]{1+x^4}+1\bigr)=-3.$$

b) Budeme postupovat podobně jako v předchozích příkladech, ale uděláme ještě šikovnou úpravu, která nám zjednoduší počítání:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x+x^2}+\frac{1-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}\right)=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-1}{x(1+x)\bigl(\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1\bigr)}+$$
$$+\lim_{x\to 0}\frac{1-1+2x}{x(x+1)\bigl(\sqrt[4]{(1-2x)^3}+\sqrt[4]{(1-2x)^2}+\sqrt[4]{1-2x}+1\bigr)}=$$
$$=\frac{0}{3}+\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\,.$$ ▲

Příklad 4.47. Pro $a>b\ge 0$ vypočtěte

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}\,.$$

Řešení. Je

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}=\lim_{x\to a}\frac{x-b-a+b}{(x-a)(x+a)\bigl(\sqrt{x-b}+\sqrt{a-b}\bigr)}=$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{1}{(x+a)\bigl(\sqrt{x-b}+\sqrt{a-b}\bigr)}=\frac{1}{4a\sqrt{a-b}}\,.$$ ▲

Příklad 4.48. Vypočtěte limity

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1-\operatorname{tg} x}}{\sin x}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$.

Řešení. a) Odstraníme odmocninu a upravíme:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1-\operatorname{tg} x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{tg} x}{\sin x\left(\sqrt{1+\operatorname{tg} x}+\sqrt{1-\operatorname{tg} x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2}{\cos x\left(\sqrt{1+\operatorname{tg} x}+\sqrt{1-\operatorname{tg} x}\right)} = \frac{2}{2} = 1.$$

b) Postupujeme podobně:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{2-1-\cos x}{\sin^2 x\left(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}\right)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin^2 x\left(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{\sin^2 x(1+\cos x)\left(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}\right)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{(1+\cos x)\left(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}\right)} = \frac{1}{2\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)} = \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

▲

Příklad 4.49. Vypočtěte následující limity:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$, c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x}$.

Řešení. Použijeme věty 4.16 a 4.21 a výsledek příkladu 4.25.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} \cdot \dfrac{1}{\cos x} = 1\cdot 1 = 1.$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{y}{\operatorname{tg} y} = 1.$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{\sin(\arcsin x)} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{y}{\sin y} = 1.$

Funkce tg, arctg a arcsin mají společnou vlastnost, že jsou v okolí bodu 0 blízké funkci x (srv. definici 7.15). ▲

Cvičení

1. Vypočítejte limity

   a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$.

2. Pro libovolné $a \in R$ vypočítejte limitu

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x .$$

3. Vypočítejte následující limity

a) $\displaystyle\lim_{x\to 6}\frac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$, c) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{2-\sqrt{x+3}}{x^3-1}$.

4. Určete jednostranné limity

a) $\displaystyle\lim_{x\to -1^-}\frac{1}{x+1}$, $\displaystyle\lim_{x\to -1^+}\frac{1}{x+1}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to 2^-}\frac{|x-2|}{x-2}$, $\displaystyle\lim_{x\to 2^+}\frac{|x-2|}{x-2}$.

5. Vypočítejte následující limity

a) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}(\sqrt{x^4+1}-x^2)$, b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt[3]{1-x^3}+x\right)$,

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$, d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\left[\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right]$, $a, b \in \mathbb{R}$,

e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$, f) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right)$,

g) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$, h) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)$.

6. Jak je nutno dodefinovat funkci

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^3-1}$$

v bodě 1 tak, aby byla spojitá na celém $\mathbb{R}$?

7. Určete, v kterém bodě $x \in \mathbb{R}$ je následující funkce spojitá:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{pro } x \in \mathbb{I},\\ x & \text{pro } x \in \mathbb{Q}.\end{cases}$$

8. Dokažte, že je funkce f spojitá v celém $\mathbb{R}$, je-li

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & \text{pro } x \neq 0,\\ 0 & \text{pro } x = 0.\end{cases}$$

9. Jakého druhu je nespojitost v bodě $x_0 = 0$ funkcí

a) $y=\dfrac{\sin x}{x}$, b) $y=\dfrac{\cos x}{x}$, c) $y=\lfloor x\rfloor$, d) $y=\dfrac{e^{1/x}+1}{e^{1/x}-1}$.

10. Dokažte, že $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ právě tehdy, když $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = 0$.

11. Najděte příklad spojité funkce f na intervalu $[0, +\infty)$ takové, že obor hodnot je

    a) ohraničený polouzavřený interval, b) ohraničený otevřený interval.

12. Dokažte tvrzení 2 z poznámky 1.34.

13. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to x_0} \rho(x)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, kde $\rho(x)$ je Riemannova funkce z poznámky 1.34. Určete body spojitosti resp. body nespojitosti a jejich druh u této funkce.

14. Pro hyperbolické funkce — viz cvičení 18 z kapitoly 3 — vypočtěte:

    a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$, $f = \sinh, \cosh, \operatorname{tgh}$,

    b) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x)$, $f = \sinh, \cosh, \operatorname{tgh}, \operatorname{cotgh}$, $\lim\limits_{x\to 0^{\pm}} \operatorname{cotgh} x$.

15. Najděte příklad funkce, která splňuje předpoklady důsledku 4.36, má nekonečně mnoho nulových bodů, ale není konstantní na žádném podintervalu.

16. Rozhodněte, zda je možné, aby funkce $g[f(x)]$ byla spojitá v x_0, je-li

    a) f nespojitá v x_0, b) g nespojitá v $f(x_0)$,
    c) f nespojitá v x_0 a g nespojitá v $f(x_0)$.

17. Nechť funkce f a g jsou spojité v bodě x_0. Dokažte, že pak také funkce $\max\{f, g\}$ a $\min\{f, g\}$ jsou spojité v tomto bodě.

*

Nejkratší matematický vtip: „Nechť epsilon je záporné. . . “

*

Ptali se studenta matematiky: „Proč jste se neučil?“ A student odpověděl: „Byl jsem schopen dostat se libovolně blízko k učebnici, ale ne až k ní.“

Kapitola 5

Derivace funkce

Derivace funkce patří spolu s pojmy limita a spojitost funkce k základním pojmům diferenciálního počtu. Nejprve si ukážeme historickou motivaci pro zavedení tohoto pojmu. Poté dokážeme věty o derivaci, odvodíme derivace elementárních funkcí a uvedeme *věty o střední hodnotě* popisující vlastnosti funkce pomocí její derivace na intervalu. Ukážeme, jak lze počítat limity podílu dvou funkcí pomocí derivací — tzv. *l'Hospitalovo pravidlo*.

5.1. Derivace a její geometrický význam

K pojmu derivace funkce vede celá řada geometrických a fyzikálních úloh. Jedna z nejstarších (tzv. základní úloha diferenciálního počtu) je nalézt tečnu ke grafu známé funkce f. Sečna grafu je přímka určená bodem $T = (x_0, f(x_0))$ a dalším libovolným bodem grafu $(x, f(x))$. Tečnou s bodem dotyku T rozumíme limitní polohu zmíněné sečny, kdy se bod x blíží k bodu x_0 — viz obr. 5.1. Ukažme, jaká je směrnice této tečny.

Připomeňme, že přímka procházející body (x_0, y_0) a (x_1, y_1), $x_0 \neq x_1$, má směrnici

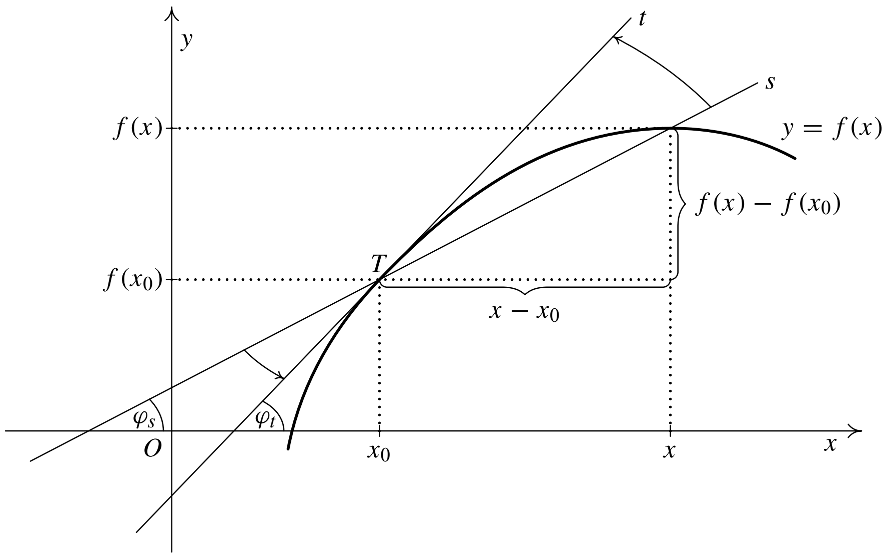
$$k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \operatorname{tg} \varphi,$$

kde φ je úhel, který svírá přímka s kladným směrem osy x. Tato přímka je potom dána rovnicí

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{5.1}$$

Proto směrnice uvažované sečny je

$$k_s = \operatorname{tg} \varphi_s = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



Obr. 5.1: Geometrický význam derivace

a směrnice tečny

$$k_t = \operatorname{tg} \varphi_t = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

To ukazuje, že je účelné vyšetřovat takové limity (pro spojité funkce jsou typu $\frac{0}{0}$).

Definice 5.1. Buď f funkce a bod $x_0 \in D(f)$. Existuje-li

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \tag{5.2}$$

nazýváme tuto limitu *derivací funkce f v bodě x_0* a značíme $f'(x_0)$.
Je-li limita (5.2) vlastní, nazývá se číslo $f'(x_0)$ *vlastní derivací* funkce f v bodě x_0, je-li limita (5.2) nevlastní, nazývá se $f'(x_0)$ *nevlastní derivací* funkce f v bodě x_0.

Derivaci značíme též $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$ (důvodem je souvislost s diferenciálem, viz str. 156) nebo $\big(f(x)\big)'_{x=x_0}$.

Podobně definujeme jednostranné derivace

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \qquad f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Poznámka 5.2. Bezprostředně z definice derivace plynou tyto důležité vlastnosti derivace funkce:

i) Má-li funkce derivaci v bodě x_0, je definovaná v jistém okolí tohoto bodu.
ii) Libovolná funkce má v libovolném bodě nejvýše jednu derivaci.
iii) Derivace je lokální vlastnost, popisuje růst/pokles funkce v okolí daného bodu. Například, jestliže existuje okolí $\mathscr{O}(x_0)$ tak, že $f = g$ na $\mathscr{O}(x_0)$, pak platí $f'(x_0) = A$ právě tehdy, když $g'(x_0) = A$.
iv) Položíme-li $h = x - x_0$ v (5.2), lze definici derivace psát ve tvaru

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

v) Funkce f má v x_0 derivaci právě tehdy, když má v x_0 obě jednostranné derivace a ty jsou si rovny, tj. $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

Geometrický význam derivace. Ze způsobu, jakým jsme zavedli pojem derivace, plyne, že funkce f má v bodě x_0 vlastní derivaci právě tehdy, když má graf v bodě $(x_0, f(x_0))$ tečnu se směrnicí $f'(x_0)$. Dosadíme-li do (5.1), dostáváme rovnici této tečny v bodě $T = (x_0, f(x_0))$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Pro směrnice k_1, k_2 dvou navzájem kolmých přímek platí $k_1 k_2 = -1$. Proto rovnice normály, tj. přímky kolmé k tečně a procházející dotykovým bodem, je

$$\begin{aligned} y &= f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), && \text{je-li } f'(x_0) \neq 0 \ \text{(viz obr. 5.2 a))}, \\ x &= x_0, && \text{je-li } f'(x_0) = 0 \ \text{(viz obr. 5.2 b))}. \end{aligned}$$

Má-li funkce v daném bodě nevlastní derivaci, tj. $f'(x_0) = \pm\infty$, a je-li v tomto bodě spojitá (viz poznámka 5.8, iii)), pak je tečna ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $(x_0, f(x_0))$ rovnoběžná s osou y. Proto rovnice tečny a normály tehdy jsou

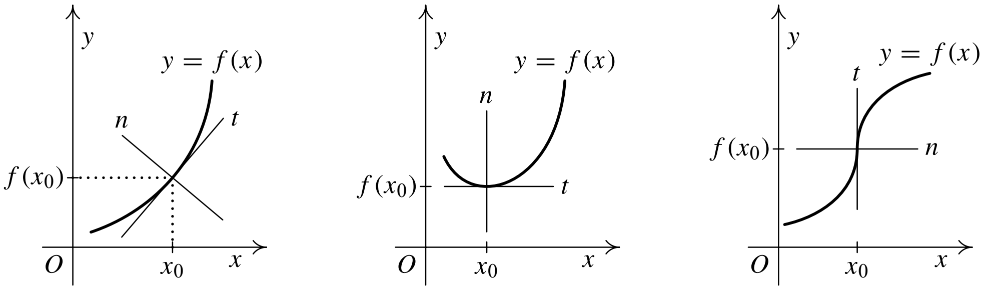
$$\begin{aligned} \text{tečna:} \quad & x = x_0, \\ \text{normála:} \quad & y = f(x_0) \ \text{(viz obr. 5.2 c))}. \end{aligned}$$

Příklad 5.3. Z definice odvoďte derivaci funkce $f\colon y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, v libovolném bodě x_0.

Řešení. Počítáme limitu

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + x x_0^{n-2} + x_0^{n-1})}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \to x_0} (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + x x_0^{n-2} + x_0^{n-1}) = n x_0^{n-1}. \end{aligned}$$

▲



a) $f'(x_0) \neq 0$, $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ b) $f'(x_0) = 0$ c) $f'(x_0) = +\infty$ (f spojitá v x_0)

Obr. 5.2: Tečna a normála ke grafu funkce

Příklad 5.4. Napište rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = x^2$ procházejících bodem $(1, 1)$.

Řešení. Platí $f(1) = 1$, takže půjde o bod dotyku. Rovnice tečny má tvar $y - 1 = f'(1)(x - 1)$. Podle příkladu 5.3 je $f'(x) = 2x$, po dosazení $f'(1) = 2$. Odtud dostáváme rovnici tečny $y = 2x - 1$ a normály $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$. ▲

Příklad 5.5. Rozhodněte, zda má funkce $f(x) = |x|$ v bodě $x_0 = 0$ derivaci.

Řešení. Určíme jednostranné derivace:

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1, \qquad f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$

Protože jsou tyto derivace navzájem různé, funkce $|x|$ nemá derivaci v bodě 0 — viz. obr. 1.3 a). Takový bod, v němž „polotečny“ existují, ale jejich směrové vektory jsou nekolineární, se nazývá *úhlový bod.* ▲

Příklad 5.6. Z definice derivace vypočtěte derivace funkcí $\sqrt[3]{x}$ a $\sqrt[3]{x^2}$ v bodě 0.

Řešení.

1. Pro derivaci funkce $f(x) = \sqrt[3]{x}$ v bodě $x_0 = 0$ dostáváme dosazením do (5.2)

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty,$$

tj. daná funkce má nevlastní derivaci $+\infty$. Její tečnou je osa y, tj. přímka $x = 0$.

2. Ukážeme, že derivace funkce $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ v bodě $x_0 = 0$ neexistuje. Nejprve vypočteme jednostranné derivace

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty, \qquad f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\infty.$$

   Odtud plyne, že funkce $\sqrt[3]{x^2}$ nemá derivaci v bodě 0. Přitom funkce je spojitá, takže má „polotečny“, které splývají s kladnou poloosou y. Bod, ve kterém nastane obdobná situace, se nazývá *bod vratu.* ▲

Fyzikální význam derivace. Předpokládejme, že v časovém intervalu $[t_1, t_2]$ se po přímce pohybuje zleva doprava hmotný bod, jehož poloha v čase t je určena souřadnicí $x(t)$ bodu dané přímky. Průměrná rychlost v daném časovém intervalu je

$$v_p = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Okamžitou rychlost v_o v nějakém čase t_0 zjistíme tak, že budeme „zmenšovat“ velikost časového intervalu, tj. budeme se „blížit k bodu t_0“. Vyjádřeno matematicky pomocí limity

$$v_o = \lim_{t\to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = x'(t_0).$$

Vidíme, že fyzikální význam derivace je v tomto případě okamžitá rychlost hmotného bodu. Podobně obecněji, jestliže $f(t)$ je fyzikální skalární veličina závisející na čase, charakterizuje $f'(t)$ okamžitou velikost její změny v čase t.

5.2. Věty o derivaci

V tomto odstavci uvedeme věty o derivaci funkce v daném bodě. Vztah mezi derivací a spojitostí funkce popisuje následující věta.

Věta 5.7. *Má-li funkce f v bodě x_0 vlastní derivaci, pak je v tomto bodě spojitá.*

Důkaz. Předpokládejme, že existuje $f'(x_0) \neq \pm\infty$. Podle definice spojitosti máme dokázat, že $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Platí

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} f(x) &= \lim_{x\to x_0} \big(f(x) - f(x_0) + f(x_0)\big) = \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) + \lim_{x\to x_0} f(x_0) = \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x\to x_0} (x - x_0) + f(x_0) = \\
&= f'(x_0) \cdot 0 + f(x_0) = f(x_0).
\end{aligned}$$

□

Poznámka 5.8.

i) Analogické tvrzení platí pro jednostranné derivace a jednostranné spojitosti.

ii) Obráceně věta neplatí: funkce může být spojitá, ale nemusí mít derivaci! Například funkce $f(x) = |x|$ je spojitá v bodě 0, neboť $\lim\limits_{x\to 0^+} |x| = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$ a $\lim\limits_{x\to 0^-} |x| = \lim\limits_{x\to 0^-} -x = 0$, ale nemá v bodě 0 derivaci — viz příklad 5.5.

iii) Předpoklad, že má funkce vlastní derivaci, je ve větě 5.7 důležitý. Z existence nevlastní derivace neplyne spojitost funkce v daném bodě. Splňuje-li funkce f podmínku $f'(x_0) = \pm\infty$ může (ale nemusí) být v bodě x_0 spojitá.
Uvedeme dva příklady. Funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x$ má jednostranné derivace v bodě $x_0 = 0$:

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sgn} x - 0}{x - 0} = \frac{1}{+0} = +\infty,$$
$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sgn} x - 0}{x - 0} = \frac{-1}{-0} = +\infty.$$

Proto existuje derivace $f'(0)$ a je rovna $+\infty$. Přitom funkce $\operatorname{sgn} x$ není v bodě 0 spojitá — viz obr. 1.3 c).
Naopak funkce $f(x) = \sqrt[3]{x}$ má v bodě $x_0 = 0$ nevlastní derivaci — viz příklad 5.6 — a přitom je v bodě 0 spojitá.

Věta 5.9. *Nechť mají funkce f, g v bodě x_0 vlastní derivaci. Pak platí:*

1. $\big(cf(x)\big)'_{x=x_0} = cf'(x_0)$,
2. $\big(f(x) \pm g(x)\big)'_{x=x_0} = f'(x_0) \pm g'(x_0)$,
3. $\big(f(x) \cdot g(x)\big)'_{x=x_0} = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$,
4. *Je-li* $g(x_0) \neq 0$, *pak* $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

Důkaz. Vyjdeme z definice derivace:

1. Platí

$$\big(cf(x)\big)'_{x=x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{cf(x) - cf(x_0)}{x - x_0} = c \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = cf'(x_0).$$

2. Podobně

$$\begin{aligned}\big(f(x) \pm g(x)\big)'_{x=x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) \pm g(x) - f(x_0) \mp g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \pm \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= f'(x_0) \pm g'(x_0),\end{aligned}$$

3. Dále

$$
\begin{aligned}
\big(f(x)g(x)\big)'_{x=x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \\
&= \lim_{x\to x_0} g(x) \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x\to x_0} f(x_0) \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \\
&= g(x_0)f'(x_0) + f(x_0)g'(x_0).
\end{aligned}
$$

4. Funkce g má v x_0 derivaci, je tudíž v x_0 spojitá, $g(x_0) \neq 0$, proto existuje okolí $\mathscr{O}(x_0)$ takové, že $g(x) \neq 0$ pro všechna $x \in \mathscr{O}(x_0)$. Podle definice derivace je

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'_{x=x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} = \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{\big(g(x)\cdot g(x_0)\big)(x - x_0)} = \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} \cdot \frac{1}{g(x)\cdot g(x_0)} = \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)\cdot g(x_0)} \cdot \left(\lim_{x\to x_0} g(x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \lim_{x\to x_0} f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right) \\
&= \frac{1}{g^2(x_0)}\big(g(x_0)f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)\big).
\end{aligned}
$$

□

Poznámka 5.10.

i) Má-li funkce f pro všechna $x \in M \subseteq D(f)$ vlastní derivaci $f'(x)$, pak $y = f'(x)$ je funkce definovaná na M. Z předchozí věty plyne: Mají-li funkce f, g na množině M derivaci, pak na M platí $(cf)' = cf'$, $(f \pm g)' = f' \pm g'$, $(fg)' = f'g + fg'$ a pokud $g \neq 0$, $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$.

ii) Předchozí větu lze indukcí rozšířit pro n funkcí:

$$(c_1 f_1 + \cdots + c_n f_n)' = c_1 f_1' + \cdots + c_n f_n' ,$$

$$(f_1 \cdot \cdots \cdot f_n)' = f_1' f_2 \cdots f_n + f_1 f_2' \cdots f_n + \cdots + f_1 \cdots f_n' .$$

Například $(3x^4 - x^3 + 1)' = 12x^3 - 3x^2$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Před důkazem vět o derivaci složené a inverzní funkce uvedeme následující ekvivalentní definici vlastní derivace, která nám umožní tyto věty elegantně dokázat.

Lemma 5.11 (Carathéodory). *Funkce f má v bodě x_0 vlastní derivaci právě tehdy, když existuje funkce φ definovaná na nějakém okolí $\mathscr{O}(x_0)$, která je spojitá v bodě x_0 a taková, že pro každé $x \in \mathscr{O}(x_0)$ platí*

$$f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0). \tag{5.3}$$

Existuje-li taková funkce φ, pak platí $f'(x_0) = \varphi(x_0)$.

Důkaz. Nechť existuje vlastní $f'(x_0)$. Pro $x \in \mathscr{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ musí mít hledaná funkce vzhledem k (5.3) tvar $\varphi(x) = \big(f(x) - f(x_0)\big)\big/(x - x_0)$. Pro $x = x_0$ položíme $\varphi(x_0) = f'(x_0)$. Pak

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = \varphi(x_0),$$

tedy funkce φ má požadované vlastnosti.

Naopak, pokud existuje taková funkce, vyjádříme ji z (5.3) a vypočteme týmž postupem její limitu v bodě x_0. Ta podle předpokladu existuje, takže existuje i $f'(x_0)$ a je rovna $\varphi(x_0)$. □

Věta 5.12. *Nechť funkce $u = g(x)$ má vlastní derivaci v bodě x_0 a nechť funkce $y = f(u)$ má vlastní derivaci v bodě $u_0 = g(x_0)$. Pak složená funkce $y = F(x) = f[g(x)]$ má vlastní derivaci v bodě x_0 a platí:*

$$F'(x_0) = f'(u_0) \cdot g'(x_0) = f'[g(x_0)] \cdot g'(x_0).$$

Důkaz. Podle lemmatu 5.11 existují funkce ψ a φ takové, že

$$\begin{aligned} g(x) - g(x_0) &= \psi(x)(x - x), &\qquad x &\in \mathscr{O}_1(x_0), &\qquad \psi(x_0) &= g'(x_0),\\ f(u) - f(u_0) &= \varphi(u)(u - u_0), & u &\in \mathscr{O}_2(u_0), & \varphi(u_0) &= f'(u_0), \end{aligned}$$

kde $\mathscr{O}_1(x_0)$ a $\mathscr{O}_2(u_0)$ jsou vhodná okolí. Funkce ψ je spojitá v bodě x_0 a funkce φ je spojitá v bodě u_0. Podle věty 5.7 je funkce g spojitá v bodě x_0 a funkce f je spojitá v bodě u_0. Lze tedy předpokládat (po případném zmenšení okolí $\mathscr{O}_1(x_0)$), že pro $x \in \mathscr{O}_1(x_0)$ je $g(x) \in \mathscr{O}_2(u_0)$. Pak

$$f[g(x)] - f[g(x_0)] = \varphi[g(x)](g(x) - g(x_0)) = \varphi[g(x)]\psi(x)(x - x_0)$$

pro $x \in \mathscr{O}_1(x_0)$. Položme $\omega(x) = \varphi[g(x)]\psi(x)$. Z vět 4.21 a 4.23 plyne, že ω je spojitá v bodě x_0. Přitom $F(x) - F(x_0) = \omega(x)(x - x_0)$. Podle lemmatu 5.11 existuje tudíž $F'(x_0)$ a je rovna $\omega(x_0) = \varphi[g(x_0)]\psi(x_0) = f'[g(x_0)]g'(x_0)$. □

Poznámka 5.13. Předchozí větu lze opět rozšířit i pro vícenásobně složené funkce. Např. pro čtyřnásobně složenou funkci je:

$$\Big[f\Big(g\Big\{h[\varphi(x_0)]\Big\}\Big)\Big]' = f'\Big(g\Big\{h[\varphi(x_0)]\Big\}\Big) \cdot g'\Big\{h[\varphi(x_0)]\Big\} \cdot h'[\varphi(x_0)] \cdot \varphi'(x_0).$$

Věta 5.14. *Nechť funkce $x = f(y)$ je spojitá a ryze monotonní na intervalu I. Nechť y_0 je vnitřní bod intervalu I a nechť má f v y_0 derivaci $f'(y_0)$. Pak má inverzní funkce $y = f^{-1}(x)$ v bodě $x_0 = f(y_0)$ rovněž derivaci.*

(i) *Je-li* $f'(y_0) \neq 0$, *je derivace inverzní funkce vlastní a platí*

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(y_0)}\,.$$

(ii) *Je-li* $f'(y_0) = 0$, *je derivace inverzní funkce nevlastní, přičemž* $(f^{-1})'(x_0) = +\infty$ *pro* f *rostoucí a* $(f^{-1})'(x_0) = -\infty$ *pro* f *klesající.*

Obdobné tvrzení platí i pro jednostranné derivace.

Důkaz. Podle lemmatu 5.11 existuje funkce φ spojitá v bodě y_0 tak, že v jistém okolí $\mathscr{O}_1(y_0)$ platí

$$f(y) - f(y_0) = \varphi(y)(y - y_0) \quad \text{a} \quad f'(y_0) = \varphi(y_0). \tag{5.4}$$

Podle poznámky 4.37 je inverzní funkce f^{-1} definovaná opět na intervalu a podle věty 4.40 je spojitá a ryze monotonní. Tedy $x_0 = f(y_0)$ je vnitřní bod intervalu $D(f^{-1})$ a existuje okolí $\mathscr{O}_2(x_0)$ tak, že pro $x \in \mathscr{O}_2(x_0)$ je $f^{-1}(x) \in \mathscr{O}_1(y_0)$. Dosadíme-li $y = f^{-1}(x)$ do (5.4), dostaneme

$$x - x_0 = \varphi[f^{-1}(x)]\big(f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)\big), \qquad x \in \mathscr{O}_2(x_0). \tag{5.5}$$

Protože f je ryze monotonní, je z (5.4) vidět, že pro $y \neq y_0$ je $\varphi(y) \neq 0$. Proto pro $x \in \mathscr{O}_2(x_0) \setminus \{x_0\}$ podle (5.5) platí

$$f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0) = \frac{1}{\varphi[f^{-1}(x)]}(x - x_0). \tag{5.6}$$

Předpokládejme nejprve, že $f'(y_0) \neq 0$. Označme $\psi(x) = 1/\varphi[f^{-1}(x)]$, $x \neq x_0$ a položme $\psi(x_0) = 1/f'(y_0)$. Z vět 4.21 a 4.23 plyne, že funkce ψ je spojitá v bodě x_0 a z (5.6) dostaneme

$$f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0) = \psi(x)(x - x_0), \qquad x \in \mathscr{O}_2(x_0).$$

Podle lemmatu 5.11 má tedy f^{-1} derivaci v bodě x_0 a platí $(f^{-1})'(x_0) = \psi(x_0)$.

Nechť nyní $f'(y_0) = 0$ a f je např. rostoucí. Pak pro $x \neq 0$ je podle (5.5) $\varphi[f^{-1}(x)] > 0$ a podle věty 4.23 je $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi[f^{-1}(x)] = \varphi(y_0) = f'(y_0) = 0$. Vzhledem k poznámce 4.14 dostaneme z (5.6)

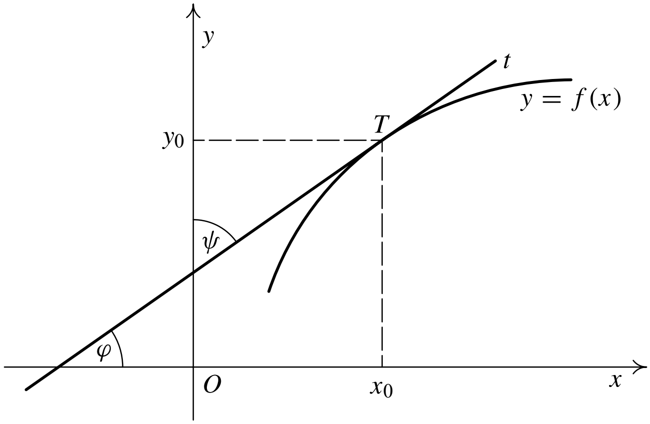
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\varphi[f^{-1}(x)]} = +\infty.$$

□

Tvrzení předchozí věty má názorný geometrický význam. Na obr. 5.3 platí pro $f'(x_0) \neq 0$, že $\operatorname{tg}\varphi = f'(x_0)$ a $\operatorname{tg}\psi = (f^{-1})'(x_0)$. Protože $\varphi + \psi = \pi/2$, platí

$$(f^{-1})'(x_0) = \operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}\Big(\frac{\pi}{2} - \varphi\Big) = \operatorname{cotg}\varphi = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{1}{f'(x_0)}\,.$$

Pochopitelně tento obrázek nemůže nahradit výše uvedený korektní důkaz.



Obr. 5.3: Geometrický význam derivace inverzní funkce

Protože podle poznámky 5.10 lze vlastní derivaci funkce f chápat jako funkci, můžeme definovat její derivaci v nějakém bodě x_0; tu pak nazýváme druhou derivací funkce f v bodě x_0 a značíme $f''(x_0)$. Rovněž vlastní druhou derivaci lze chápat jako funkci f'' na množině $D(f'') \subseteq D(f')$. Ta může mít opět derivaci v některém bodě atd.

Obecně definujeme:

Definice 5.15. *Druhou derivací* funkce f rozumíme funkci $f'' = (f')'$ a pro libovolné $n \geq 2$ definujeme *n-tou derivaci* (*derivaci n-tého řádu*) funkce f vztahem $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Příklad 5.16. Vypočtěte n-tou derivaci funkce $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Řešení. Podle příkladu 5.3 je pro každé $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = nx^{n-1}, \quad f''(x) = n(n-1)x^{n-2}, \quad \dots, \quad f^{(n)}(x) = n!\,. \qquad \blacktriangle$$

Příklad 5.17. Vypočtěte derivace všech řádů polynomu $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 7$.

Řešení. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$f'(x) = 6x^2 - 6x + 5, \quad f''(x) = 12x - 6, \quad f'''(x) = 12, \quad f''''(x) = 0.$$

Odtud $f^{(n)} = 0$ (nulový polynom) pro libovolné $n \geq 4$.

Všimněte si, že obdobnou vlastnost má každý polynom. Je-li st $P = n$, pak $P^{(m)}$ je nulový polynom pro každé $m \geq n + 1$. ▲

5.3. Derivace elementárních funkcí

Věta 5.18. *Pro derivace elementárních funkcí platí:*

$$c' = 0,$$

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x,$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x^2+1}, \qquad (\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{x^2+1},$$

$$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x, \qquad (a^x)' = a^x \cdot \ln a,$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \qquad \left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a},$$

$$(x^a)' = a x^{a-1}, \qquad (a \in \mathbb{R}).$$

Tyto vzorce platí všude tam, kde jsou příslušné funkce definovány.

Důkaz. První vzorec plyne bezprostředně z definice derivace.

(a) Goniometrické funkce. Z definice derivace s použitím příkladu 4.25 platí

$$(\sin x)'_{x=x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} \lim_{x\to x_0} \cos\frac{x+x_0}{2} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \lim_{x\to x_0} \cos\frac{x+x_0}{2} = 1 \cdot \cos x_0 = \cos x_0.$$

Protože $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$, plyne z věty o derivaci složené funkce $(\cos x)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$. Derivaci funkce tg pak dostaneme z derivace podílu $\frac{\sin x}{\cos x}$ a derivaci funkce cotg z derivace podílu $\frac{\cos x}{\sin x}$.

(b) Cyklometrické funkce. Podle věty o derivaci inverzní funkce 5.14 platí

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y},$$

kde $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Proto $\cos y > 0$ a $\frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Podle příkladu 3.19 platí $(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Podobně

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

a odtud již $(\operatorname{arccotg} x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg} x\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

(c) Exponenciální funkce. Opět vyjdeme z definice derivace. Pro funkci e^x dostáváme

$$(\mathrm{e}^x)'_{x=x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x_0+h} - \mathrm{e}^{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \mathrm{e}^{x_0} \cdot \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = \mathrm{e}^{x_0} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = \mathrm{e}^{x_0}.$$

Poznamenejme, že jsme v posledním kroku využili znalost limity z příkladu 4.26. Pro derivaci funkce a^x použijeme větu o složené funkci a dostáváme $(a^x)' = (\mathrm{e}^{x \ln a})' = \mathrm{e}^{x \ln a}(x \ln a)' = a^x \ln a$.

(d) Logaritmická funkce. Použijeme větu o derivaci inverzní funkce, podle které

$$(\ln x)' = \frac{1}{(\mathrm{e}^y)'} = \frac{1}{\mathrm{e}^y} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

Odtud pak

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

(e) Mocninná funkce. Podle definice mocninné funkce a věty o derivaci složené funkce dostáváme

$$(x^a)' = (\mathrm{e}^{a \ln x})' = \mathrm{e}^{a \ln x}(a \ln x)' = x^a a \frac{1}{x} = a x^{a-1}.$$

□

Příklad 5.19. Vypočtěte derivace následujících funkcí:

a) $\sin[\sin(\sin x)]$, b) $x\sqrt{1+x^2}$, c) $\mathrm{e}^x(x^2 - 2x + 2)$,

d) $\dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, $a \neq 0$, e) $\sqrt[5]{x}$, f) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^x$.

Řešení. Vzhledem k předchozí větě platí:

a) $\big(\sin[\sin(\sin x)]\big)' = \cos[\sin(\sin x)] \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos x, \quad x \in \mathbb{R}$,

b) $\big(x\sqrt{1+x^2}\big)' = \sqrt{1+x^2} + x \cdot \dfrac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} 2x = \dfrac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$,

c) $\big(\mathrm{e}^x(x^2 - 2x + 2)\big)' = \mathrm{e}^x(x^2 - 2x + 2) + \mathrm{e}^x(2x - 2) = \mathrm{e}^x x^2, \quad x \in \mathbb{R}$,

d) $\left(\dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)' = \dfrac{\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}}{a^2 - x^2} = \dfrac{a^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}, \quad |x| < |a|$,

e) $\big(\sqrt[5]{x}\big)' = \big(x^{\frac{1}{5}}\big)' = \dfrac{1}{5} x^{-\frac{4}{5}} = \dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}, \quad x \neq 0$,

f) $\left(\left(\dfrac{1}{5}\right)^x\right)' = \left(\dfrac{1}{5}\right)^x \ln \dfrac{1}{5} = -\dfrac{\ln 5}{5^x}, \quad x \in \mathbb{R}$.

▲

Poznámka 5.20. Stejným způsobem, jako jsme odvodili derivaci obecné mocniny, derivujeme funkci $y(x) = f(x)^{g(x)}$ (tzv. „funkce na funkci“), kde $f(x) > 0$. Úpravou na exponenciální funkci dostáváme

$$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = \left(\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}\right)' = f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right).$$

Příklad 5.21. Derivujte funkce $y = x^x$ a $y = x^{x^x}$, $x > 0$.

Řešení. Upravíme na složenou exponenciální funkci a derivujeme jako exponenciální funkci:

$$\left(x^x\right)' = \left(\mathrm{e}^{x\ln x}\right)' = x^x \cdot \left(\ln x + x\frac{1}{x}\right) = x^x(\ln x + 1)$$

a podobně

$$\left(x^{x^x}\right)' = \left(\mathrm{e}^{x^x\ln x}\right)' = x^{x^x}\left((x^x)'\ln x + x^x\frac{1}{x}\right) = x^{x^x}\left(x^x(\ln x + 1)\ln x + x^{x-1}\right).$$

▲

5.4. Věty o střední hodnotě

Úvodem dokážeme jedno pomocné tvrzení.

Lemma 5.22. *Nechť $f'(x_0) > 0$. Pak funkce f je rostoucí v bodě x_0. Analogicky, je-li $f'(x_0) < 0$, je funkce f klesající v bodě x_0.*

Důkaz. Platí $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$. Podle věty 4.10 existuje okolí $\mathscr{O}(x_0)$ takové, že pro všechna $x \in \mathscr{O}(x_0)$ platí $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$. Podobně druhé tvrzení. □

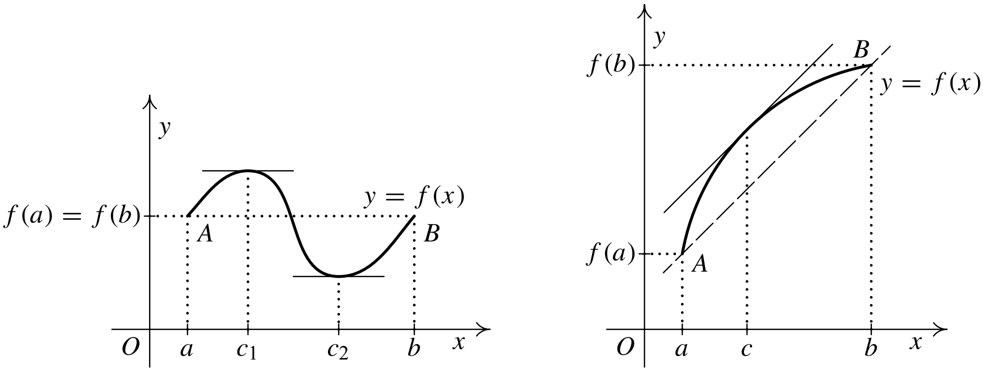
Všimněte si, že opačné tvrzení neplatí: Je-li funkce f je rostoucí v x_0, nemusí být $f'(x_0) > 0$. Například funkce $f(x) = x^3$ je rostoucí v $x_0 = 0$, ale $f'(0) = 0$.

Následující tři věty se obvykle nazývají *věty o střední hodnotě*. Připomeňme (definice 4.32), že $C[a,b]$ značí množinu všech funkcí spojitých na intervalu $[a,b]$.

Věta 5.23 (Rolleova věta). *Nechť funkce $f \in C[a,b]$ má v každém bodě intervalu (a,b) vlastní nebo nevlastní derivaci a nechť $f(a) = f(b)$. Pak existuje $c \in (a,b)$ tak, že $f'(c) = 0$.*

Důkaz. Je-li f na intervalu $[a,b]$ konstantní, je tvrzení zřejmé.

Nechť tedy existuje $x \in (a,b)$ tak, že $f(x) \neq f(a)$. Nechť např. $f(x) > f(a)$ (pro $f(x) < f(a)$ analogicky). Podle Weierstrassovy věty existuje $c \in [a,b]$, v němž funkce f nabývá své největší hodnoty $f(c) = M$. Protože $f(x) > f(a) = f(b)$, je $c \in (a,b)$. Ukážeme, že $f'(c) = 0$. Kdyby bylo $f'(c) > 0$, pak by podle předcházejícího lemmatu 5.22 existovalo $\mathscr{O}(c)$ tak, že pro $x \in \mathscr{O}(c)$, $x > c$ by platilo $f(x) > f(c) = M$, což je spor. Analogicky se ukáže, že nemůže být $f'(c) < 0$. □



a) Rolleova věta

b) Lagrangeova věta

Obr. 5.4: Věty o střední hodnotě

Věta 5.24 (Cauchyova věta). *Nechť $f, g \in C[a, b]$ a nechť v každém bodě $x \in (a, b)$ existují vlastní derivace $f'(x)$, $g'(x)$. Pak existuje $c \in (a, b)$ tak, že platí*

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c).$$

Důkaz. Položme $F(x) = [f(b) - f(a)][g(x) - g(a)] - [g(b) - g(a)][f(x) - f(a)]$. Tato funkce F je spojitá na $[a, b]$, má derivaci na (a, b) a platí $F(a) = F(b) = 0$, tj. splňuje předpoklady Rolleovy věty. Existuje tedy $c \in (a, b)$, pro které $F'(c) = 0$. Přitom platí $0 = F'(c) = [f(b) - f(a)]g'(c) - [g(b) - g(a)]f'(c)$, odkud již tvrzení přímo plyne. □

Věta 5.25 (Lagrangeova věta). *Nechť $f \in C[a, b]$ a nechť v každém bodě $x \in (a, b)$ existuje vlastní nebo nevlastní derivace $f'(x)$. Pak existuje $c \in (a, b)$, pro které platí*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Důkaz. Postupuje se analogicky jako v předcházející větě, kde se volí $g(x) = x$. □

Geometrický význam. Označme body roviny $A = (a, f(a))$, $B = (b, f(b))$. Je-li $f(a) = f(b)$, Rolleova věta zaručuje (za dalších předpokladů), že existuje alespoň jeden vnitřní bod c, v němž je derivace nulová, tj. tečna ke grafu funkce f v bodě $(c, f(c))$ je rovnoběžná s osou x. Na obr. 5.4 a) jsou takové body dva — c_1 a c_2.

Lagrangeova věta, která ji zobecňuje, pak říká, že existuje alespoň jeden vnitřní bod c takový, že tečna v bodě $(c, f(c))$ je rovnoběžná s úsečkou $\overline{AB}$ — viz obr. 5.4 b).

I Cauchyovu větu lze znázornit obdobně na křivce dané parametricky.

Poznámka 5.26.

i) Ukažme fyzikální interpretaci Lagrangeovy věty. Vyjadřuje-li $f(t)$ souřadnici v čase t bodu pohybujícího se po přímce, je podíl $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ průměrná (střední) rychlost v časovém intervalu $[a, b]$ a $f'(c)$ je okamžitá rychlost v čase c. Lagrangeova věta říká, že v intervalu (a, b) existuje čas c, ve kterém je okamžitá rychlost rovna průměrné rychlosti na celém intervalu.

ii) Díky Lagrangeově větě umíme odhadnout přírůstek funkce $f(b) - f(a)$, jestliže dokážeme odhadnout f' v intervalu (a, b). Například

$$|\sin y - \sin x| = |\sin' c \cdot (y - x)| = |\cos c| \cdot |y - x| \leq |y - x|$$

a podobně

$$|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| = \left|\frac{1}{1 + c^2}\right| \cdot |x - y| \leq |x - y|,$$

protože $\frac{1}{1+c^2} \leq 1$ pro všechna $c \in \mathbb{R}$.

Z Lagrangeovy věty vyplývá následující důležité tvrzení.

Důsledek 5.27. *Nechť funkce f, g mají vlastní derivace v každém bodě otevřeného intervalu I. Jestliže pro všechna $x \in I$ platí $f'(x) = g'(x)$, pak se funkce f, g liší o konstantu, tj. existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $f(x) = g(x) + c$. Zejména jestliže $f'(x) = 0$ na I, je f na I konstantní.*

Důkaz. Mějme funkci $F(x) = f(x) - g(x)$ a body $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$. Pak podle Lagrangeovy věty existuje $\xi \in [x_1, x_2]$ takové, že $F(x_2) - F(x_1) = (x_2 - x_1)F'(\xi)$. Přitom $F'(\xi) = f'(\xi) - g'(\xi) = 0$. Proto $F(x_1) = F(x_2)$, tj. $F(x) = c$ na I, a tedy $f(x) - g(x) = c$. □

Tvrzení z důsledku 5.27 platí pro libovolný, ne jen otevřený interval, pokud předpokládáme spojitost f a g v krajních bodech.

V předchozím důsledku je podstatné, že I je interval. Např. pro funkci $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in I = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ platí $f'(x) = 0$ na I, ale tato funkce není na I konstantní.

Příklad 5.28. Určete, pro která $a \in \mathbb{R}$ lze funkci $f(x) = x^a \sin(\ln x) \operatorname{arctg} x$ rozšířit na interval $I = [0, +\infty)$ tak, aby výsledná funkce

a) byla spojitá na I,

b) měla vlastní derivaci na I.

Řešení. Funkce je zřejmě spojitá na otevřeném intervalu $(0, +\infty)$ a má zde vlastní derivaci. Problémový je tedy bod $x = 0$.

a) Počítejme limitu zprava:

$$\lim_{x\to 0+} x^a \sin(\ln x) \operatorname{arctg} x = \lim_{x\to 0+} x^a \sin(\ln x) \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\, x.$$

Protože je funkce $\sin(\ln x)$ omezená na $(0, \infty)$, ale její limita pro $x \to 0^+$ neexistuje a $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$ podle příkladu 4.49 b), je

$$\lim_{x\to 0+} x^{a+1} \sin(\ln x) \begin{cases} = 0 & \text{pro } a+1 > 0,\\ \text{neexistuje} & \text{pro } a+1 \le 0. \end{cases}$$

Funkci f lze spojitě rozšířit na $[0, \infty)$ pouze pro $a > -1$.

b) Počítejme z definice derivaci zprava v bodě $x = 0$. Je

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^a \sin(\ln x) \operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x\to 0} x^a \sin(\ln x).$$

Tato limita existuje pro $a > 0$ (a je rovna 0), tudíž požadované rozšíření lze provést pouze pro $a > 0$. Přitom bude $f'_+(0) = 0$. ▲

5.5. L'Hospitalovo pravidlo

Věta 5.29. *Buď $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Nechť je splněna jedna z podmínek*

(i) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$,

(ii) $\lim\limits_{x\to x_0} |g(x)| = +\infty$.

Existuje-li (vlastní nebo nevlastní) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, *pak existuje také* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *a platí*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Obdobné tvrzení platí i pro jednostranné limity.

Důkaz. Dokážeme tvrzení např. pro limitu zprava. Důkaz pro limitu zleva je obdobný a jejich spojením se vzhledem k větě 4.9 dostane oboustranný případ.

Označme $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)/g'(x) = A$. Nechť $-\infty \le x_0 < +\infty$. Z předpokladů věty vyplývá existence čísla $d > x_0$ takového, že na intervalu (x_0, d) jsou funkce f a g definované, jsou zde spojité a mají zde vlastní derivaci, přičemž $g'(x) \ne 0$. Navíc pro $x_1, x_2 \in (x_0, d)$, $x_1 \ne x_2$, je $g(x_1) \ne g(x_2)$. (Jinak by podle Rolleovy věty existovalo $x_1 < \xi < x_2$ tak, že $g'(\xi) = 0$, což není možné.)

Navíc je možné předpokládat, že i $g(x) \ne 0$ na intervalu (x_0, d), kde totiž může existovat nejvýše jedno η, v němž $g(\eta) = 0$. Stačí tedy případně zmenšit d.

Nechť nejprve $-\infty \leq A < +\infty$. Zvolme q, r tak, aby $A < r < q$. Z předpokladu o existenci limity $f'(x)/g'(x) \to A$ pro $x \to x_0^+$ dostáváme, že existuje $c \in (x_0, d)$ tak, že na intervalu (x_0, c) platí

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} < r.$$

Pro libovolná x, y taková, že $x_0 < y < x < c$, existuje podle Cauchyovy věty o střední hodnotě číslo $y < \zeta < x$ takové, že

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} < r. \tag{5.7}$$

Nechť je splněna podmínka (i). Pak je $\lim\limits_{y \to x_0^+} (f(x) - f(y)) = f(x)$ a obdobně je $\lim\limits_{y \to x_0^+} (g(x) - g(y)) = g(x) \neq 0$. Limitním přechodem $y \to x_0^+$ v (5.7) dostaneme (viz věta 4.10, 2), že pro libovolné $x \in (x_0, c)$ je $f(x)/g(x) \leq r < q$.

Nechť je splněna podmínka (ii). Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že např. $\lim\limits_{x \to x_0^+} g(x) = +\infty$. (Ze spojitosti g a faktu, že $\lim\limits_{x \to x_0^+} |g(x)| = +\infty$ plyne, že v jistém pravém okolí bodu x_0 je funkce g pořád kladná nebo pořád záporná.)

Zvolíme pevně $y \in (x_0, c)$ a najdeme $c_1 \in (x_0, y)$ tak, aby platilo $g(x) > 0$ a $g(x) > g(y)$ pro $x \in (x_0, c_1)$. Nyní vynásobíme část nerovnosti (5.7) (v níž je zaměněno x a y)

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} < r$$

výrazem $(g(x) - g(y))/g(x)$ a dostaneme

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x)} < r - r \cdot \frac{g(y)}{g(x)}.$$

Odtud obdržíme

$$\frac{f(x)}{g(x)} < r - r \cdot \frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} = r + \frac{f(y) - rg(y)}{g(x)}, \qquad x \in (x_0, c_1).$$

Nyní je s ohledem na podmínku (ii) možné najít $c_2 \in (x_0, c_1)$ tak, že na intervalu (x_0, c_2) platí

$$g(x) > \frac{f(y) - rg(y)}{q - r}, \quad \text{tj..} \quad q - r > \frac{f(y) - rg(y)}{g(x)}.$$

Spojením předchozích dvou nerovností opět dostáváme, že $f(x)/g(x) < q$ pro $x \in (x_0, c_2)$.

V obou případech jsme dokázali, že v jistém pravém okolí bodu x_0 platí nerovnost $f(x)/g(x) < q$, kde q bylo libovolné číslo vyhovující nerovnosti $A < q < +\infty$.

Analogicky se dokáže, že v případě $-\infty < A \leq +\infty$ platí v jistém pravém okolí bodu x_0 nerovnost $q < f(x)/g(x)$, kde q je libovolné číslo vyhovující nerovnosti $-\infty < q < A$.

Nyní již důkaz snadno dokončíme. Je-li $A = -\infty$, vidíme přímo z definice nevlastní limity, že $f(x)/g(x) \to -\infty$ pro $x \to x_0^+$. Případ $A = +\infty$ je obdobný.

Konečně je-li $A \in \mathbb{R}$, zvolíme libovolné $\varepsilon > 0$. V předchozích úvahách pak za q volíme $A + \varepsilon$ resp. $A - \varepsilon$. V jistém pravém okolí bodu x_0 tedy platí nerovnost $A - \varepsilon < f(x)/g(x) < A + \varepsilon$, což znamená, že $f(x)/g(x) \to A$ pro $x \to x_0^+$. □

Poznámka 5.30.

i) L'Hospitalovo pravidlo je velmi silným prostředkem k výpočtu limit, nikoliv však univerzálním — $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ nemusí existovat, což však neznamená, že neexistuje $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$. Příkladem je

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x + \sin x}{x + \cos x} = „\frac{\infty}{\infty}“.$$

L'Hospitalovo pravidlo nelze použít, protože $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+\cos x}{1-\sin x}$ neexistuje. Proto počítejme danou limitu jiným způsobem:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1 + \frac{\sin x}{x}\right)}{x\left(1 + \frac{\cos x}{x}\right)} = 1,$$

neboť $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$.

ii) L'Hospitalovo pravidlo nemůžeme použít pro případ limity „$\frac{\text{cokoliv}}{0}$“. Je důležité, aby limita čitatele i jmenovatele byla 0.
Příklad:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{arccotg} x} = \frac{\frac{\pi}{2}}{+0} = +\infty$$

podle poznámky 4.14. Použitím l'Hospitalova pravidla bychom dostali

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^2+1}}{-\frac{1}{x^2+1}} = -1,$$

což je jiná hodnota než očekávaná.

Příklad 5.31. Vypočtěte následující limity:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3-6x+6\sin x}{2x^5}$, d) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\ln(1-x^2)}{\ln(\sin \pi x)}$.

Řešení.

a) Limitu vypočítáme pomocí l'Hospitalova pravidla:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2} = „\frac{0}{0}“ = \lim_{x\to 2} \frac{2x-5}{2x-3} = \frac{-1}{1} = -1.$$

b) Použijeme l'Hospitalovo pravidlo a vhodné úpravy:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x-\sin x}{x^3} = „\frac{0}{0}“ = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - x\sin x-\cos x}{3x^2} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x\sin x}{3x^2} = -\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{3}.$$

c) Pro l'Hospitalovo pravidlo je typické vícenásobné použití. Dostaneme-li po derivování opět limitu z podílu a jsou-li splněny předpoklady pro použití l'Hospitalova pravidla, zderivujeme znovu čitatele a jmenovatele. Pokud vzniklá limita existuje, existuje i předchozí limita, a tudíž i zadaná limita a všechny tři jsou si rovny. Tento postup je možné opakovat vícekrát. V našem případě je:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3-6x+6\sin x}{2x^5} = „\frac{0}{0}“ = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2-6+6\cos x}{10x^4} = „\frac{0}{0}“ =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{6x-6\sin x}{40x^3} = „\frac{0}{0}“ = \lim_{x\to 0} \frac{6-6\cos x}{120x^2} = „\frac{0}{0}“ =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{6\sin x}{240x} = „\frac{0}{0}“ = \lim_{x\to 0} \frac{6\cos x}{240} = \frac{1}{40}.$$

d) Často vede k cíli, když po použití l'Hospitalova pravidla vhodně upravíme funkci na součin a počítáme limity jednotlivých činitelů. V našem případě je:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\ln(1-x^2)}{\ln(\sin \pi x)} = „\frac{\infty}{\infty}“ = \lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{-2x}{1-x^2}}{\frac{\pi\cos \pi x}{\sin \pi x}} = -\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1^-}\frac{x}{\cos \pi x}\cdot \lim_{x\to 1^-}\frac{\sin \pi x}{1-x^2} =$$
$$= -\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{-1}\lim_{x\to 1^-}\frac{\pi\cos \pi x}{-2x} = \frac{2}{\pi}\frac{\pi(-1)}{-2} = 1.$$

▲

Neurčité výrazy. Neurčitými výrazy rozumíme limitu součtu, součinu, rozdílu a podílu funkcí, v nichž limity jednotlivých funkcí existují, ale příslušné operace s nimi nejsou definovány. Jde o tyto případy:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty.$$

První dva případy limit lze řešit pomocí l'Hospitalova pravidla, další případy je možné převést na první dva následovně.

1. Limita typu „$\infty - \infty$", tj. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$. Pak

$$\lim_{x \to x_0} \big(f(x) - g(x)\big) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} \right) = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}},$$

což je typ „$\frac{0}{0}$".

2. Limita typu „$0 \cdot \infty$", tj. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$. Pak

$$\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}},$$

což je typ „$\frac{0}{0}$".

3. Limity typu „0^0, ∞^0, 1^∞". Řešíme úpravou na exponenciální funkci:

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \mathrm{e}^{g(x) \ln f(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \ln f(x)}.$$

V poslední upravě jsme použili větu o limitě složené funkce 4.22, neboť funkce e^x je spojitá. Pokud je limita v exponentu nevlastní, je třeba použít větu 4.16. Přitom limita v exponentu je již typu „$0 \cdot \infty$".

Příklad 5.32. Vypočtěte následující limity:

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \right) \ln x$, b) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\operatorname{cotg} x - \frac{1}{x} \right)$, c) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$.

Řešení. Upravíme tak, abychom mohli použít l'Hospitalovo pravidlo.

a) Součin převedeme na podíl:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \right) \cdot \ln x = „0 \cdot \infty“ = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x}{\frac{1}{\ln x}} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x \ln^2 x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x \ln^2 x}{1 + x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln^2 x + 2x \ln x \cdot \frac{1}{x}}{2x} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2 \ln x \frac{1}{x} + 2 \frac{1}{x}}{2} = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x + 1}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

b) Rozdíl převedeme na podíl:

$$\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{cotg} x - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x\sin x} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x - x\cos x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = 0.$$

c) Vyjádříme pomocí exponenciály:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}.$$

Počítejme zvlášť — součin převedeme na podíl:

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1} = 1.$$

Původní limita je tedy $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$. ▲

L'Hospitalovo pravidlo lze využít i k výpočtu limit některých posloupností, nejčastěji díky následujícímu tvrzení.

Věta 5.33. *Buď $\{a_n\}$ posloupnost a $f(x)$ libovolná funkce taková, že $f(n) = a_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Existuje-li $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$, pak existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.*

Důkaz. Plyne snadno z definice limity v nevlastním bodě a limity posloupnosti. Je rovněž speciálním případem tvrzení z věty D.15 dodatku. □

Příklad 5.34. Pomocí předchozí věty určete $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$.

Řešení. Označme $f(x) = x^{1/x}$, $x > 0$, tj. $f(n) = n^{1/n} = \sqrt[n]{n}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Platí

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}}.$$

Pro výpočet limity v exponentu použijeme l'Hospitalovo pravidlo:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0.$$

Proto $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = \mathrm{e}^0 = 1$. ▲

5.6. Řešené příklady na derivaci a limitu

Příklad 5.35. Vypočtěte následující derivace

a) $\left(\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}\right)'$, b) $\left(\dfrac{\sin x + x\cos x}{\cos x + x\sin x}\right)'$, c) $\left(\ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}\right)'$.

Řešení. a) Budeme derivovat podle věty o derivaci podílu $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$. Platí

$$\left(\frac{\cos x}{2\sin^2 x}\right)' = \frac{-\sin x \cdot 2\sin^2 x - \cos x \cdot 2 \cdot 2\sin x\cos x}{4\sin^4 x} =$$
$$= \frac{-2\sin^2 x - 4\cos^2 x}{4\sin^3 x} = \frac{-2(\sin^2 x + 2\cos^2 x)}{4\sin^3 x} = -\frac{1+\cos^2 x}{2\sin^3 x}$$

pro $x \neq k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

b) Opět použijeme větu o derivaci podílu a upravíme. Dostáváme

$$\left(\frac{\sin x + x\cos x}{\cos x + x\sin x}\right)' =$$
$$= \frac{(\cos x + \cos x - x\sin x)\cdot(\cos x + x\sin x)}{(\cos x + x\sin x)^2} -$$
$$- \frac{(\sin x + x\cos x)\cdot(-\sin x + \sin x + x\cos x)}{(\cos x + x\sin x)^2} =$$
$$= \frac{(2\cos x - x\sin x)(\cos x + x\sin x) - (\sin x + x\cos x)(x\cos x)}{(\cos x + x\sin x)^2} =$$
$$= \frac{2\cos^2 x + 2x\cos x\sin x - x\sin x\cos x - x^2\sin^2 x - x\sin x\cos x - x^2\cos^2 x}{(\cos x + x\sin x)^2} =$$
$$= \frac{2\cos^2 x - x^2(\sin^2 x + \cos^2 x)}{(\cos x + x\sin x)^2} = \frac{2\cos^2 - x^2}{(\cos x + x\sin x)^2}$$

pro všechna x, pro která $\cos x + x\sin x \neq 0$.
c) Použijeme větu o derivaci složené funkce a větu o derivaci podílu. Je

$$\left(\ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}\right)' =$$
$$= \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} \cdot \frac{-\cos x(1+\sin x) - \cos x(1-\sin x)}{(1+\sin x)^2} =$$
$$= \frac{-\cos x}{(1-\sin x)(1+\sin x)} = -\frac{\cos x}{1-\sin^2 x} = -\frac{1}{\cos x}$$

pro $x \neq \frac{2k-1}{2}\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$. ▲

Příklad 5.36. Vypočtěte derivaci

a) $\left[x \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}\right]'$, b) $\left[\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{2x}\right)\left(1+\sqrt{3x}\right)\right]'$.

Řešení. a) K výpočtu použijeme větu 5.9. Nejprve vypočteme derivaci

$$\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]' = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,.$$

Výsledná derivace je rovna

$$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right).$$

b) Použijeme větu o derivaci součinu funkcí $(f\cdot g\cdot h)' = f'gh+fg'h+fgh'$. V našem případě bude $f(x) = 1+\sqrt{x}$, $g(x) = 1+\sqrt{2x}$, $h(x) = 1+\sqrt{3x}$. Dostáváme

$$\begin{aligned}
&\left[\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{2x}\right)\left(1+\sqrt{3x}\right)\right]' = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1+\sqrt{2x}\right)\left(1+\sqrt{3x}\right)+\frac{2}{2\sqrt{2x}}\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{3x}\right)+ \\
&\qquad + \frac{3}{2\sqrt{3x}}\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{2x}\right) = \\
&= \frac{\left(1+\sqrt{2x}\right)\left(1+\sqrt{3x}\right)+\sqrt{2}\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{3x}\right)+\sqrt{3}\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{2x}\right)}{2\sqrt{x}}\,.
\end{aligned}$$

▲

Následující příklady počítejte pomocí l'Hospitalova pravidla. Nezapomeňte vždy ověřit, zda jsou splněny předpoklady pro jeho použití (typ „$\frac{0}{0}$“, „$\frac{\text{cokoliv}}{\infty}$“).

Příklad 5.37. Vypočítejte limity

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{(x^x-1)}$, b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Řešení. a) Při určení této limity budeme kombinovat l'Hospitalovo pravidlo s klasickými úpravami při výpočtech limit.

$$\lim_{x\to 0^+} x^{(x^x-1)} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\ln x\,(x^x-1)} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\ln x\,(\mathrm{e}^{x\cdot\ln x}-1)}.$$

Funkce e^x je spojitá funkce, proto počítejme limitu exponentu. Využijme znalosti limit $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\mathrm{e}^y-1}{y} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$. Dostáváme

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x\cdot\frac{\mathrm{e}^{x\ln x}-1}{x\ln x}\cdot x\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}}\,.$$

Nyní použijeme l'Hospitalovo pravidlo (limita je typu $\frac{\infty}{\infty}$):

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{2\ln x}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{2\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Výsledná limita je $e^0 = 1$.

b) Jde o neurčitý výraz exponenciálního typu. Proto nejprve provedeme úpravu

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\cdot \ln\frac{\arcsin x}{x}}.$$

Protože je funkce e^x spojitá, lze přejít limitou do exponentu. Pro výpočet limity exponentu zavedeme substituci $x = \sin y$ a využijeme znalosti $\lim\limits_{y\to 1} \frac{\ln y}{y-1} = 1$. Dostáváme

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\cdot \ln\frac{\arcsin x}{x} &= \lim_{y\to 0} \frac{1}{\sin^2 y} \cdot \frac{\ln\frac{y}{\sin y}}{\frac{y}{\sin y}-1} \cdot \left(\frac{y}{\sin y} - 1\right) = \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{y - \sin y}{\sin^3 y} = \lim_{y\to 0} \frac{1-\cos y}{3\sin^2 y\cos y} = \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{1-\cos y}{3\cos y(1-\cos^2 y)} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{3\cos y(1+\cos y)} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Výsledná limita je $e^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{e}$. ▲

Příklad 5.38. Vypočítejte limity

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right)$.

Řešení. a) Použijeme l'Hospitalovo pravidlo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x(1-\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1+\cos x}{\cos^2 x} = 2.$$

b) Opět nejprve upravíme pomocí znalosti $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ a poté použijeme l'Hospitalovo pravidlo (typ $\frac{0}{0}$).

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right) &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^2\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^4} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x\cos x - 2x}{4x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x\cos x - x}{2x^3} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x - 1}{6x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x - 1}{6x^2} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin 2x}{12x} = -\frac{2}{6}\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = -\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

▲

Cvičení

1. Napište rovnice tečny a normály ke grafu funkce f v bodě $[x_0, ?]$, kde

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}, \; x_0 = 1,$ b) $f(x) = 2x^3 + 1, \; x_0 = 0,$

c) $f(x) = 2\sqrt{2}\sin x, \; x_0 = \dfrac{\pi}{4},$ d) $f(x) = x + \sqrt[3]{x-1}, \; x_0 = 1.$

2. Napište rovnici tečny a normály ke grafu funkce $y = 1 - e^{\frac{x}{2}}$ v jeho průsečíku s osou x.

3. Derivujte a upravte:

a) $y = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{\log x},$ b) $y = \dfrac{x e^x}{1+x^2},$

c) $y = \dfrac{(x^2+1)\operatorname{arctg} x}{\ln x},$ d) $y = \ln\left(e^x + \sqrt{1+e^{2x}}\right),$

e) $y = 2\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{2}} - \sqrt{2x - x^2},$ f) $y = \ln\dfrac{1}{x + \sqrt{x^2-1}},$

g) $y = 2\sqrt{x+1} + \ln\dfrac{x + 2 - 2\sqrt{x+1}}{x},$ h) $y = \dfrac{x^2+1}{2}\cdot\operatorname{arctg} x - \dfrac{x}{2},$

i) $y = (x-2)\sqrt{1+e^x} - \ln\dfrac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1},$ j) $y = \ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} + \dfrac{x-1}{x^2+1},$

k) $y = \sqrt{ax - x^2} - a\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{a-x}{x}}, \; a > 0,$ l) $y = \sqrt{\dfrac{1-e^x}{1+e^x}}.$

4. Vypočtěte f' a určete $D(f)$ a $D(f')$.

a) $y = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x,$ b) $y = x\sqrt{2-x} + \arcsin\dfrac{x-1}{2}.$

5. Vypočtěte derivace hyperbolických a hyperbolometrických funkcí — viz cvičení 18 ke kapitole 3.

a) $\sinh x,$ b) $\cosh x,$ c) $\operatorname{tgh} x,$ d) $\operatorname{cotgh} x,$
e) argsinh, f) argcosh, g) argtgh, h) argcotgh .

6. Počítejte limity:

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)^x,$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x}\right),$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$, d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)$,

e) $\lim\limits_{x\to 1^-}\ln x\cdot\ln(1-x)$, f) $\lim\limits_{x\to\infty}(\pi-2\operatorname{arctg}x)\ln x$,

g) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$, h) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}$,

i) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\operatorname{tg}^2x)^{\operatorname{cotg}^2x}$, j) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^{x^4}$.

7. Určete limity posloupností

a) $\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{n}{n^2+1}}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+1}{3^n}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\ln n}$, d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^n$.

8. Nechť funkce f a g mají derivace do řádu n, $n\in\mathbb{N}$. Dokažte tzv. *Leibnizův vzorec*

$$(fg)^{(n)}=\binom{n}{0}f^{(n)}g+\binom{n}{1}f^{(n-1)}g'+\cdots+\binom{n}{n-1}f'g^{(n-1)}+\binom{n}{n}fg^{(n)}.$$

9. Dokažte: Nechť f je spojitá v x_0 zprava, existuje vlastní f' v nějakém ryzím pravém okolí bodu x_0 a $\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)=K$, $K\in\mathbb{R}^*$. Pak $f'_+(x_0)=K$. Analogické tvrzení platí pro derivaci zleva.

10. Najděte příklad funkce mající vlastní derivaci na otevřeném intervalu, přičemž tato derivace má v některém bodě nespojitost

a) prvního druhu, b) druhého druhu.

*

Profesor matematiky při přednášce cosi prohlásil a pak dodal: „To je zřejmé.“ Jeden student se přihlásil a zeptal se:„Proč je to zřejmé?“ Profesor se na chvíli zahloubal, vyšel z místnosti, vrátil se asi za dvacet minut a povídá: „Ano, je to zřejmé!“ — a pokračoval v přednášce.

*

Matematik předvádí důkaz věty. Student ho přeruší: „Mám protipříklad.“ „Nevadí, já mám dva důkazy!“

Kapitola 6

Průběh funkce

Cílem této kapitoly je ukázat, jak se vyšetřuje průběh funkce. Chování funkce popíšeme pomocí monotonie funkce na intervalu, extrémů funkcí, konvexnosti a konkávnosti funkce na intervalu a pomocí pojmů inflexní body a asymptoty funkce.

6.1. Podmínky monotonie funkce

Věta 6.1. *Nechť má funkce f na otevřeném intervalu I vlastní derivaci. Pak platí:*

1. *Funkce f je neklesající na I právě tehdy, když $f'(x) \geq 0$ na I.*
2. *Funkce f je rostoucí na I právě tehdy, když $f'(x) \geq 0$ na I, přičemž rovnost $f'(x) = 0$ neplatí na žádném podintervalu intervalu I.*

Analogická tvrzení platí pro nerostoucí a klesající funkce.

Důkaz.

1. Nechť f je neklesající na I. Je-li $x_0 \in I$ libovolný bod, pak pro $x \in I$, $x < x_0$, je $f(x) \leq f(x_0)$ a pro $x \in I$, $x > x_0$, je $f(x) \geq f(x_0)$. Proto $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$, odkud $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$.
   Naopak, nechť $f'(x) \geq 0$ na I a $x, y \in I$, $x < y$. Podle Lagrangeovy věty existuje $c \in (x, y)$ tak, že $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) \geq 0$, tj. $f(y) \geq f(x)$ a f je neklesající na I.
2. Nechť f je rostoucí. Pak podle první části je $f' \geq 0$. Rovnost $f'(x) = 0$ přitom nemůže platit na žádném podintervalu intervalu I, neboť pak by zde byla funkce f podle důsledku 5.27 konstantní, což je spor s tím, že je rostoucí na I.
   Naopak, nechť $f' \geq 0$, přičemž rovnost $f'(x) = 0$ neplatí na žádném podintervalu intervalu I. Podle první části je funkce f neklesající. Kdyby f nebyla rostoucí

na I, existoval by podinterval intervalu I, na němž by f byla konstantní, takže by zde platilo $f'(x) = 0$, což je spor s předpokladem. □

Poznámka 6.2. Platnost předchozí věty lze rozšířit na interval I libovolného typu. Stačí předpokládat, že f je spojitá na I a f' existuje uvnitř I. Věta dokonce platí, i když f má někde nevlastní derivaci, pokud se předpokládá, že je f spojitá.

Příklad 6.3. Dokažte, že následující funkce jsou rostoucí na $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = x + \sin x$, b) $g(x) = x + \sqrt[3]{x}$.

Řešení.

a) Platí $f'(x) = 1 + \cos x \geq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, přičemž rovnost neplatí na žádném podintervalu intervalu $\mathbb{R}$ ($f'(x) = 0$ právě pro $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$). Podle druhé části věty 6.1 je tudíž f rostoucí.
b) Funkce $g(x)$ je spojitá na $\mathbb{R}$. Dále platí $g'(x) = 1 + 1/(3\sqrt[3]{x^2}) > 0$ pro $x \neq 0$ a $g'(0) = +\infty$. Podle poznámky 6.2 je proto g rostoucí. ▲

Z věty 6.1 okamžitě plyne jednoduchá postačující podmínka pro monotonii funkce na intervalu.

Důsledek 6.4. *Nechť f má konečnou derivaci na otevřeném intervalu I.*

(a) *Je-li $f'(x) > 0$ pro každé $x \in I$, pak je f rostoucí na I.*

(b) *Je-li $f'(x) < 0$ pro každé $x \in I$, pak je f klesající na I.*

Příklad 6.5. Najděte intervaly, na nichž jsou ryze monotonní funkce:

a) $f(x) = x^3 - 2x^2$, b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 6x - 16}$, c) $f(x) = \dfrac{x}{2} + \cos x$,

d) $f(x) = \arccos(1 + x)$, e) $f(x) = \mathrm{e}^{x^3 - 3x}$.

Řešení. Použijeme důsledek 6.4. Růst a klesání znázorníme pomocí šipek ↗ a ↘.

a) Platí $f'(x) = 3x^2 - 4x = x(3x - 4)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Tedy

interval	$(-\infty, 0)$	$(0, 4/3)$	$(4/3, +\infty)$
f'	$+$	$-$	$+$
f	↗	↘	↗

b) Platí

$$f'(x) = \frac{x^2 - 6x - 16 - x(2x - 6)}{(x^2 - 6x - 16)^2} = \frac{-x^2 - 16}{(x^2 - 6x - 16)^2} < 0$$

pro všechna $x \in D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 8\}$. Tedy

interval	$(-\infty, -2)$	$(-2, 8)$	$(8, +\infty)$
f'	$-$	$-$	$-$
f	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$

Všimněte si, že na celém $D(f)$ není f klesající (nejedná se o interval). Např. $0 < 9$ a $f(0) = 0 < 9/11 = f(9)$.

c) Platí $f'(x) = \frac{1}{2} - \sin x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Tedy $f'(x) = 0$ právě tehdy, když $\sin x = \frac{1}{2}$, tj. když $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ nebo $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Funkce f je klesající na každém intervalu $\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\right)$ a je rostoucí na každém intervalu $\left(\frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2(k+1)\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

d) Funkce je spojitá na celém svém definičním oboru $D(f) = [-2, 0]$. Platí

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-(1+x)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{-x(x+2)}} < 0$$

pro každé $x \in (-2, 0)$. Tedy funkce je klesající na $[-2, 0]$.

e) Platí $f'(x) = \mathrm{e}^{x^3-3x}(3x^2 - 3) = 3\mathrm{e}^{x^3-3x}(x^2 - 1)$ na $\mathbb{R}$. Znaménko derivace závisí pouze na znaménku mnohočlenu $x^2 - 1$. Tedy

interval	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
f'	$+$	$-$	$+$
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

▲

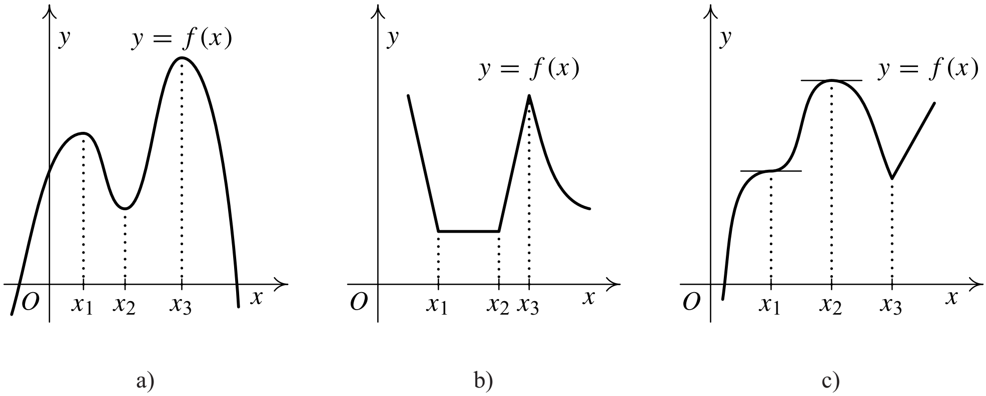
6.2. Extrémy

Rozlišujeme lokální extrémy, kdy vyšetřujeme největší a nejmenší hodnoty funkce v „malém“ (předem neurčeném) okolí posuzovaného bodu, a globální extrémy, kdy hledáme extremální hodnoty na předem dané množině.

Definice 6.6. Řekneme, že funkce f má v bodě x_0:

lokální maximum, existuje-li $\mathcal{O}(x_0)$ tak, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0)$ je $f(x) \le f(x_0)$,
lokální minimum, existuje-li $\mathcal{O}(x_0)$ tak, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0)$ je $f(x) \ge f(x_0)$,
ostré lokální maximum, existuje-li $\mathcal{O}(x_0)$ tak, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $f(x) < f(x_0)$,
ostré lokální minimum, existuje-li $\mathcal{O}(x_0)$ tak, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $f(x) > f(x_0)$.

Lokální maxima a minima nazýváme souhrnně *lokální extrémy*.



Obr. 6.1: Lokální extrémy

Funkce na obr. 6.1 a) má ostrá lokální maxima v bodech x_1 a x_3 a ostré lokální minimum v bodě x_2. Funkce na obr. 6.1 b) má neostrá lokální minima v bodech x_1 a x_2 a ostré lokální maximum v bodě x_3. Kromě toho má v každém bodě $x \in (x_1, x_2)$ současně neostré lokální minimum i maximum.

Poznámka 6.7.

i) Lokální maximum a minimum jsou lokální vlastnosti — závisí pouze na hodnotách funkce v nějakém okolí posuzovaného bodu.

ii) Má-li funkce f v bodě x_0 lokální extrém, pak existuje okolí $\mathscr{O}(x_0)$, kde je f definovaná, tedy $\mathscr{O}(x_0) \subseteq D(f)$.

Důležitým nástrojem pro vyšetřování extrémů funkcí je derivace.

Věta 6.8. *Nechť má funkce f v bodě x_0 lokální extrém a nechť $f'(x_0)$ existuje. Pak $f'(x_0) = 0$.*

Důkaz. Kdyby $f'(x_0) > 0$, pak podle lemmatu 5.22 by musela být funkce f v x_0 rostoucí, což je spor. Z obdobných důvodů nemůže být $f'(x_0) < 0$, proto $f'(x_0) = 0$. □

Poznámka 6.9.

i) Opačně věta neplatí. Příklad: Funkce $f(x) = x^3$ má v $x_0 = 0$ derivaci $f'(0) = 0$, ale nemá v tomto bodě extrém (je zde rostoucí).

ii) Funkce f může mít extrém v bodech, kde $f'(x) = 0$ (tzv. *stacionární body*, tečna v nich je rovnoběžná s osou x), nebo v bodech, kde $f'(x)$ neexistuje.

Funkce na obr. 6.1 c) má stacionární body x_1 a x_2, ale pouze v x_2 je lokální extrém (ostré maximum). V bodě x_3 je ostré lokální minimum, ale derivace (ani nevlastní) zde neexistuje.

Následující dvě věty udávají postačující podmínky pro existenci lokálního extrému.

Věta 6.10. *Nechť je funkce f spojitá v bodě x_0 a má vlastní derivaci v nějakém ryzím okolí $\mathscr{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$. Jestliže pro všechna $x \in \mathscr{O}(x_0)$, $x < x_0$, je $f'(x) > 0$ a pro všechna $x \in \mathscr{O}(x_0)$, $x > x_0$, je $f'(x) < 0$, pak má f v bodě x_0 ostré lokální maximum. (Obdobné tvrzení platí pro ostré lokální minimum).*

Důkaz. Tvrzení bezprostředně plyne z věty 6.1 a poznámky 6.2. □

Všimněme si, že předchozí věta nepředpokládá existenci derivaci v bodě x_0.

Poznámka 6.11. Je-li v předchozí větě x_0 stacionární bod (tedy $f'(x_0)$ existuje), věta jednoduše řečeno říká: Mění-li derivace při přechodu přes stacionární bod znaménko, je zde lokální extrém. Navíc z věty 6.1 plyne, že pokud derivace znaménko nemění (je pořád kladná nebo pořád záporná v jistém ryzím okolí), není ve stacionárním bodě x_0 extrém.

Příklad 6.12. Najděte všechny lokální extrémy funkce $f(x) = |x|$.

Řešení. Funkce je spojitá na $\mathbb{R}$. Platí $f'(x) = \operatorname{sgn} x$ pro $x \neq 0$ a $f'(0)$ neexistuje. Extrém tedy může být jen v bodě $x_0 = 0$. Znázorníme znaménko f':

interval	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
f'	$-$	$+$
f	$\searrow$	$\nearrow$

Podle předcházející věty má funkce $|x|$ v bodě $x_0 = 0$ lokální minimum. ▲

Příklad 6.13. Zjistěte, zda funkce

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

má v bodě $x_0 = 0$ limitu, je v tomto bodě spojitá a má zde lokální extrém.

Řešení. Limita v bodě $x_0 = 0$ existuje a je rovna 1 podle příkladu 4.25. Funkce není v bodě 0 spojitá, protože $f(0) = 0 \neq 1 = \lim\limits_{x \to 0} f(x)$. Z definice limity vyplývá, že existuje okolí $\mathscr{O}(x_0)$ takové, že funkce f je na $\mathscr{O}(0) \setminus \{0\}$ větší než 0. Proto má funkce f v bodě $x_0 = 0$ lokální minimum. Pozor, nesmíme se nechat zmást tím, že v tomto bodě funkce nemá derivaci, ani zde není spojitá! ▲

Věta 6.14. *Nechť $f'(x_0) = 0$. Je-li $f''(x_0) > 0$, pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum. Je-li $f''(x_0) < 0$, pak má f v bodě x_0 ostré lokální maximum.*

Důkaz. Provedeme pro případ $f''(x_0) > 0$; případ $f''(x_0) < 0$ je analogický. Z existence $f''(x_0)$ plyne, že existuje vlastní f' v jistém okolí $\mathcal{O}_1(x_0)$, a tudíž f je zde spojitá. Podle lemmatu 5.22 je f' rostoucí v bodě x_0. Protože je $f'(x_0) = 0$, existuje okolí $\mathcal{O}_2(x_0) \subseteq \mathcal{O}_1(x_0)$ takové, že pro $x \in \mathcal{O}_2(x_0)$, $x < x_0$, je $f'(x) < 0$ a pro $x \in \mathcal{O}_2(x_0)$, $x > x_0$, je $f'(x) > 0$. Z věty 6.10 nyní plyne tvrzení. □

Poznámka 6.15. Předchozí větu lze indukcí snadno zobecnit. Nechť $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$ a $f^{(k)}(x_0) \neq 0$ pro některé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

1. Je-li k sudé, je v bodě x_0 ostrý lokální extrém funkce f. Pro $f^{(k)}(x_0) > 0$ je to minimum, pro $f^{(k)}(x_0) < 0$ maximum.
2. Je-li k liché, pro $f^{(k)}(x_0) > 0$ je f rostoucí v x_0 a pro $f^{(k)}(x_0) < 0$ je zde klesající. V bodě x_0 tedy není lokální extrém funkce f.

Předchozí poznámku lze použít např. na funkce $f(x) = x^3$ a $g(x) = x^4$. Obě mají jediný stacionární bod $x_0 = 0$. Přitom $f'(0) = f''(0) = 0$, $f'''(0) = 3! > 0$ a extrém zde není (x^3 roste) a podobně $g'(0) = g''(0) = g'''(0) = 0$, $g''''(0) = 4! > 0$ a extrém zde je (ostré lokální minimum) — srovnejte obr. 3.8 c) a 3.8 a). U složitějších funkcí je ale obvykle výhodnější (pokud je to možné) posoudit, zda první derivace mění znaménko, než počítat vyšší derivace.

Definice 6.16. Buď funkce f definovaná na množině M. Existuje-li na M největší (nejmenší) hodnota funkce f, nazýváme ji *absolutním maximem* (*absolutním minimem*) funkce f na M. Absolutní minima a maxima souhrnně nazýváme *absolutními extrémy.*
Jestliže tedy $x_0 \in M$ a platí $f(x) \leq f(x_0)$ pro všechna $x \in M$, říkáme, že funkce f má na M absolutní maximum v bodě x_0. Podobně pro absolutní minimum.

Místo přívlastku absolutní se také používá *globální*. Řekneme-li v dalším textu „absolutní extrém“ a neudáme-li množinu, máme na mysli $D(f)$.

Poznámka 6.17.

1) Funkce může nabývat týž absolutní extrém ve více bodech. Např. funkce $\cos x$, $x \in \mathbb{R}$, má absolutní maximum rovno 1 a nabývá ho v nekonečně mnoha bodech $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, a absolutní minimum rovno -1 a nabývá ho v nekonečně mnoha bodech $(2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
2) Funkce nemusí mít na dané množině žádný absolutní extrém. Např. funkce $y = x$, $x \in \mathbb{R}$ nabývá libovolně velkých a libovolně malých hodnot. Stejná funkce nemá

absolutní extrémy ani na množině $(0, 1)$. Je tam sice ohraničená, ale příslušná množina hodnot $(0, 1)$ nemá ani maximum, ani minimum.

3) Důležitou postačující podmínku existence absolutních extrémů udává Weierstrassova věta 4.33. Je jí spojitost funkce na ohraničeném uzavřeném intervalu. Pokud nejsou některé její předpoklady splněny, nemusí absolutní extrémy existovat.
4) Obecně nemáme žádné jednoduché podmínky, jak zajistit existenci absolutních extrémů. Nicméně je jasné, že pokud je funkce definovaná v okolí bodu x_0 a má na něm absolutní extrém právě v bodě x_0, má v bodě x_0 i lokální extrém stejného typu. Omezíme-li se na interval, plyne odtud, že funkce nabývá svých absolutních extrémů buď v bodech lokálních extrémů, nebo v krajních bodech uvažovaného intervalu.
5) Pokud máme zajištěno, že *existují absolutní extrémy* funkce f definované na intervalu, vyplývá z předchozího bodu následující postup pro jejich nalezení:
   - Najdeme stacionární body a body, v nichž neexistuje první derivace.
   - Vypočteme funkční hodnoty v těchto bodech.
   - Vypočteme funkční hodnoty v krajních bodech intervalu (pokud patří do $D(f)$).
   - Ze všech takto získaných funkčních hodnot vybereme největší a nejmenší (je jich zpravidla konečný počet). To bude absolutní maximum a minimum.

   Správnost postupu vyplývá z toho, že někde absolutní extrémy být musí a nemohou být jinde než ve vytipovaných bodech.

Příklad 6.18. Určete absolutní maximum a minimum funkce $f(x) = x - 1 - \sqrt{x}$ na intervalu $[0, 1]$.

Řešení. Funkce je spojitá na ohraničeném uzavřeném intervalu, takže podle Weierstrassovy věty absolutní extrémy existují. Platí $f'(x) = 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}$. Stacionární body funkce f určíme z rovnice $f'(x) = 0$, odkud $\sqrt{x} = \frac{1}{2}$, tj. $x = \frac{1}{4}$. V bodě $x = 0$ vlastní derivace neexistuje, ale to je současně krajní bod. Nyní určíme hodnoty $f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{5}{4}$, $f(0) = -1$, $f(1) = -1$. Absolutní maximum má funkce v krajních bodech 0 a 1, absolutní minimum v bodě $\frac{1}{4}$. ▲

Příklad 6.19. Určete počet reálných kořenů rovnice $x^3 - 27x + 80 = 0$.

Řešení. Označme $f(x) = x^3 - 27x + 80$. Určit počet reálných kořenů dané rovnice znamená zjistit, kolikrát protíná graf funkce f osu x. Výpočet založíme na důsledku 4.36 Cauchyovy-Bolzanovy věty. Určíme krajní body intervalů tak, aby uvnitř jednotlivých intervalů byla funkce f ryze monotonní. Podle znamének v krajních bodech bude mít rovnice uvnitř každého takového intervalu buď jediný kořen, nebo tam kořen vůbec nebude.

Vyšetříme lokální extrémy funkce f: platí $f'(x) = 3x^2 - 27$. Proto stacionárními body funkce f jsou body $x = \pm 3$, které jsou lokálními extrémy, jak plyne z věty 6.10:

interval	$(-\infty, -3)$	$(-3, 3)$	$(3, \infty)$
f'	$+$	$-$	$+$
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Funkční hodnoty v lokálních extrémech jsou $f(-3) = -9 + 81 + 80 > 0$, $f(3) = 9 - 81 + 80 > 0$. Přitom $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Proto funkce f protíná osu x pouze jednou a původní rovnice má jeden reálný kořen. ▲

Příklad 6.20. Kladné číslo a rozložte na součet dvou nezáporných sčítanců tak, aby jejich součin byl maximální.

Řešení. Označme $a = x + y$ hledaný rozklad a $s = xy$ požadovaný maximální součin. Pak s lze vyjádřit jako funkci jedné proměnné $s = x(a - x) = ax - x^2$, $x \in [0, a]$, a daná úloha se redukuje na hledání absolutního maxima funkce s. Protože funkce s je spojitá na ohraničeném uzavřeném intervalu, podle Weierstrassovy věty absolutní maximum existuje. Platí $s'(x) = a - 2x = 0$, právě když $x = \frac{a}{2}$. Je $s\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{4}$, $s(0) = 0$, $s(a) = 0$. Proto hledaný rozklad je $a = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$. ▲

6.3. Konvexnost, konkávnost, inflexní body

Další globální vlastností funkce je pojem konvexnosti a konkávnosti popisující zakřivení grafu funkce.

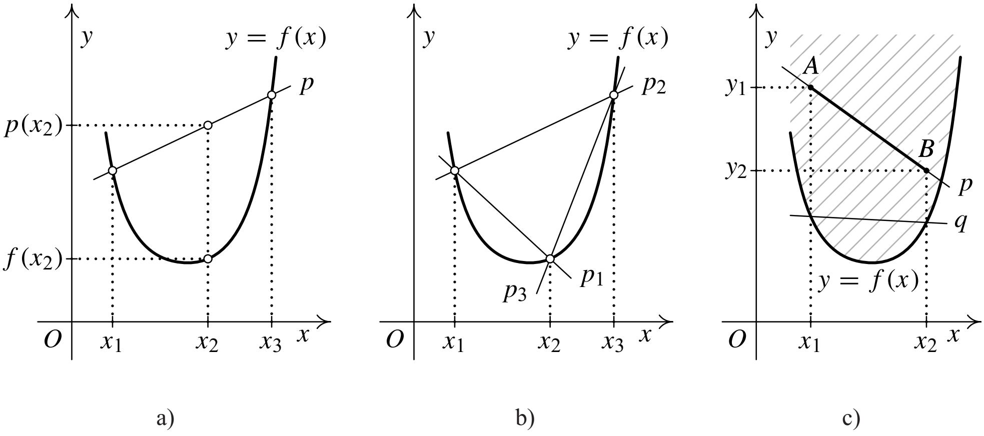
Definice 6.21. Řekneme, že funkce f je *konvexní na intervalu I*, jestliže pro libovolné tři body $x_1, x_2, x_3 \in I$ takové, že $x_1 < x_2 < x_3$, platí

$$f(x_2) \le f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1). \tag{6.1}$$

Řekneme, že funkce f je *konkávní na intervalu I*, jestliže pro libovolné tři body $x_1, x_2, x_3 \in I$ takové, že $x_1 < x_2 < x_3$, platí

$$f(x_2) \ge f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1).$$

Pokud v definici nahradíme neostré nerovnosti ostrými, dostáváme definice pojmů *ostré konvexnosti* a *ostré konkávnosti* na intervalu I.



Obr. 6.2: Konvexní funkce

Objasněme předchozí definici. Její geometrický význam znázorňuje obr. 6.2 a). Přímka spojující body grafu $(x_1, f(x_1))$ a $(x_3, f(x_3))$ má vyjádření

$$p\colon\ y = f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x - x_1).$$

Definice říká, že jestliže pro každé tři body $x_1 < x_2 < x_3$ z intervalu I je hodnota této lineární funkce p v bodě x_2 větší nebo rovna než funkční hodnota funkce f v bodě x_2, tj. $p(x_2) \geq f(x_2)$, pak je funkce f konvexní na I.

Pro funkci konkávní na I analogicky musí být $f(x_2) \geq p(x_2)$ pro každé tři body $x_1 < x_2 < x_3$ z intervalu I.

Ekvivalentní zápis nerovnosti (6.1) dostaneme tak, že popíšeme bod x_2 parametrickou rovnicí jako bod úsečky spojující body x_1 a x_3. Označme $\lambda = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}$. Pak $0 < \lambda < 1$ a nerovnost (6.1) má tvar

$$f\big((1-\lambda)x_1 + \lambda x_3\big) \leq (1-\lambda) f(x_1) + \lambda f(x_3).$$

Označíme-li $\lambda_1 = 1 - \lambda$ a $\lambda_2 = \lambda$, platí $0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ a předchozí nerovnost lze napsat takto:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_3) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_3). \tag{6.2}$$

Nerovnost triviálně platí i pro $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = 1$ resp. naopak a také pro $x_1 = x_2$.

Poznámka 6.22. Snadno vidíme, že je-li funkce f konvexní na intervalu I, pak funkce $-f$ je konkávní na intervalu I a naopak. Proto se v dalším výkladu omezíme ve formulacích většinou na konvexní funkce.

Než uvedeme ekvivalentní definice konvexnosti, připomeneme si pojem konvexní množiny v rovině, známý ze středoškolské geometrie především v souvislosti s mnohoúhelníky a úhly. Množina $M \subseteq \mathbb{R}^2$ se nazývá *konvexní*, jestliže s každými dvěma body $A, B \in M$ i celá úsečka $\overline{AB}$ leží v M. Jestliže každá z uvažovaných úseček $\overline{AB}$ leží celá (s případnou výjimkou krajních bodů A, B) uvnitř, nazývá se M *ostře konvexní*. Příkladem konvexních množin jsou konvexní mnohoúhelníky, kruh, vnitřek elipsy, polorovina, kvadrant, celá rovina $\mathbb{R}^2$ atd.

Dále budeme potřebovat následující lemma.

Lemma 6.23. *Nechť funkce f je definovaná na intervalu I a $x_1 < x_2 < x_3$ jsou libovolné tři body z I. Pak následující tři nerovnosti jsou ekvivalentní:*

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}, \tag{6.3a}$$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}, \tag{6.3b}$$

$$\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}. \tag{6.3c}$$

Důkaz. Ukážeme např. rovnocennost prvních dvou nerovností. Pro ostatní je důkaz obdobný. Z (6.3a) postupně dostaneme

$$\begin{aligned} f(x_2)(x_3-x_1) - f(x_1)(x_3-x_1) &\le f(x_3)(x_2-x_1) - f(x_1)(x_2-x_1),\\ f(x_2)(x_3-x_2) + f(x_2)(x_2-x_1) - f(x_1)(x_3-x_2) - f(x_1)(x_2-x_1) &\le \\ &\le f(x_3)(x_2-x_1) - f(x_1)(x_2-x_1),\\ \big(f(x_2)-f(x_1)\big)(x_3-x_2) &\le \big(f(x_3)-f(x_2)\big)(x_2-x_1), \end{aligned}$$

z čehož dostáváme nerovnost (6.3b). Protože úpravy byly ekvivalentní, lze postup obrátit a nerovnosti jsou ekvivalentní. □

Geometrický význam předchozího lemmatu je znázorněn na obr. 6.2 b). Body $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ a $(x_3, f(x_3))$ určují tři přímky p_1, p_2 a p_3. Vztahy (6.3) vyjadřují nerovnosti mezi jejich směrnicemi.

Definice 6.24. Nechť f je funkce s definičním oborem $D(f)$. *Nadgrafem* funkce f rozumíme rovinnou množinu $G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in D(f) \text{ a } y \ge f(x)\}$.

Nyní již můžeme zformulovat ekvivalentní definice konvexnosti.

Věta 6.25. *Nechť funkce f je definovaná na intervalu I. Pak jsou následující vlastnosti ekvivalentní:*

(a) *Funkce f je konvexní na I.*

(b) *Pro libovolné různé body $x_1, x_2 \in I$ a libovolná čísla $\lambda_1, \lambda_2 \in (0, 1)$ taková, že $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, platí nerovnost*

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2). \tag{6.4}$$

(c) *Pro libovolné tři body $x_1 < x_2 < x_3$ ležící v I platí některá z nerovností* (6.3).

(d) *Nadgraf funkce f je konvexní množina.*

Obdobná věta platí pro ostře konvexní funkce, nahradíme-li všechny neostré nerovnosti ostrými a bude-li v (d) ostře konvexní množina místo konvexní.

Důkaz. Vlastnosti (a) a (b) jsou ekvivalentní, protože nerovnost (6.4) odpovídá nerovnosti (6.2) (pouze se přeznačilo x_3 na x_2), o níž jsme ukázali, že je jen jiným zápisem nerovnosti (6.1).

(a) $\Leftrightarrow$ (c)
Protože nerovnosti (6.3) jsou ekvivalentní, nechť platí např. druhá z nich. Její úpravou dostáváme

$$\begin{aligned}
\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} &\leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}, \\
[f(x_2) - f(x_1)](x_3 - x_2) &\leq [f(x_3) - f(x_2)](x_2 - x_1), \\
f(x_2)(x_3 - x_1) &\leq f(x_3)(x_2 - x_1) - f(x_1)(x_2 - x_3 + x_1 - x_1), \\
f(x_2)(x_3 - x_1) &\leq (x_2 - x_1)[f(x_3) - f(x_1)] + f(x_1)(x_3 - x_1), \\
f(x_2) &\leq f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1),
\end{aligned}$$

a proto podle definice 6.21 je f konvexní na I. Použité úpravy jsou ekvivalentní, takže platí i opačné tvrzení.

(a) $\Rightarrow$ (d)
Předpokládejme, že pro $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ platí $A, B \in G_f$. Je-li $x_1 = x_2$, je tvrzení zřejmé. Nechť tedy např. $x_1 < x_2$. Pak $f(x_1) \leq y_1$ a $f(x_2) \leq y_2$. Nechť $g(x)$ je funkce, jejímž grafem je přímka p procházející body A a B, a $h(x)$ je funkce, jejímž grafem je přímka q procházející body $(x_1, f(x_1))$ a $(x_2, f(x_2))$ — viz obr. 6.2 c). Nechť $C = (x_3, g(x_3))$, $x_3 \in (x_1, x_2)$, je libovolný vnitřní bod úsečky $\overline{AB}$. Ukážeme, že $g(x_3) \geq h(x_3)$, tedy že $C \in G_f$.

Splývá-li p a q, je tvrzení zřejmé. Nechť tedy současně neplatí $f(x_1) = y_1$ a $f(x_2) = y_2$. Pak je dokonce $g(x_3) > h(x_3)$. Připusťme, že pro některé $x_3 \in (x_1, x_2)$ je $g(x_3) = h(x_3)$. Platí

$$g\colon y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \qquad \text{a} \qquad h\colon y = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Odtud dostaneme

$$
\begin{aligned}
y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_3 - x_1) &= f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x_3 - x_1),\\
y_1 - f(x_1) &= \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}\,[(y_1 - f(x_1)) - (y_2 - f(x_2))],\\
\frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_1}[y_1 - f(x_1)] &= -\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}[y_2 - f(x_2)].
\end{aligned}
$$

Levá strana poslední nerovnosti je nezáporná a pravá nekladná, takže obě musí být nulové. To znamená, že $f(x_1) = y_1$ a $f(x_2) = y_2$, což je spor.

(d) $\Rightarrow$ (a)
Protože úsečka spojující body $(x_1, f(x_1))$ a $(x_2, f(x_2))$ leží v G_f, platí $h(x_3) \geq f(x_3)$ pro $x_3 \in (x_1, x_2)$, kde h má stejný význam jako v předchozí části důkazu. Tedy

$$
\begin{aligned}
f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x_3 - x_1) &\geq f(x_3),\\
\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} &\geq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1},
\end{aligned}
$$

kde $x_1 < x_3 < x_2$. Protože již víme, že (a) $\Leftrightarrow$ (c), je funkce f konvexní.

Důkaz pro ostře konvexní funkci je analogický. □

Konvexní a konkávní funkce mají mnoho důležitých vlastností, týkajících se spojitosti, existence jednostranných derivací, lokálních minim a pod. Řada takových výsledků je dokázána v dodatku v paragrafu D.3.

V dalším textu budeme vyšetřovat konvexní a konkávní funkce za předpokladu, že mají derivaci.

Věta 6.26. *Nechť f má vlastní derivaci na otevřeném intervalu I. Pak je f je konvexní (ostře konvexní) na I právě tehdy, když je funkce f' je neklesající (rostoucí) na I.*

Analogické tvrzení platí pro f konkávní (ostře konkávní) na I a f' nerostoucí (klesající) na I.

Důkaz. „$\Rightarrow$“
Zvolme libovolně $x_1, x_2 \in I$, $x \in (x_1, x_2)$. Pak podle lemmatu 6.23 platí

$$
\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}.
$$

Provedeme-li v levém zlomku této nerovnosti limitní přechod pro $x \to x_1^+$ a v pravém zlomku limitní přechod pro $x \to x_2^-$ (a uvědomíme-li si, že podle předpokladu existují derivace $f'(x_1)$ a $f'(x_2)$) dostáváme, že $f'(x_1) \leq f'(x_2)$, což znamená, že funkce f' je neklesající na I.

„$\Leftarrow$“
Nechť je nyní f' neklesající na I a nechť $x_1 < x_2 < x_3$ jsou libovolné tři body z intervalu I. Podle lemmatu 6.23 stačí ukázat, že

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Funkce f splňuje na intervalech $[x_1, x_2]$ a $[x_2, x_3]$ předpoklady Lagrangeovy věty, tj. existují body $c_1 \in (x_1, x_2)$ a $c_2 \in (x_2, x_3)$ takové, že

$$f'(c_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \qquad f'(c_2) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Jelikož $c_1 < c_2$ a f' neklesající, platí $f'(c_1) \leq f'(c_2)$ a tvrzení je dokázáno.

Pro ostře konvexní funkce je důkaz analogický. □

Z vět 6.26 a 6.1 plyne jednoduché kritérium konvexnosti a konkávnosti.

Důsledek 6.27. *Nechť I je otevřený interval a f má vlastní druhou derivaci na I.*

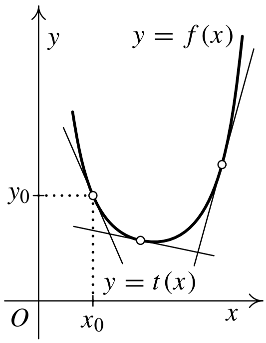
(a) *Je-li $f''(x) > 0$ pro každé $x \in I$, pak je f ostře konvexní na I.*

(b) *Je-li $f''(x) < 0$ pro každé $x \in I$, pak je f ostře konkávní na I.*

Věta 6.28. *Nechť funkce f má vlastní derivaci na intervalu I. Pak je f konvexní (konkávní) na I právě tehdy, když pro každé dva různé body $x, x_0 \in I$, platí:*

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$
$$(f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)).$$

Obdobný výsledek platí pro funkce ostře konvexní a ostře konkávní na intervalu (nerovnosti v tvrzení jsou ostré).



Obr. 6.3

Důkaz. Důkaz provedeme pro případ konvexní funkce, pro konkávní by byl analogický. Geometrický význam (graf konvexní funkce musí ležet nad tečnou v libovolném bodě grafu) je znázorněn na obr. 6.3.

„$\Rightarrow$“
Nechť f je konvexní na intervalu I. Podle věty 6.26 je funkce f' neklesající na I.

Mějme tedy dány dva různé body $x, x_0 \in I$. Podle Lagrangeovy věty existuje bod c mezi body x, x_0 tak, že

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0),$$

odtud odečtením výrazu $f'(x_0)(x - x_0)$ od obou stran rovnosti dostáváme

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = \big(f'(c) - f'(x_0)\big)(x - x_0).$$

Funkce f' je neklesající na I, tj. $\frac{f'(c)-f'(x_0)}{c-x_0} \geq 0$, takže je buď $f'(c) = f'(x_0)$, nebo má výraz $f'(c) - f'(x_0)$ stejné znaménko jako $c - x_0$ a to má stejné znaménko jako $x - x_0$. Proto je $\big(f'(c) - f'(x_0)\big)(x - x_0) \geq 0$, a tedy

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

„$\Leftarrow$“
Nechť je pro libovolné $x \neq x_0$ z intervalu I splněna nerovnost

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Pak platí

$$\begin{aligned} x \in I,\ x < x_0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq f'(x_0),\\ x \in I,\ x > x_0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq f'(x_0). \end{aligned}$$

Odtud dostáváme, že pro libovolné tři body $x_1 < x_2 < x_3$ z intervalu I je

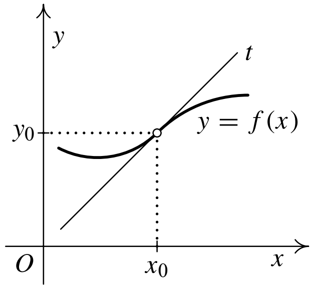
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2},$$

a podle věty 6.25 je f konvexní na I. □

V elementárních kurzech se někdy zavádí pojem konvexní funkce jen pro funkce mající první derivaci. Pak se často pro definici používá ekvivalentní formulace z předchozí věty.

Funkce často nebývá konvexní nebo konkávní na celém svém definičním oboru. Následující definice se týká bodů, v nichž dochází ke změně konvexnosti na konkávnost nebo naopak. S podobnou situací jsme se setkali v předchozím oddílu v souvislosti se změnou typu monotonie. Tam taková změna (rostoucí funkce na klesající nebo naopak) vedla na lokální extrémy.

Definice 6.29. Nechť má funkce f derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Je-li tato derivace nevlastní, předpokládáme navíc, že je f spojitá v bodě x_0.
Řekneme, že x_0 je *inflexním bodem* funkce f, jestliže existuje okolí $\mathscr{O}_\delta(x_0)$ takové, že funkce f je ostře konkávní na intervalu $(x_0 - \delta, x_0)$ a je ostře konvexní na intervalu $(x_0, x_0 + \delta)$ anebo naopak — viz obr. 6.4. Stručně říkáme, že funkce f má v bodě x_0 inflexi.



Obr. 6.4

Následující tvrzení udávají nutné resp. postačující podmínky pro to, aby funkce měla inflexi. Všimněte si analogie s vyšetřováním lokálních extrémů — viz věty 6.8, 6.10 a 6.14. Vše se o jednu derivaci „posune“.

Věta 6.30.

1. *Nechť x_0 je inflexní bod a nechť existuje $f''(x_0)$. Pak $f''(x_0) = 0$.*
2. *Nechť $f''(x_0) = 0$ a existuje okolí $\mathscr{O}_\delta(x_0)$ takové, že platí $f''(x) < 0$ pro každé $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ a $f''(x) > 0$ pro každé $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, nebo naopak. Pak je x_0 inflexním bodem funkce f.*
3. *Nechť $f''(x_0) = 0$ a $f'''(x_0) \neq 0$. Pak je x_0 inflexním bodem funkce f.*

Důkaz.

1. Z existence $f''(x_0)$ plyne, že $f'(x)$ je konečná v jistém okolí bodu x_0. Z definice inflexního bodu a věty 6.26 plyne existence okolí $\mathscr{O}_\delta(x_0)$ takového, že na intervalu $(x_0 - \delta, x_0)$ je f' rostoucí a na intervalu $(x_0, x_0 + \delta)$ je klesající, nebo naopak. Nechť nastane např. první možnost. Protože je f konvexní na $(x_0 - \delta, x_0)$, platí pro libovolnou trojici $x_1 < x_2 < x_3$ z tohoto intervalu nerovnost (6.3b). Jelikož f je spojitá v bodě x_0 (existuje konečná $f'(x_0)$), dostaneme limitním přechodem $x_3 \to x_0^-$, že nerovnost (6.3b) platí i na intervalu $(x_0 - \delta, x_0]$. Funkce f je tudíž na tomto intervalu konvexní, a proto je zde f' rostoucí. Obdobně se ukáže, že f' je klesající na $[x_0, x_0 + \delta)$. Tedy funkce f' má v bodě x_0 lokální extrém (dokonce ostrý). Podle věty 6.8 tudíž musí být $f''(x_0) = 0$.
2. Z existence $f''(x_0)$ plyne, že $f'(x_0)$ je konečná. Dále podle důsledku 6.27 je f konkávní v levém okolí bodu x_0 a konvexní v jeho pravém okolí nebo naopak, což dokazuje tvrzení.
3. Z existence $f'''(x_0)$ plyne, že $f''(x)$ je konečná v jistém okolí bodu x_0. Podle lemmatu 5.22 je f'' v bodě x_0 buď rostoucí, nebo klesající. V nějakém okolí $\mathscr{O}_\delta(x_0)$ je tedy $f''(x_0) < 0$ pro $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ a $f''(x_0) > 0$ pro $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ nebo naopak. Tvrzení nyní plyne z bodu 2. $\square$

Poznamenejme, že z předchozí věty plyne, že funkce může mít inflexi pouze v bodech, kde její druhá derivace neexistuje, nebo je rovna nule.

Poznámka 6.31. Předchozí větu lze indukcí snadno zobecnit. Nechť $f''(x_0) = f'''(x_0) = \cdots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$ a $f^{(k)}(x_0) \neq 0$ pro některé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$.

1. Je-li k liché, je x_0 inflexním bodem funkce f.
2. Je-li k sudé, je f v jistém okolí $\mathscr{O}(x_0)$ ostře konvexní pro $f^{(k)}(x_0) > 0$ a ostře konkávní pro $f^{(k)}(x_0) < 0$. V bodě x_0 tedy funkce f nemá inflexi.

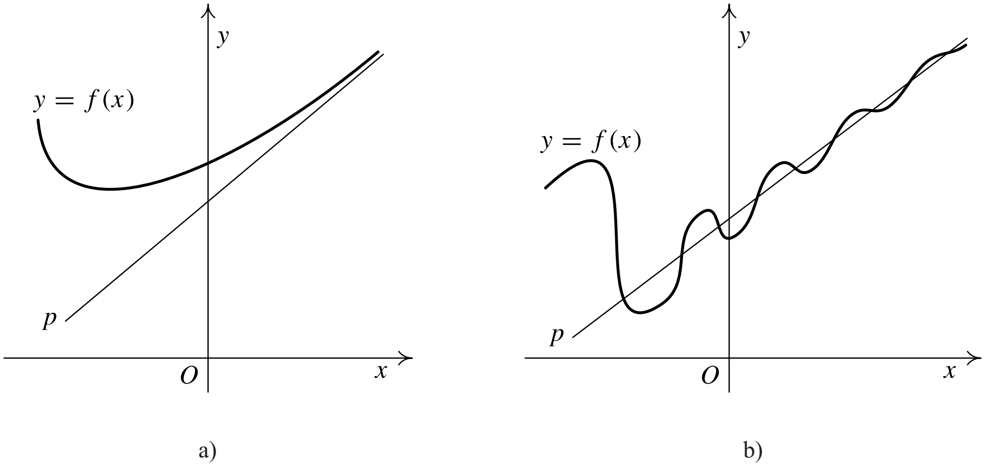
Všimněte si, že pokud je i $f'(x_0) = 0$, doplňuje se předchozí poznámka s poznámkou 6.15. Podobně jako tam lze použití ilustrovat na funkcích $f(x) = x^3$ a $g(x) = x^4$. Platí $f'(0) = f''(0) = 0$, $f'''(0) = 3! > 0$, takže bod 0 je inflexním bodem funkce f (a ta roste dokonce na $\mathbb{R}$) a podobně $g'(0) = g''(0) = g'''(0) = 0$, $g''''(0) = 4! > 0$, takže bod 0 není inflexním bodem funkce g (a ta je ostře konvexní dokonce na $\mathbb{R}$) — srovnejte obr. 3.8 c) a 3.8 a). Znovu připomeňme, že u složitějších funkcí je obvykle výhodnější posoudit, zda druhá derivace mění znaménko, než počítat vyšší derivace.

Poznámka 6.32. Inflexní body se někdy definují odlišně — přehled viz [17, str. 205]. Jedna z častých variant je tato: Bod x_0 se nazývá inflexním bodem funkce f, jestliže existuje vlastní derivace $f'(x_0)$ a v jistém okolí $\mathscr{O}_\delta(x_0)$ platí $f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ pro každé $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ a $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ pro každé $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, nebo naopak. Tedy v levém okolí leží graf funkce pod tečnou v bodě $(x_0, f(x_0))$ a v pravém okolí nad touto tečnou nebo naopak. Lze ukázat, že pokud je x_0 inflexním bodem ve smyslu definice 6.29 a $f'(x_0)$ je vlastní, je inflexním bodem i v právě zmíněném smyslu — viz příklad D.37 dodatku. Opak ale neplatí (např. funkce $f(x) = x^3(1 + \chi(x))$ v bodě 0; přitom χ je Dirichletova funkce).

6.4. Asymptoty funkce

Definice 6.33. Buď $x_0 \in \mathbb{R}$. Přímka $x = x_0$ se nazývá *asymptotou bez směrnice* funkce f, jestliže má f v x_0 alespoň jednu jednostrannou limitu nevlastní, tj. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ nebo $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty$.
Přímka $y = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, se nazývá *asymptotou se směrnicí* funkce f, jestliže platí $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ nebo $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$.

Příklady asymptot bez směrnice jsme viděli např. na obr. 3.9. Uvědomte si, že tyto asymptoty mohou být pouze v bodech, kde není funkce spojitá. Asymptoty se směrnicí jsou znázorněny na obr. 6.5. V případě asymptoty se směrnicí říkáme, že přímka je asymptotou funkce pro x „jdoucí do mínus resp. plus nekonečna“.



Obr. 6.5: Asymptoty se směrnicí pro $x \to +\infty$

Věta 6.34. *Přímka $y = ax + b$ je asymptotou funkce f pro $x \to +\infty$ právě tehdy, když*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \qquad a \qquad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = b.$$

Analogické tvrzení platí pro $x \to -\infty$.

Důkaz. Z definice plyne, že přímka $y = ax + b$ je asymptotou funkce f, právě když platí $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = b$. Odtud plyne, že $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - a\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{b}{x} = 0$, a tudíž nutně $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$. □

Důsledek 6.35. *Přímka $y = b$ je asymptotou funkce f pro $x \to +\infty$ právě tehdy, když $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$. Analogické tvrzení platí pro $x \to -\infty$.*

Příklad 6.36. Určete asymptoty funkce

a) $y = \dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$, b) $y = \mathrm{e}^{\frac{1}{x^2-4x+3}}$, c) $f(x) = \operatorname{arccotg} \dfrac{1}{x}$.

Řešení.

a) Funkce je spojitá na $\mathbb{R}$ s výjimkou bodu $x = -1$, kde není definovaná. S využitím poznámky 4.14 určíme limitu v tomto bodě:

$$\lim_{x\to-1} \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} = \frac{-8}{0+} = -\infty.$$

Proto má daná funkce jednu asymptotu bez směrnice, kterou je přímka $x = -1$. Hledejme nyní asymptoty se směrnicí. Podle věty 6.34 vypočteme následující limity:

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-1)^3}{x(x+1)^2} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} - x \right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - x(x^2 + 2x + 1)}{(x+1)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-5x^2 + 2x - 1}{x^2 + 2x + 1} = -5.$$

Asymptotou pro $x \to +\infty$ je přímka $y = x - 5$. Protože předchozí výpočet je zřejmě platný i pro $x \to -\infty$, je tato přímka asymptotou i pro $x \to -\infty$.

b) Označme zadanou funkci $f(x)$. Nejprve rozložíme polynom ve jmenovateli zlomku na součin: $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$. Jedinými body, kde může mít funkce asymptoty bez směrnice, jsou body $x = 1$ a $x = 3$, neboť v ostatních bodech je funkce spojitá. Limity v těchto bodech jsou:

$$\lim_{x\to1^+} \frac{1}{x^2 - 4x + 3} = -\infty, \qquad \lim_{x\to1^-} \frac{1}{x^2 - 4x + 3} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to3^+} \frac{1}{x^2 - 4x + 3} = +\infty, \qquad \lim_{x\to3^-} \frac{1}{x^2 - 4x + 3} = -\infty.$$

Podle věty 4.16 o limitě složené funkce dostaneme:

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to1^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to3^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to3^+} f(x) = 0.$$

V každém bodě je jedna jednostranná limita nevlastní, takže přímky $x = 1$ a $x = 3$ jsou asymptotami bez směrnice dané funkce.
Nyní hledejme asymptoty se směrnicí. S použitím důsledku 6.35 dostaneme

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2 - 4x + 3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1.$$

Proto je přímka $y = 1$ asymptotou se směrnicí pro $x \to \pm\infty$.

c) Funkce f je spojitá na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, proto jediným bodem, ve kterém by mohla mít asymptotu bez směrnice, je bod $x = 0$. Jednostranné limity v tomto bodě jsou:

$$\lim_{x\to0^+} \operatorname{arccotg} \frac{1}{x} = \lim_{y\to+\infty} \operatorname{arccotg} y = 0,$$
$$\lim_{x\to0^-} \operatorname{arccotg} \frac{1}{x} = \lim_{y\to-\infty} \operatorname{arccotg} y = \pi.$$

Proto funkce nemá žádné asymptoty bez směrnice.

Nyní budeme hledat asymptoty se směrnicí. S použitím důsledku 6.35 dostaneme

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{arccotg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}\,.$$

Tedy funkce má asymptotu se směrnicí $y = \frac{\pi}{2}$ pro $x \to \pm\infty$. ▲

6.5. Průběh funkce — shrnutí

Při vyšetřování průběhu funkce f postupujeme takto:

1. Stanovíme $D(f)$, $H(f)$, zda je funkce f případně sudá, lichá nebo periodická. Najdeme body nespojitosti a rozhodneme o jejich druhu. Určíme nulové body funkce f a intervaly, kde je f kladná a kde záporná.
2. Vypočítáme f' a podle jejího znaménka určíme:
   - intervaly, kde je f rostoucí (z podmínky $f' > 0$),
   - intervaly, kde je f klesající (z podmínky $f' < 0$),
   - lokální extrémy (podle změny znaménka f').
3. Vypočítáme f'' a podle jejího znaménka určíme:
   - intervaly, kde je f konvexní (z podmínky $f'' > 0$),
   - intervaly, kde je f konkávní (z podmínky $f'' < 0$),
   - inflexní body (podle změny znaménka f'').
4. Určíme asymptoty funkce f.
5. Vypočítáme funkční hodnoty ve významných bodech (lokální extrémy, inflexní body atd.).
6. Nakreslíme graf funkce.

Příklad 6.37. Vyšetřete průběh funkce

$$f: y = \frac{\ln x^2}{x}\,.$$

Řešení.

1. Definiční obor $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Platí $f(-x) = \frac{\ln(-x)^2}{-x} = -\frac{\ln x^2}{x} = -f(x)$, proto je daná funkce lichá a vlastnosti musí být jistým způsobem „symetrické“.

   Nulové body funkce určíme z rovnice $f(x) = 0$, odkud dostáváme $x = \pm 1$. Vyšetříme znaménko funkce:

$$f:\quad \begin{array}{ccccccc} & - & & + & & - & & + \\ \hline & & -1 & & 0 & & 1 & \end{array}$$

2. Určíme první derivaci:

$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{x^2}\, x - \ln x^2}{x^2} = \frac{2 - \ln x^2}{x^2}\,.$$

Odtud zjistíme stacionární body funkce:

$$f'(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \ln x^2 = 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \pm\mathrm{e}.$$

Snadno zjistíme znaménko první derivace na jednotlivých intervalech:

$$f'\colon\quad \begin{array}{ccccccc} \searrow & & \nearrow & & \nearrow & & \searrow \\ - & & + & & + & & - \\ \hline & -\mathrm{e} & & 0 & & \mathrm{e} & \\ & \text{min} & & & & \text{max} & \end{array}$$

Funkce nabývá lokálního minima v bodě $x = -\mathrm{e}$ a lokálního maxima v bodě $x = \mathrm{e}$.

3. Druhá derivace je

$$f''(x) = \frac{-\frac{2x}{x^2}\, x^2 - (2 - \ln x^2)2x}{x^4} = \frac{2(\ln x^2 - 3)}{x^3}\,.$$

Určíme nulové body druhé derivace, protože pouze v nich mohou být inflexní body:

$$f''(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \ln x^2 = 3 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \pm\sqrt{\mathrm{e}^3}.$$

Její znaménko je:

$$f''\colon\quad \begin{array}{ccccccc} \frown & & \smile & & \frown & & \smile \\ - & & + & & - & & + \\ \hline & -\sqrt{\mathrm{e}^3} & & 0 & & \sqrt{\mathrm{e}^3} & \\ & \text{inf} & & & & \text{inf} & \end{array}$$

4. Pro určení asymptot funkce počítejme limity

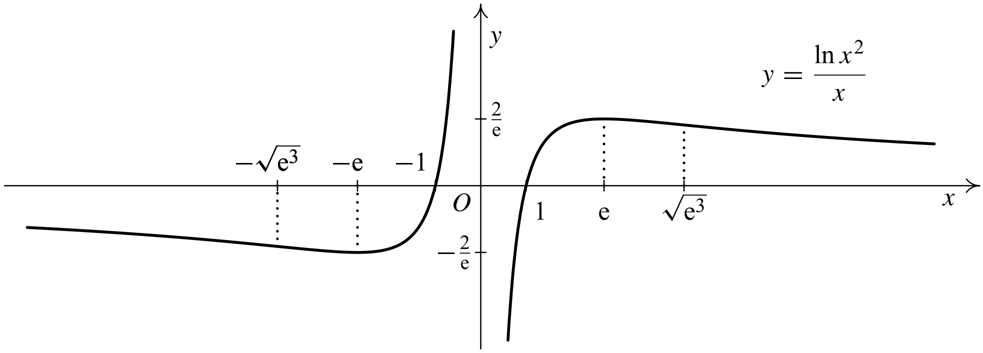
$$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{\ln x^2}{x} = \mp\infty, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\ln x^2}{x} = 0.$$

Odtud vidíme, že přímka $y = 0$ je asymptotou bez směrnice a přímka $y = 0$ je asymptotou pro $x \to \pm\infty$.

5. Spočítáme hodnoty funkce f ve významných bodech (extrémy, inflexní bod):

$$\text{maximum/minimum: } f(\pm\mathrm{e}) = \pm\frac{2}{\mathrm{e}}\,, \qquad \text{inflexe: } f(\pm\sqrt{\mathrm{e}^3}) = \pm\frac{3}{\sqrt{\mathrm{e}^3}}\,.$$

6. Nakreslíme graf funkce — viz obr. 6.6. Funkce je lichá, proto je její graf souměrný podle počátku. (Měřítko na ose x je dvakrát větší než na ose y.) ▲



Obr. 6.6

6.6. Řešené příklady na extrémy a průběh funkce

Příklad 6.38. Vyšetřete průběh funkce

$$f:\ y = x - 2\operatorname{arctg} x.$$

Řešení.

1. Definiční obor dané funkce je $D(f) = \mathbb{R}$. Dále platí

$$f(-x) = -x - 2\operatorname{arctg}(-x) = -x + 2\operatorname{arctg} x = -f(x),$$

proto je funkce lichá a její vlastnosti budou „symetrické“.

Pokusíme se určit znaménko funkčních hodnot. Rovnici $\operatorname{arctg} x = \frac{x}{2}$ však nedokážeme řešit. Jeden kořen je jasný — $x = 0$. Protože funkce $\operatorname{arctg} x$ má v bodě $x = 0$ derivaci rovnu 1 a funkce $\frac{x}{2}$ má derivaci $\frac{1}{2}$, lze z grafů těchto funkcí odhadnout, že existuje jediné číslo $a > 0$ takové, že v $\pm a$ má naše funkce kořeny. Přesněji to uvidíme z výsledného grafu. Tedy:

$$f:\quad \begin{array}{ccccccc} - & & + & & - & & + \\ \hline & -a & & 0 & & a & \end{array}$$

2. Počítejme první derivaci:

$$y' = 1 - \frac{2}{1+x^2} = \frac{x^2-1}{1+x^2}\,.$$

Odtud dostáváme stacionární body $x = \pm 1$ a znaménko první derivace na jednotlivých intervalech:

$$f':\quad \begin{array}{ccccc} \nearrow & & \searrow & & \nearrow \\ + & & - & & + \\ \hline & -1 & & 1 & \\ & \text{max} & & \text{min} & \end{array}$$

Vidíme, že funkce má v bodě $x = 1$ lokální extrém, a to lokální minimum; symetricky v bodě $x = -1$ má lokální maximum.

3. Vypočteme druhou derivaci

$$y'' = \frac{2x(1+x^2) - (x^2-1)2x}{(1+x^2)^2} = \frac{4x}{(1+x^2)^2},$$

odkud $f''(x) = 0$ právě tehdy, když $x = 0$. Určíme znaménko druhé derivace:

$$f'': \quad \begin{array}{c|c} \frown & \smile \\ - & + \\ \hline \multicolumn{2}{c}{0} \\ \multicolumn{2}{c}{\text{inf}} \end{array}$$

4. Funkce je spojitá na celém $\mathbb{R}$, nemá proto žádné asymptoty bez směrnice. Vyšetříme, zda má asymptoty se směrnicí:

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x - 2\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} 1 - 2\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1 - 0 = 1, \\ b_+ &= \lim_{x\to+\infty} (x - 2\operatorname{arctg} x - x) = -2 \cdot \frac{\pi}{2} = -\pi, \\ b_- &= \lim_{x\to-\infty} (x - 2\operatorname{arctg} x - x) = -2 \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi. \end{aligned}$$

Asymptotami funkce jsou tedy přímky $y = x - \pi$ pro $x \to +\infty$ a $y = x + \pi$ pro $x \to -\infty$.

5. Spočtěme funkční hodnoty funkce ve významných bodech:

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1 - \frac{\pi}{2}, \quad f(-1) = -1 + \frac{\pi}{2}.$$

6. Nakreslíme graf funkce, viz obr. 6.7. ▲

Příklad 6.39. Vyšetřete průběh funkce

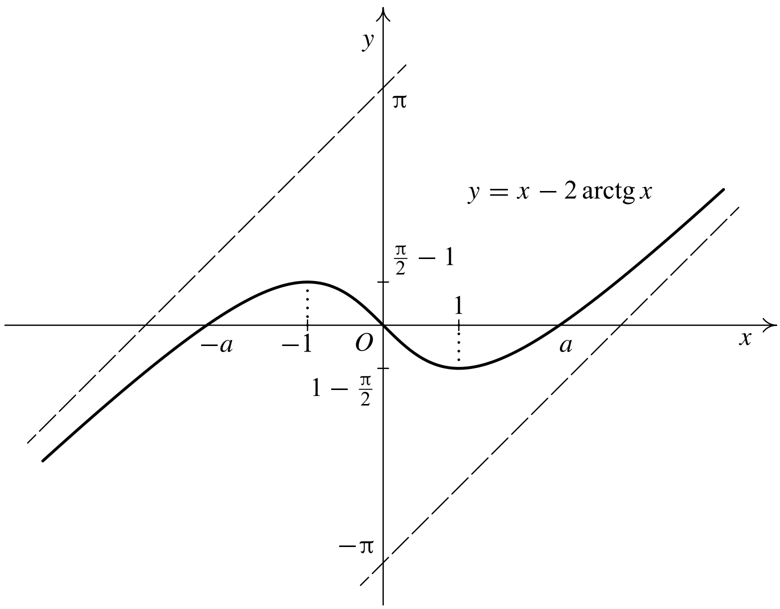
$$f:\ y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}.$$

Řešení.

1. Nejprve určíme definiční obor. Funkce $\arcsin u$ je definována pouze pro hodnoty $u \in [-1, 1]$, proto musí platit $-1 \le \frac{2x}{1+x^2} \le 1$. V příkladu 1.31 a) jsme ukázali, že tato nerovnost platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$, tj. $D(f) = \mathbb{R}$. Funkce f je všude spojitá.

   Nyní vyšetříme, zda je funkce f sudá nebo lichá:

$$f(-x) = \arcsin \frac{-2x}{1+x^2} = -\arcsin \frac{2x}{1+x^2} = -f(x).$$



Obr. 6.7

Funkce je lichá, a proto jsou její vlastnosti opět „symetrické". Nulové body funkce jsou

$$\arcsin \frac{2x}{1+x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x}{1+x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0,$$

tj. jediným nulovým bodem je $x = 0$. Vzhledem k průběhu funkce arkussinus platí:

$$f\colon \quad \underset{0}{\overset{-\quad\;\; +}{\longrightarrow}}$$

2. Počítejme první derivaci funkce. Je nutné si uvědomit, že funkce $\arcsin u$ má derivaci jen pro $u \in (-1, 1)$ a v bodech $u = -1$, $u = 1$ existují pouze jednostranné nevlastní derivace $+\infty$.

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{1+x^2}{\sqrt{1+2x^2+x^4-4x^2}} \cdot \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{(x^2-1)^2}}\,.$$

Odtud pro $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ je

$$y' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)(x^2-1)} = -\frac{2}{x^2+1}$$

a pro $x \in (-1, 1)$ je

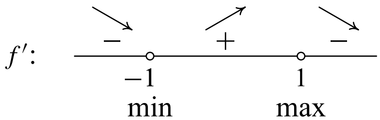
$$y' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)(1-x^2)} = \frac{2}{x^2+1}\,.$$

(Při výpočtu jsme použili rovnosti $\sqrt{a^2} = |a|$ pro libovolné $a \in \mathbb{R}$.) V bodech $-1, 1$ existují pouze jednostranné derivace. S použitím cvičení 9 z kapitoly 5 dostaneme:

$$f'_-(-1) = \lim_{x\to-1-} \frac{-2}{1+x^2} = -1, \qquad f'_+(-1) = \lim_{x\to-1+} \frac{2}{1+x^2} = 1,$$
$$f'_-(1) = \lim_{x\to1-} \frac{2}{1+x^2} = 1, \qquad f'_+(1) = \lim_{x\to1+} \frac{-2}{1+x^2} = -1.$$

Body $x = \pm 1$ jsou tedy tzv. úhlové body.

Dále určíme znaménko první derivace na jednotlivých podintervalech:



Odtud podle věty 6.10 nahlédneme, že v bodě 1 nabývá funkce lokálního maxima (přestože v tomto bodě neexistuje derivace!); symetricky pak v bodě -1 nabývá lokálního minima.

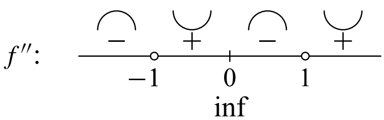
3. Výpočet druhé derivace provedeme na jednotlivých podintervalech:
Pro $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ je

$$y'' = \left(\frac{-2}{1+x^2}\right)' = \frac{4x}{(1+x^2)^2}\,,$$

pro $x \in (-1, 1)$ je

$$y'' = \left(\frac{2}{1+x^2}\right)' = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}\,.$$

Nulový bod druhé derivace je tedy pouze $x = 0$ a jen tam může být inflexe. Určíme znaménko f'' a intervaly, kde je funkce konvexní a kde konkávní.



V bodech $-1, 1$ inflexe není, protože v nich neexistuje první derivace.

4. Funkce je spojitá na celém $\mathbb{R}$, zjevně tedy nemá žádné asymptoty bez směrnice. Vyšetříme, zda má asymptotu se směrnicí pro $x \to \pm\infty$. Platí

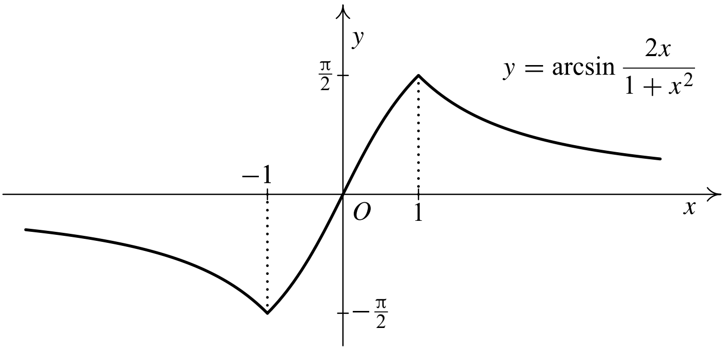
$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\arcsin \frac{2x}{1+x^2}}{x} = \frac{0}{\pm\infty} = 0,$$
$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \lim_{y\to 0^\pm} \arcsin y = 0,$$

přičemž jsme v posledním kroku použili větu o limitě složené funkce ($y = \frac{2x}{1+x^2}$). Přímka $y = 0$ je asymptotou dané funkce pro $x \to \pm\infty$.

5. Určíme funkční hodnoty ve významných bodech

$$f(-1) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}, \qquad f(1) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

6. Nakreslíme graf funkce — viz obr. 6.8. ▲



Obr. 6.8

Příklad 6.40. Vyšetřete průběh funkce $f\colon\ y = \sqrt[3]{1-x^3}$.

Řešení.

1. Definiční obor je $D(f) = \mathbb{R}$. Dále snadno určíme nulové body funkce:

$$\sqrt[3]{1-x^3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1-x^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1.$$

U třetí odmocniny je znaménko funkce f stejné jako znaménko výrazu pod odmocninou:

$$f\colon \quad \underset{}{+} \;\big|_{1}\; \underset{}{-}$$

Protože $f(-x) = \sqrt[3]{1-(-x)^3} = \sqrt[3]{1+x^3}$, funkce není ani sudá. ani lichá.

2. Funkce $\sqrt[3]{u}$ má konečnou derivaci pouze pro $u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Proto pro $x \neq 1$ platí
$$y' = \frac{1}{3}(1 - x^3)^{-\frac{2}{3}} \cdot (-3x^2) = \frac{-x^2}{\sqrt[3]{(1 - x^3)^2}},$$
odkud plyne $f' = 0$ právě tehdy, když $x = 0$. Dále vyšetříme znaménko derivace:
$$f'\colon \quad \begin{array}{ccccc} \searrow & & \searrow & & \searrow \\ - & & - & & - \\ & 0 & & 1 & \end{array}$$
Funkce je na celém $\mathbb{R}$ klesající a nemá tudíž lokální extrém ve svém stacionárním bodě $x = 0$.

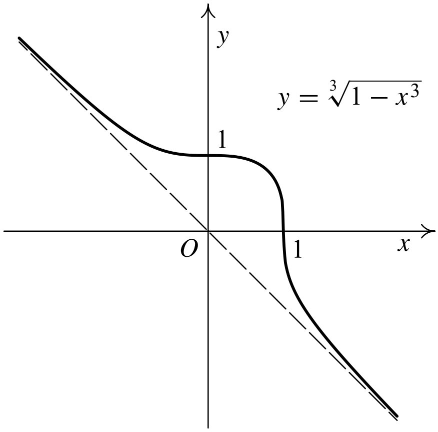
V bodě $x = 1$ s pomocí cvičení 9 z kapitoly 5 určíme derivaci v bodě $x = 1$:
$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{-x^2}{\sqrt[3]{(1 - x^3)^2}} = -\infty.$$

3. Pro $x \neq 1$ je druhá derivace
$$y'' = -\left(\frac{2x(1 - x^3)^{\frac{2}{3}} - x^2 \frac{2}{3}(1 - x^3) - \frac{1}{3}(-3x^2)}{(1 - x^3)^{\frac{4}{3}}}\right) =$$
$$= -\frac{2x(1 - x^3) + 2x^2 \cdot x^2}{(1 - x^3)^{\frac{1}{3}}(1 - x^3)^{\frac{4}{3}}} = -\frac{2x}{\sqrt[3]{(1 - x^3)^5}},$$
odkud plyne, že $f'' = 0$ právě tehdy, když $x = 0$. Znázorníme znaménko druhé derivace:
$$f''\colon \quad \begin{array}{ccccc} \cup & & \cap & & \cup \\ + & & - & & + \\ & 0 & & 1 & \\ & \text{inf} & & \text{inf} & \end{array}$$
Funkce má inflexní body $x = 0$ a $x = 1$.

4. Funkce je spojitá na celém $\mathbb{R}$, proto nemá žádné asymptoty bez směrnice. Počítejme asymptoty se směrnicí:
$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt[3]{1 - x^3}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x^3} - 1} = -1,$$
$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\sqrt[3]{1 - x^3} + x\right) =$$
$$= \lim_{x \to \pm\infty} \left(x - \sqrt[3]{x^3 - 1}\right) \frac{x^2 + x\sqrt[3]{x^3 - 1} + \sqrt[3]{(x^3 - 1)^2}}{x^2 + x\sqrt[3]{x^3 - 1} + \sqrt[3]{(x^3 - 1)^2}} =$$
$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 - x^3 + 1}{x^2 + x\sqrt[3]{x^3 - 1} + \sqrt[3]{(x^3 - 1)^2}} = \frac{1}{+\infty + \infty + \infty} = 0.$$

Tedy přímka $y = -x$ je asymptotou funkce pro $x \to \pm\infty$.

5. Spočítáme funkční hodnoty ve významných bodech: $f(0) = 1, \quad f(1) = 0$.
6. Nakreslíme graf funkce — viz obr. 6.9. ▲



Obr. 6.9

Příklad 6.41. Vyšetřete průběh funkce

$$f\colon\ y = x \operatorname{arccotg} \frac{1}{x}\,.$$

Řešení.

1. Je $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Protože

$$f(-x) = -x \operatorname{arccotg}\Big(-\frac{1}{x}\Big) = -x\Big[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\Big(-\frac{1}{x}\Big)\Big] = -x\Big(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\Big) =$$
$$= -x\Big(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg}\frac{1}{x}\Big) = -\pi x + x \operatorname{arccotg}\frac{1}{x}\,,$$

funkce není ani sudá, ani lichá. Dále vidíme, že $f \neq 0$ na celém $D(f)$. Funkce je kladná pro $x > 0$ a záporná pro $x < 0$:

$$f\colon\quad \overset{-}{}\ \underset{0}{\circ}\ \overset{+}{}$$

2. Vypočteme první derivaci:

$$y' = \operatorname{arccotg}\frac{1}{x} + x \cdot \frac{-1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$
$$= \operatorname{arccotg}\frac{1}{x} + \frac{x^2}{1 + x^2}\,\frac{1}{x} = \operatorname{arccotg}\frac{1}{x} + \frac{x}{1 + x^2}\,.$$

Určení znaménka derivace nelze provést klasickým způsobem, musíme použít menší úvahu.

- Ze znalosti funkce arccotg u jednoduše zjistíme, že

$$x > 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arccotg}\frac{1}{x} > 0,$$
$$x < 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arccotg}\frac{1}{x} > \frac{\pi}{2}\,.$$

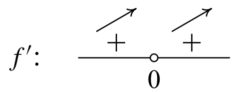
- S použitím výsledku příkladu 1.31 a) dále určíme, že

$$x > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{1+x^2} > 0,$$
$$x < 0 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{x}{1+x^2}\right| \le \frac{1}{2}\,.$$

- Z těchto úvah již snadno vyplývá, že

$$x > 0 \quad \Rightarrow \quad y' > 0,$$
$$x < 0 \quad \Rightarrow \quad y' > \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} > 0.$$

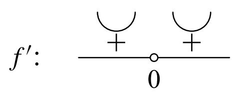
Takže funkce nemá žádný stacionární bod a je na celém $D(f)$ rostoucí:



3. Vypočteme druhou derivaci:

$$y'' = \frac{-1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{x^2+1-2x\cdot x}{(x^2+1)^2} =$$
$$= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{x^2+1+1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{(1+x^2)^2}\,,$$

odkud vidíme, že $f''(x) > 0$ pro všechna $x \in D(f)$:



Funkce je na obou intervalech definičního oboru konvexní.

4. Spočtěme jednostranné limity funkce f v bodě $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} x \operatorname{arccotg} \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{arccotg} \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to +\infty} \frac{\operatorname{arccotg} y}{y} = \frac{0}{+\infty} = 0,$$

$$\lim_{x\to 0^-} x \operatorname{arccotg} \frac{1}{x} = \lim_{y\to -\infty} \frac{\operatorname{arccotg} y}{y} = \frac{\pi}{-\infty} = 0.$$

(Při výpočtu jsme použili větu o limitě složené funkce, kde $y = \frac{1}{x}$.) Proto funkce nemá v bodě $x = 0$ asymptotu bez směrnice.

Vyšetříme asymptoty se směrnicí:

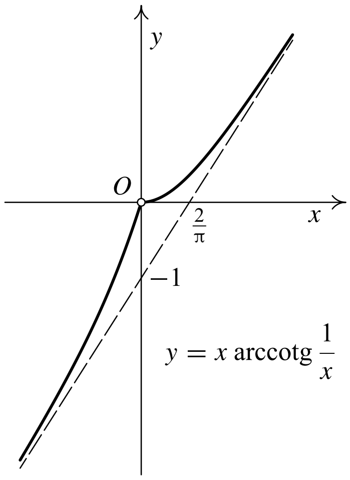
$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x \operatorname{arccotg} \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{arccotg} \frac{1}{x} = \lim_{y\to 0^\pm} \operatorname{arccotg} y = \frac{\pi}{2},$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} x \operatorname{arccotg} \frac{1}{x} - \frac{\pi}{2}x = \lim_{x\to\pm\infty} x \left(\operatorname{arccotg} \frac{1}{x} - \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\operatorname{arccotg} \frac{1}{x} - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to 0^\pm} \frac{\operatorname{arccotg} y - \frac{\pi}{2}}{y} = \frac{0}{0} = \lim_{y\to 0^\pm} \frac{\frac{-1}{1+y^2}}{1} = -1.$$

Přímka $y = \frac{\pi}{2} x - 1$ je asymptotou funkce pro $x \to \pm\infty$.

5. Nakreslíme graf — viz obr. 6.10. ▲



Obr. 6.10

Příklad 6.42. Vyšetřete průběh funkce

$$f:\ y = \ln\cos x.$$

Řešení.

1. Určíme definiční obor dané funkce. Funkce $\ln u$ je definovaná pouze pro hodnoty $u \in (0, \infty)$, proto musí být $\cos x > 0$. Zřejmě platí

$$\cos x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}.$$

Odtud plyne

$$D(f) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right).$$

Dále se nabízí ověřit, zda je daná funkce periodická. Jelikož funkce $\cos x$ je periodická s periodou 2π, platí $\cos(x + 2\pi) = \cos x$, odkud $\ln\cos(x + 2\pi) = \ln\cos x$, takže je funkce f periodická s periodou 2π. Proto stačí se omezit při vyšetřování průběhu pouze na jeden z intervalů tvořících $D(f)$, např. $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Ověřme sudost/lichost funkce. Platí

$$f(-x) = \ln\cos(-x) = \ln\cos x = f(x),$$

neboť funkce $\cos x$ je sudá. Odtud je vidět, že je daná funkce sudá a její graf bude osově souměrný podle osy y.

Vyšetříme znaménko funkce f. Víme, že $\ln u > 0$ právě tehdy, když $u > 1$ a dále $\cos x \le 1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Odtud snadno plyne

$$f(x) \le 0 \quad \text{pro } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = 1,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

Tedy

$$f:\quad \begin{array}{ccccc} & - & & - & \\ -\frac{\pi}{2} & & 0 & & \frac{\pi}{2} \end{array}$$

2. Počítejme první derivaci:

$$y' = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x.$$

Odtud plyne $y' = 0$ právě tehdy, když $x = 0$. Znaménko první derivace je

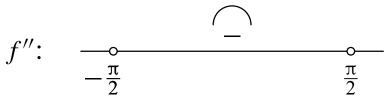
$$f':\quad \begin{array}{ccccc} & \nearrow & & \searrow & \\ & + & & - & \\ -\frac{\pi}{2} & & 0 & & \frac{\pi}{2} \\ & & \text{max} & & \end{array}$$

Vidíme, že funkce má v bodě $x = 0$ lokální maximum.

3. Počítejme druhou derivaci:

$$y'' = -(\operatorname{tg} x)' = -\frac{1}{\cos^2 x} < 0 \quad \text{pro } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

   Tedy:



   Funkce je na celém intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ konkávní.

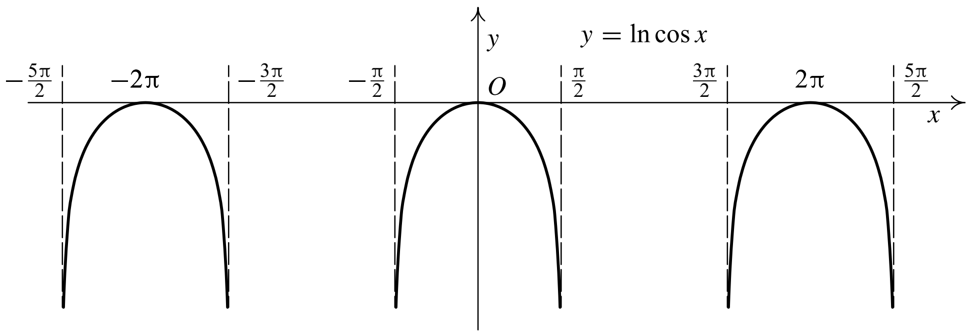
4. Jelikož funkce není definovaná na žádné polopřímce $(a, +\infty)$ ani $(-\infty, a)$, nemá smysl vyšetřovat asymptoty pro $x \to \pm\infty$. Spočítejme limity v krajních bodech vyšetřovaného intervalu:

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \ln \cos x = \lim_{y \to 0^+} \ln y = -\infty.$$

   Analogický výsledek vychází pro limitu $x \to \frac{\pi}{2}^-$, takže funkce má asymptoty bez směrnice v bodech $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$.

5. Spočítáme funkční hodnoty ve významných bodech: $f(0) = 0$.

6. Nakreslíme graf — viz obr. 6.11. ▲



Obr. 6.11

Příklad 6.43. Vyšetřete průběh funkce

$$f : y = \frac{x^3}{x^2 - 1}.$$

Řešení.

1. Jedná se o racionální funkci, která není definovaná pouze v kořenech jmenovatele. Tedy $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Funkce $f(x)$ je spojitá na $D(f)$. Protože

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = \frac{-x^3}{x^2 - 1} = -\frac{x^3}{x^2 - 1} = -f(x),$$

je funkce je lichá, její graf bude středově souměrný vzhledem k počátku.

Dále určíme znaménko $f(x)$. Je to racionální lomená funkce, kořen čitatele $x = 0$ je trojnásobný, kořeny jmenovatele $x = -1$ jsou jednoduché. Tedy

$$f\colon\quad \begin{array}{ccccccc} - & & + & & - & & + \\ \hline & -1 & & 0 & & 1 & \end{array}$$

2. Vypočteme první derivaci:

$$y' = \left(\frac{x^3}{x^2 - 1}\right)' = \frac{3x^2(x^2 - 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2}\,.$$

Kořeny čitatele $x^4 - 3x^2 = x^2(x^2 - 3)$ jsou $x = 0$ (dvojnásobný) a $x = \pm\sqrt{3}$ (jednoduché). V nich jsou stacionární body. Dále určíme znaménko y':

$$f'\colon\quad \begin{array}{ccccccccccc} \nearrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \nearrow \\ + & & - & & - & & - & & - & & + \\ \hline & -\sqrt{3} & & -1 & & 0 & & 1 & & \sqrt{3} & \\ & \text{max} & & & & & & & & \text{min} & \end{array}$$

Tedy v bodě $x = -\sqrt{3}$ je lokální maximum a v bodě $x = \sqrt{3}$ je lokální minimum.

3. Vypočteme druhou derivaci:

$$y'' = \left(\frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2}\right)' = \frac{(4x^3 - 6x)(x^2 - 1)^2 - (x^4 - 3x^2)(x^2 - 1)2x}{(x^2 - 1)^4} =$$

$$= \frac{(x^2 - 1)[(4x^3 - 6x)(x^2 - 1) - 4x(x^4 - 3x^2)]}{(x^2 - 1)^4} =$$

$$= \frac{4x^5 - 6x^3 - 4x^3 + 6x - 4x^5 + 12x^3}{(x^2 - 1)^3} = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3}\,.$$

Čitatel $2x^3 + 6x = 2x(x^2 + 3)$ má jednoduchý kořen $x = 0$, v němž může být inflexe (komplexní kořeny nás nezajímají). Dále určíme znaménko y''. Nesmíme zapomenout, že kořeny $x = \pm 1$ ve jmenovateli jsou trojnásobné. Dostaneme:

$$f''\colon\quad \begin{array}{ccccccc} \frown & & \smile & & \frown & & \smile \\ - & & + & & - & & + \\ \hline & -1 & & 0 & & 1 & \\ & & & \text{inf} & & & \end{array}$$

V bodě $x = 0$ má funkce inflexi.

4. Nyní máme najít asymptoty bez směrnice a se směrnicí. Protože funkce je spojitá na svém definičním oboru, asymptoty bez směrnice mohou být jen v bodech $x = -1$ a $x = 1$. Vypočteme jednostranné limity:

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{-1}{+0} = -\infty, \qquad \lim_{x\to -1^+} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{-1}{-0} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{1}{-0} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{1}{+0} = +\infty.$$

Asymptoty bez směrnice jsou $x = -1$ a $x = 1$.

Dále určíme asymptoty se směrnicí:

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^3-x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{x^2}} = 1,$$
$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Asymptota pro $x \to \pm\infty$ tedy existuje a má rovnici $y = x$.

5. Spočítáme funkční hodnoty ve významných bodech: $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ a

$$f(\pm\sqrt{3}) = \frac{(\pm\sqrt{3})^3}{(\pm\sqrt{3})^2 - 1} = \pm\frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

6. Nakreslíme graf funkce — viz obr. 6.12. ▲

Příklad 6.44. Určete hodnotu reálného parametru a tak, aby funkce

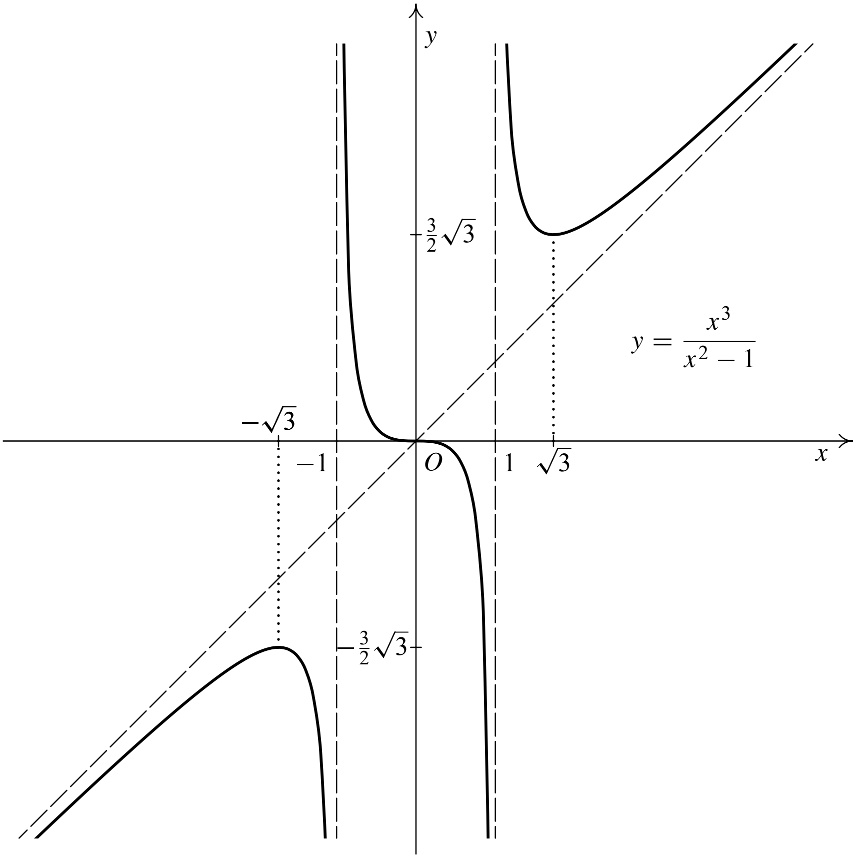
$$f(x) = a\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$$

měla v bodě $x = \frac{\pi}{3}$ extrém.

Řešení. Nejprve určíme první derivaci: $f'(x) = a\cos x + \cos 3x$. Odtud

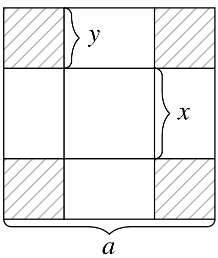
$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = a\cos\frac{\pi}{3} + \cos 3\,\frac{\pi}{3} = \frac{a}{2} - 1.$$

Má-li nastat v bodě $\frac{\pi}{3}$ extrém, musí být $f'(\frac{\pi}{3}) = 0$, a tedy $a = 2$. Ještě musíme ověřit, že extrém opravdu nastane. Při $a = 2$ je $f''(x) = -2\sin x - 3\sin 3x$ a $f''(\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3} - 0 < 0$, takže je zde lokální maximum. ▲



Obr. 6.12

Příklad 6.45. Ze čtverce papíru o straně a vystřihněte v rozích čtverce tak, aby krabice složená ze zbytku papíru měla co největší objem.



Obr. 6.13

Řešení. Snadno nahlédneme, že vzniklá krabice bude kvádr se čtvercovou podstavou. Označme x, y její rozměry — viz obr. 6.13. Objem krabice je pak dán vzorcem $V = x^2 y$. Dále z obrázku snadno odhalíme závislost $2y+x = a$, odkud $y = \frac{a-x}{2}$ a tudíž platí

$$V = x^2\,\frac{a-x}{2}\,.$$

Hledejme maximum funkce V na intervalu $[0, a]$. Funkce je spojitá a má derivaci, takže podle Weierstrassovy věty existuje absolutní maximum a je buď ve vnitřním stacionárním bodě, nebo v krajních bodech.

Vyjádříme první derivaci

$$V'(x) = x(a-x) - \frac{x^2}{2} = x\left(a - \frac{3}{2}x\right),$$

odkud $V'(x) = 0$ právě tehdy, když $x = 0$ nebo $x = \frac{2}{3}a$. Lehce zjistíme, že v bodě $x_0 = \frac{2}{3}a$ nabývá funkce globálního maxima (v krajních bodech je $V(0) = V(a) = 0$, takže jsou to absolutní minima). Hledané rozměry jsou tedy

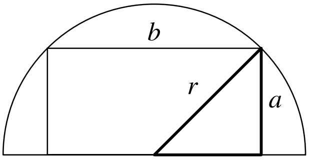
$$x_0 = \frac{2}{3}a, \quad y_0 = \frac{a}{6}, \qquad V_{\max} = x_0^2 \cdot y_0 = \frac{2}{27}a^3.$$

▲

Příklad 6.46. Do půlkruhu o poloměru r vepište obdélník největšího obsahu.

Řešení. Označme si strany obdélníku a, b. Z obrázku 6.14 vidíme, že podle Pythagorovy věty platí:

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + a^2 = r^2,$$



Obr. 6.14

odkud

$$a = \sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}},$$

jelikož uvažujeme pouze $a \geq 0$. Pro obsah obdélníku platí $S = a \cdot b$, a tedy v našem konkrétním případě

$$S = \sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}} \cdot b.$$

Vyjádřili jsme obsah vepsaného obdélníku jakožto funkci jedné proměnné b. Budeme hledat extrémy této funkce na intervalu $[0, 2r]$. Podle Weierstrassovy věty absolutní extrémy existují. Vyjádřeme nejprve první derivaci:

$$S'(b) = \frac{-\frac{b}{4}}{\sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}}} \cdot b + \sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}} = \frac{r^2 - \frac{2b^2}{4}}{\sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}}}.$$

Nyní

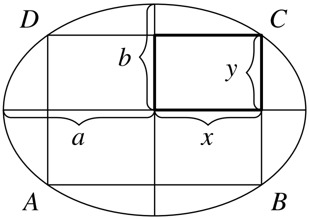
$$S'(b) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 - \frac{b^2}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = \sqrt{2}r.$$

Funkce S je v krajních bodech intervalu $[0, 2r]$ nulová, na celém intervalu je nezáporná (obsah obdélníku nemůže být záporné číslo) a tedy je zřejmé, že v bodě $b_0 = \sqrt{2}r$ nabývá svého maxima ($b = 0$ a $b = 2r$ dávají minimum). Odtud již snadno určíme hledaný maximální obsah vepsaného obdélníku:

$$a_0 = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} = \frac{r}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad S_{\max} = a_0 \cdot b_0 = \frac{r}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}r = r^2.$$

▲

Příklad 6.47. Do elipsy s hlavní poloosou a a vedlejší poloosou b vepište obdélník se stranami rovnoběžnými s poloosami tak, aby obsah obdélníku byl maximální.



Obr. 6.15

Řešení. Rovnice elipsy se středem v bodě $(0, 0)$ má tvar $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Označme si vrcholy obdélníku dle obrázku 6.15. Bod C má souřadnice $C = (x, y)$, kde $x \in [0, a]$, $y \in [0, b]$. Ze symetrie je jasné, že obsah obdélníku určíme jako $S = 4xy$. Jelikož bod C leží na elipse, určíme jeho y-ovou souřadnici z rovnice elipsy:

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \quad \Rightarrow \quad y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},$$

jelikož uvažujeme $y \geq 0$. Nyní již můžeme vyjádřit obsah vepsaného obdélníku jako funkci jedné proměnné:

$$S(x) = 4bx\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Hledejme nyní absolutní maximum funkce $S(x)$ na intervalu $[0, a]$. To podle Weierstrassovy věty existuje. Stacionární bod S určíme z rovnice

$$S'(x) = 4b\left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} + x\,\frac{\left(-\frac{2x}{a^2}\right)}{2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}\right) = 4b\,\frac{1 - 2\,\frac{x^2}{a^2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} = 0,$$

odkud

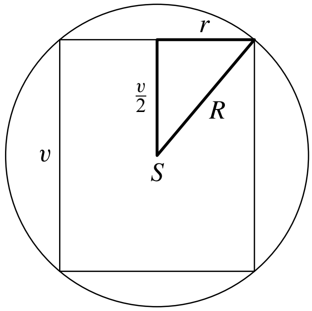
$$1 - \frac{2x^2}{a^2} = 0, \quad \text{takže} \quad x = \frac{a}{\sqrt{2}},$$

jelikož opět uvažujeme pouze $x \geq 0$. Je zřejmé, že v krajních bodech intervalu $[0, a]$ je funkce $S(x)$ nulová (vytvořený obrazec je úsečka), je proto na celém intervalu $[0, a]$ nezáporná, a tedy je zřejmé, že v bodě $x_0 = a/\sqrt{2}$ nabývá svého absolutního maxima. Nyní již snadno určíme hledaný maximální obsah:

$$y_0 = b\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}} = \frac{b}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad S_{\max} = 4x_0y_0 = 4\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}\cdot\frac{b}{\sqrt{2}} = 2ab.$$

▲

Příklad 6.48. Do koule o poloměru R vepište válec s největším obsahem.



Obr. 6.16

Řešení. Při řešení těchto „prostorových" úloh je vždy základem úspěchu nakreslit si vhodný obrázek. Na našem obrázku 6.16 vidíme středový řez danou koulí. Označme r poloměr základny a v výšku vepsaného válce. Podle Pythagorovy věty platí:

$$\left(\frac{v}{2}\right)^2 + r^2 = R^2,$$

odkud

$$v = 2\sqrt{R^2 - r^2},$$

jelikož uvažujeme pouze nezápornou výšku. Nyní můžeme vyjádřit objem vepsaného válce jakožto funkci jedné proměnné r:

$$V(r) = \pi r^2 \cdot v = 2\pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2}.$$

Budeme hledat absolutní extrém této funkce na intervalu $[0, R]$. Podle Weierstrassovy věty existuje. Nejprve vyjádříme první derivaci:

$$V'(r) = 2\pi \left(2r\sqrt{R^2 - r^2} + r^2 \cdot \frac{-r}{\sqrt{R^2 - r^2}} \right) = 2\pi \, \frac{2r(R^2 - r^2) - r^3}{\sqrt{R^2 - r^2}},$$

tedy

$$V'(r) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r(2R^2 - 3r^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = 0 \text{ nebo } r = \sqrt{\frac{2}{3}}\, R.$$

V krajních bodech je $V(0) = V(R) = 0$, takže jde o absolutní minima. Absolutní maximum je v bodě $r_0 = \sqrt{2/3}R$. Nyní již snadno dokončíme výpočet:

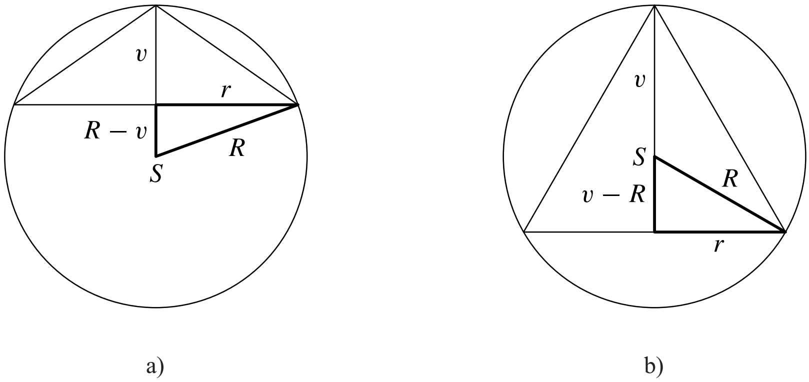
$$v_0 = 2\sqrt{R^2 - \frac{2}{3}\, R^2} = \frac{2R}{\sqrt{3}},$$

takže

$$V_{\max} = \pi r_0^2 \cdot v_0 = \pi \, \frac{2}{3}\, R^2 \cdot \frac{2R}{\sqrt{3}} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}\, R^3.$$

▲

Příklad 6.49. Do koule o poloměru R vepište kužel s největším objemem.



Obr. 6.17

Řešení. Nakresleme si středový řez koulí a označme v výšku kuželu a r poloměr základny. Situace vypadá následovně. V prvním případě (pro $v \leq R$ — viz obr. 6.17 a)) platí dle Pythagorovy věty

$$(R - v)^2 = R^2 - r^2,$$

v druhém případě (pro $v \geq R$ — viz obr. 6.17 b))

$$(v - R)^2 = R^2 - r^2.$$

V obou případech získáváme

$$r = \sqrt{2vR - v^2}.$$

Nyní již můžeme vyjádřit objem vepsaného kužele pouze v závislosti na v:

$$V = \frac{1}{3}\,\pi r^2 v = \frac{1}{3}\,\pi v(2vR - v^2) = \frac{2}{3}\,\pi v^2 R - \frac{1}{3}\,\pi v^3.$$

Hledejme absolutní maximum funkce $V(v)$ na intervalu $[0, 2R]$. Podle Weierstrassovy věty existuje. Vyjádříme si první derivaci:

$$V'(v) = \frac{4}{3}\,\pi v R - \pi v^2 = \pi v\Big(\frac{4}{3}\,R - v\Big),$$

odkud

$$V'(v) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = 0 \text{ nebo } v = \frac{4}{3}\,R.$$

V krajních bodech je $V(0) = V(2R) = 0$, tedy jde o globální minima. Globální maximum je v bodě $v_0 = (4/3)R$. Ještě určíme hledaný objem:

$$r_0 = \sqrt{\frac{8}{3}R^2 - \frac{16}{9}R^2} = \frac{\sqrt{8}}{3}R \quad \Rightarrow \quad V_{\max} = \frac{1}{3}\,\pi r_0^2 v_0 = \frac{32}{81}\,\pi R^3.$$

▲

Cvičení

1. Ramena a menší základna rovnoramenného lichoběžníku mají velikost a. Určete velikost jeho větší základny tak, aby byl obsah lichoběžníku maximální.

2. Do rovnoramenného trojúhelníku o základně a a výšce v vepište obdélník s největším obsahem.

3. Do kružnice o poloměru r vepište rovnoramenný trojúhelník s maximálním obsahem.

4. Najděte lokální extrémy funkce:

   a) $y = x^2 + 4x + 5$, b) $y = x^3 - 12x - 6$, c) $y = \dfrac{x-1}{x}$,

   d) $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2$, e) $y = \sqrt[3]{(x^4-1)^2}$, f) $y = 3 - 2\sqrt[3]{x^2}$,

   g) $y = x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

5. Najděte absolutní extrémy funkce:

   a) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1,\ x \in [-2, 1]$, b) $y = x^2 \ln x,\ x \in [1, \mathrm{e}]$.

6. Najděte intervaly, na nichž je funkce f konvexní resp. konkávní, a určete její inflexní body:

   a) $y = 5x^2 + 20x + 7$, b) $y = x(1-x)^2$, c) $y = x^2 - 1 + \sqrt[3]{x^2}$,

   d) $y = \dfrac{x}{1+x^2}$, e) $y = x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

7. Vyšetřete průběh funkce a nakreslete graf:

   a) $y = \dfrac{x}{1+x^2}$, b) $y = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$, c) $y = \dfrac{1+x}{1+x^2}$,

   d) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{x}$, e) $y = \dfrac{1}{x^2+4x+3}$.

8. Určete asymptoty ke grafu funkce:

   a) $y = 3x + \dfrac{3}{x-2}$, b) $y = x + \dfrac{2x}{x^2-1}$, c) $y = \dfrac{1}{1-x^2}$,

   d) $y = x\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}$, e) $y = \sqrt[3]{x^3+4x^2}$, f) $y = x\ln\left(\mathrm{e} + \dfrac{1}{x}\right)$.

9. Vyšetřete průběh funkce a nakreslete graf:

   a) $y = x^3 + 3x$, b) $y = \dfrac{x}{x-1}$, c) $y = \ln(4-x^2)$,

   d) $y = x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$, e) $y = \ln\dfrac{x+1}{1-x}$, f) $y = \sqrt[3]{2x^2-x^3}$.

10. Ověřte, že funkce $f(x)$ z příkladu 1.39 ke kapitole 1 není monotonní na žádném ryzím jednostranném okolí počátku.

*

„Dvě věci jsou nekonečné: vesmír a lidská hloupost; a nejsem si jist tím vesmírem. . . “ Albert Einstein

*

Co je lepší — věčná blaženost, nebo buřty s cibulí? Na první pohled by se mohlo zdát, že věčná blaženost, ale dokážeme, že tomu tak není. Co je lepší než věčná blaženost? Nic. A buřty s cibulí jsou samozřejmě lepší než nic. Když to složíme dohromady, vyjde nám, že buřty s cibulí jsou lepší než věčná blaženost!

Kapitola 7

Přibližné vyjádření funkce

V této kapitole ukážeme, jak lze přibližně určovat funkční hodnoty funkce f v okolí daného bodu, tj. lokálně . Zadanou funkci nahradíme (aproximujeme) nějakou jednodušší funkcí. V našem případě budeme používat polynomy. Nejjednodušší aproximace je pomocí lineárního polynomu, kdy přírůstek funkce zaměňujeme lineární funkcí — tzv. diferenciálem. Aproximujeme-li funkci obecně polynomem stupně n, mluvíme o Taylorově rozvoji.

Ilustrujme nejprve tento problém na příkladě: Chceme aproximovat danou funkci $f(x) = \frac{1}{1+x}$ v okolí bodu 0 polynomem stupně n. Použijeme vzorec pro součet nekonečné geometrické řady, podle kterého

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \frac{1}{1+x} \qquad \text{pro každé } x,\ |x| < 1.$$

Znamená to, že funkci $f(x) = \frac{1}{1+x}$ můžeme v okolí bodu 0 s určitou chybou nahradit funkcí $P_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n$. Říkáme, že funkci f *„lokálně aproximujeme“* (tj. nahrazujeme) polynomem stupně n.

7.1. Diferenciál

Definice 7.1. Nechť funkce f je definovaná v okolí $\mathscr{O}(x_0)$ bodu x_0 a platí $x_0 + h \in \mathscr{O}(x_0)$. Pak číslo h nazýváme *přírůstkem nezávisle proměnné* a rozdíl $\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$ nazýváme *přírůstkem funkce* f v bodě x_0 s krokem h neboli *přírůstkem závisle proměnné* — viz obr. 7.1.

Naším cílem bude vyšetřit vyjádření přírůstku $\Delta f(x_0)$ v závislosti na čísle h. Nejjednodušší případ je obsahem následující definice.

Definice 7.2. Řekneme, že funkce f je *diferencovatelná* v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ bodu x_0 tak, že pro všechny body $x_0 + h \in \mathcal{O}(x_0)$ platí

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = A \cdot h + \tau(h),$$

kde A je vhodné číslo a $\tau(h)$ je funkce taková, že $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\tau(h)}{h} = 0$.
Je-li funkce f v bodě x_0 diferencovatelná, nazývá se výraz $A \cdot h$ *diferenciál* funkce f v bodě x_0 a značí se $\mathrm{d}f(x_0)(h)$ nebo stručně bez označení přírůstku h jen $\mathrm{d}f(x_0)$.

Následující věta udává vztah mezi diferencovatelností funkce a její derivací.

Věta 7.3. *Funkce f má v bodě x_0 diferenciál (je diferencovatelná v x_0) právě tehdy, když existuje vlastní derivace $f'(x_0)$. Přitom pro konstantu A z definice 7.2 platí $A = f'(x_0)$, a tedy*

$$\mathrm{d}f(x_0)(h) = f'(x_0) \cdot h.$$

(Píšeme též $\mathrm{d}f(x) = f'(x)\,\mathrm{d}x$.)

Důkaz. „$\Rightarrow$“
Předpokládejme, že funkce f je diferencovatelná v x_0, tj. existují A a $\tau(h)$ tak, že platí $f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + \tau(h)$ pro $h \in (-\delta, \delta)$, $\delta > 0$, kde $\lim\limits_{h \to 0} \tau(h)/h = 0$. Odtud plyne

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = A + \frac{\tau(h)}{h},$$

takže

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(A + \frac{\tau(h)}{h} \right) = A,$$

tj. existuje vlastní derivace $f'(x_0)$ a je rovna A.

„$\Leftarrow$“
Předpokládejme existenci $f'(x_0) = A \in \mathbb{R}$. Chceme dokázat, že výraz Ah je diferenciál funkce f v bodě x_0. Nechť $\tau(h) := f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah$. Pak

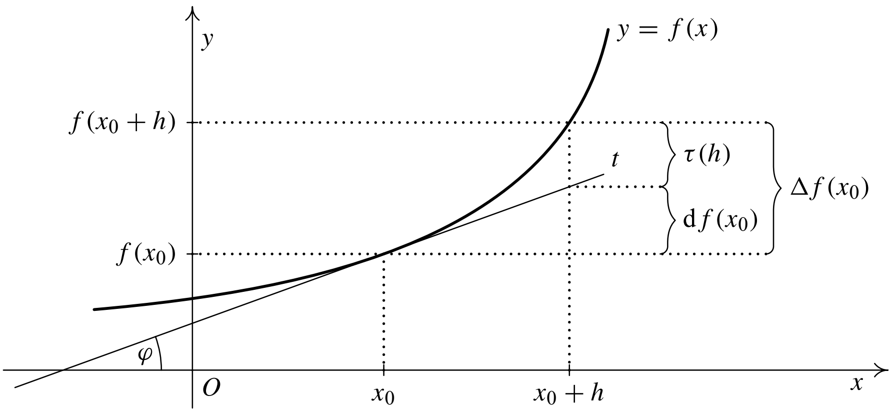
$$\lim_{h \to 0} \frac{\tau(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - A = 0,$$

takže f je diferencovatelná v bodě x_0. □

Uvědomte si, že z předchozí věty vyplývá, že konstanta A a funkce $\tau(h)$ z definice 7.2 jsou určeny jednoznačně.

Nechť existuje diferenciál $\mathrm{d}f(x_0)$ funkce f v bodě x_0. Snadno se ověří, že platí

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta f(x_0) - \mathrm{d}f(x_0)}{h} = 0. \tag{7.1}$$



Obr. 7.1: Geometrický význam diferenciálu

Je-li $f'(x_0) \neq 0$, platí rovněž

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\mathrm{d}f(x_0)} = 1. \tag{7.2}$$

Geometrický význam diferenciálu.

Víme již, že vlastnost „mít diferenciál" je rovnocenná vlastnosti „mít derivaci". Sestrojme tečnu t ke grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$ — viz obr. 7.1. Pak platí $f'(x_0) = \operatorname{tg}\varphi = \mathrm{d}f(x_0)/h$. Přírůstek $\Delta f(x_0)$ je součtem dvou hodnot: diferenciálu $\mathrm{d}f(x_0)$ a $\tau(h)$. Ze vztahů (7.1) a (7.2) je vidět, že pro malá h je (je-li $f'(x_0) \neq 0$) $\tau(h)$ mnohem menší než diferenciál.

Nejběžnější aplikace diferenciálu spočívá v tom, že (pro malá h) klademe

$$f(x_0 + h) \doteq f(x_0) + f'(x_0)h,$$

tj. skutečný přírůstek funkce $\Delta f(x_0)$ nahradíme s jistou chybou diferenciálem $\mathrm{d}f(x_0)$ (geometricky graf funkce nahradíme její tečnou). Někdy se používá označení

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad \text{pro } x \to x_0. \tag{7.3}$$

Příklad 7.4. Vypočtěte přibližně $\sin 29°$ a $\operatorname{arccotg} 1{,}02$.

Řešení. Použijeme vzorec (7.3). Dostáváme

1. $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$, $\mathrm{d}x = h = -\frac{\pi}{180}$, $\mathrm{d}\sin x = (\sin x)'\,\mathrm{d}x = \cos x\,\mathrm{d}x$. Aplikujeme diferenciál: $\sin 29° \doteq \sin\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{180} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0{,}0174 \doteq 0{,}4849$. Přesná hodnota je po zaokrouhlení $0{,}4848$.

2. $f(x) = \operatorname{arccotg} x$, diferenciál $\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x_0^2+1}\,\mathrm{d}x$, $x_0 = 1$, $\mathrm{d}x = h = 0{,}02$. S použitím diferenciálu dostaneme $\operatorname{arccotg} 1{,}02 \doteq \operatorname{arccotg} 1 + \left(-\frac{1}{1^2+1}\right) 0{,}02 = \frac{\pi}{4} - 0{,}01 \doteq 0{,}7754$. Přesná hodnota je po zaokrouhlení $0{,}7755$.

▲

Nechť f má derivaci na množině M. Pak pro každé $x \in M$ je definován diferenciál $\mathrm{d}f(x)(h) = f'(x)h$, tj. diferenciální funkce. Je to funkce dvou proměnných: nezávislé proměnné x a přírůstku nezávisle proměnné h.

Pro lineární funkci $g(x) = x$ platí $\mathrm{d}g(x) = \mathrm{d}x = 1 \cdot h = h$. Tato rovnost vysvětluje, proč pro označení přírůstku nezávisle proměnné používáme rovněž symbol $\mathrm{d}x$. Pro diferenciál funkce f pak máme $\mathrm{d}f(x) = f'(x)\,\mathrm{d}x$, odkud plyne $f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$, což zdůvodňuje označení pro derivaci funkce f symbolem $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$. Při tomto označení (pocházejícím od Leibnize, označení čárkou zavedl Lagrange) mají některé vzorce pro derivování názorný tvar. Například:

- Větu o derivaci složené funkce o složkách $y = f(x)$, $z = g(y)$ lze zapsat jako
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$
- Větu o derivaci inverzní funkce $x = f^{-1}(y)$ k funkci $y = f(x)$ lze vyjádřit jako
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}.$$

Příklad 7.5. Dokažte, že pro libovolné $a \in \mathbb{R}$ platí

$$(1+x)^a \approx 1 + ax \qquad \text{pro } x \to 0.$$

Pomocí tohoto vzorce vypočtěte přibližně $\sqrt{5}$, $1{,}03^5$ a $\sqrt[4]{267}$.

Řešení. Položme $f(x) = (1+x)^a$, $x_0 = 0$. Pak $f(x_0) = 1$, $f'(x) = a(1+x)^{a-1}$ a $f'(0) = a$. Odtud máme $f(x) = f(0+x) \doteq f(0) + f'(0) \cdot x$, tj. $(1+x)^a \approx 1 + ax$.

Právě dokázaný vzorec aplikujme na konkrétní příklady. Platí:

a) $\sqrt{5} = \sqrt{4+1} = 2 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4}} \approx 2\left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\right) = 2{,}25$. Můžeme ověřit, jak je naše aproximace přesná: Na kalkulačce najdeme (po zaokrouhlení) $\sqrt{5} \doteq 2{,}236$, a proto chyba, které jsme se aproximací dopustili, je $-0{,}014$.

b) $1{,}03^5 = (1 + 0{,}03)^5 \approx 1 + 5 \cdot 0{,}03 = 1{,}15$.

c) $\sqrt[4]{267} = \sqrt[4]{256 + 11} = 4 \cdot \sqrt[4]{1 + \frac{11}{256}} \approx 4\left(1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{11}{256}\right) = 4{,}0428$. ▲

Použití diferenciálu na řešení podobných úloh je v dnešní době archaismem. Přibližný vzorec ovšem neztrácí smysl, pokud nemáme analytický předpis funkce $f(x)$ a hodnoty $f(x_0)$ a $f'(x_0)$ jsme získali např. měřením. Zásadní význam má tento vztah rovněž ve fyzice a pod. při odvozování nejrůznějších vzorců, kdy se vyšší mocniny přírůstku (tj. u nás výraz $\tau(h)$) zanedbávají. Tyto členy vlastně zmizí při nějakém limitním přechodu. Použití diferenciálu znamená linearizaci problému.

Diferenciál se rovněž používá při odhadu tzv. *absolutní chyby* $\Delta f(x_0)$ a *relativní chyby* $\Delta f(x_0)/f(x_0)$. Klade se $\Delta f(x_0) \doteq \mathrm{d}f(x_0)$ a $\Delta f(x_0)/f(x_0) \doteq \mathrm{d}f(x_0)/f(x_0)$. Toto použití ilustrují následující (velmi jednoduché) příklady.

Příklad 7.6. Vypočtěte, o kolik se přibližně zvětší objem koule, jestliže za poloměr místo hodnoty $r = 2$ cm vezmeme hodnotu $r = 2{,}123$ cm. Odhadněte relativní chybu výpočtu.

Řešení. Obecný vzorec pro výpočet objemu koule je $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Platí $V'(r) = 4\pi r^2$, a proto $\Delta(V) \doteq \mathrm{d}V = 4\pi r^2\,\mathrm{d}r = 4\pi \cdot 4\ \mathrm{cm}^2 \cdot 0{,}123\ \mathrm{cm} \doteq 6{,}183\ \mathrm{cm}^3$.

Dále $V(2) = \frac{32\pi}{3}\ \mathrm{cm}^3 \doteq 33{,}510\ \mathrm{cm}^3$, tedy pro relativní chybu máme $\frac{\mathrm{d}V}{V} \doteq 0{,}185$, tj. asi 18,5 %. Nebo $\frac{\mathrm{d}V}{V} = \frac{4\pi r^2\,\mathrm{d}r}{(4/3)\pi r^3} = \frac{3\,\mathrm{d}r}{r}$ se stejným výsledkem.

Příklad je samozřejmě „školský“. Vzhledem k jednoduchosti vzorce je snadné získat přesné hodnoty. Je $\Delta V(2) = V(2{,}123) - V(2) \doteq 6{,}571\ \mathrm{cm}^3$ a $\frac{\Delta V(2)}{V(2)} \doteq 0{,}196$, tj. asi 19,6 %. ▲

Příklad 7.7. Pomocí diferenciálu odhadněte, jaká je přibližná změna obsahu kruhové výseče o úhlu $\alpha = 60^\circ$ a poloměru $r = 1$ m

(i) při zvětšení poloměru o $\Delta r = 1$ cm;

(ii) při zmenšení středového úhlu o $30'$.

Řešení. Vzorec pro výpočet obsahu kruhové výseče je

$$S(\alpha, r) = \frac{1}{2} r^2 \alpha.$$

V prvním případě uvažujeme funkci S v závislosti na r. Aproximujeme skutečný rozdíl $\Delta S(r)$ pomocí diferenciálu a dostáváme

$$\Delta S(r) \doteq \mathrm{d}S(r) = S'(r)\,\mathrm{d}r = r\alpha\,\mathrm{d}r,$$

odkud $\Delta S(1) \doteq 1\ \mathrm{m} \cdot \frac{\pi}{3} \cdot 0{,}01\ \mathrm{m} = 0{,}0105\ \mathrm{m}^2$.

V druhém případě postupujeme obdobně. Platí $\Delta\alpha = -30' = -\frac{\pi}{360}$ rad. Aproximujeme funkci $S(\alpha)$ diferenciálem

$$\Delta S(\alpha) \doteq \mathrm{d}S(\alpha) = S'(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = \frac{r^2}{2}\,\mathrm{d}\alpha, \text{ tedy } \Delta S\left(\frac{\pi}{3}\right) \doteq -\frac{1\ \mathrm{m}^2 \cdot \pi}{2 \cdot 360} = -0{,}0044\ \mathrm{m}^2.$$

Odhady relativních chyb jsou

$$\frac{\mathrm{d}S(r)}{S(r)} = \frac{2r\alpha\,\mathrm{d}r}{r^2\alpha} = 2\,\frac{\mathrm{d}r}{r} = 0{,}02 = 2\,\%,$$
$$\frac{\mathrm{d}S(\alpha)}{S(\alpha)} = \frac{(1/2)r^2\,\mathrm{d}\alpha}{(1/2)r^2\alpha} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha} = 0{,}01 = 1\,\%.$$

▲

7.2. Taylorův vzorec

Řešme problém zmíněný v úvodu této kapitoly: Nechť má funkce f v bodě x_0 všechny derivace až do řádu n, které jsou vlastní. Chceme funkci v okolí bodu x_0 nahradit polynomem tvaru $P_n = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n$ tak, aby polynom aproximoval funkci f co „nejpřesněji“. Je jistě rozumné požadovat, aby

$$f^{(i)}(x_0) = P_n^{(i)}(x_0) \qquad \text{pro } i = 0, \dots, n,$$

což je $n + 1$ rovnic o neznámých a_i, kde $i = 0, \dots, n$. Platí

$$\begin{aligned} f(x_0) &= P_n(x_0) = a_0, \\ f'(x_0) &= P_n'(x_0) = a_1, \\ f''(x_0) &= P_n''(x_0) = 2a_2, \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x_0) &= P_n^{(n)}(x_0) = n(n-1)\cdot \dots \cdot 1 \cdot a_n = n!a_n. \end{aligned}$$

Odtud dostáváme hledaný polynom

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0).$$

Tento polynom se nazývá *Taylorův polynom* stupně n funkce f se středem x_0 a značí se $T_n(x)$ nebo podrobněji $T_n(f, x_0, x)$. Nahradíme-li funkci f v okolí bodu x_0 Taylorovým polynomem T_n, dopustíme se chyby, kterou označujeme R_n, tj.

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x).$$

O velikosti této chyby mluví následující věta.

Věta 7.8 (Taylorova věta). *Nechť má funkce f v okolí bodu x_0 vlastní derivace až do řádu $n + 1$ pro některé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak pro všechna x z tohoto okolí platí:*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0) + R_n(x), \tag{7.4}$$
$$\text{kde} \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

přičemž ξ je vhodné číslo ležící mezi x_0 a x. Chyba $R_n(x)$ se nazývá zbytek a vzorec (7.4) se nazývá Taylorův vzorec.

Důkaz viz dodatek, věta D.54. Uvedené vyjádření zbytku je v tzv. *Lagrangeově tvaru*. Existují i jiné (složitější) tvary, které jsou pro odhady velikosti určitých typů zbytků vhodnější.

Poznámka 7.9.

i) Číslo ξ ležící mezi x_0 a x se někdy vyjadřuje ve tvaru

$$\xi = x_0 + \Theta(x - x_0),$$

kde $0 < \Theta < 1$.

ii) Volíme-li $x_0 = 0$, obdržíme tzv. *Maclaurinův vzorec*:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$
$$\text{kde} \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\Theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad \Theta \in (0,1).$$

Polynom T_n pak nazýváme *Maclaurinův polynom*.

iii) Chybu R_n nemůžeme (obecně vzato) přesně vypočítat, neboť neznáme ξ, ale často ji lze rozumně odhadnout. Je-li ovšem f polynom a st $f \leq n$, pak $R_n(x) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, neboť $f^{(n+1)}$ je nulový polynom.

iv) Z Taylorovy věty plyne (je-li $f^{(n+1)}$ ohraničená v nějakém okolí $\mathscr{O}(x_0)$)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(x - x_0)^n} = 0. \tag{7.5}$$

v) Speciální případy Taylorova rozvoje:

- pro $n = 0$ dostáváme $f(x) = f(x_0) + f'(c)(x - x_0)$, což je Lagrangeova věta o střední hodnotě;
- pro $n = 1$ dostáváme vyjádření přírůstku funkce pomocí diferenciálu s chybou $R_1(x) = \frac{f''(c)}{2}(x - x_0)^2$. Označíme-li $h = x - x_0$ a $\tau(h) = \frac{f''(c)}{2}h^2$, dostáváme definici diferencovatelnosti funkce f.

Příklad 7.10. Napište Taylorův polynom stupně n pro následující funkce v bodě x_0:

a) $f(x) = x^2 + 1$ pro $x_0 = 1$ a $n \in \mathbb{N}$; b) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ pro $x_0 = 0$ a $n \in N$;

c) $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x^2} & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \end{cases}$ pro $x_0 = 0$ a $n = 2$.

Řešení.

a) Vypočteme derivace funkce f

$$f'(x) = 2x, \quad f''(x) = 2, \quad f'''(x) = 0, \quad \dots, \quad f^{(k)} = 0,\ k \geq 3.$$

Dosazením za $x = 1$ určíme hodnoty derivací a ze (7.4) dostáváme pro $n \geq 2$ Taylorův polynom $T_n(x) = 2 + 2(x-1) + (x-1)^2 + 0$. Zřejmě $f(x) = T_n(x)$ a $R_n(x) = 0$ pro $n \geq 2$ — viz poznámka 7.9 iii).

b) Pro derivace funkce f platí v každém bodě $x \neq -1$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1}{1+x}\right)' = \frac{-1}{(1+x)^2}, \\ f''(x) &= \frac{-1\cdot(-2)}{(1+x)^3}, \\ f'''(x) &= \frac{-1\cdot(-2)\cdot(-3)}{(1+x)^4}, \\ &\ \vdots \\ f^{(k)}(x) &= \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}, \qquad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Odtud vidíme, že $f^{(k)}(0) = (-1)^k k!$ pro libovolné $k \in \mathbb{N}$. Taylorův polynom stupně n funkce f v bodě $x_0 = 0$ je pro obecné $n \in \mathbb{N}$ tvaru

$$\begin{aligned} T_n(x) = 1 + \frac{-1}{1}x + \frac{(-1)^2 2!}{2!}x^2 + \dots + \frac{(-1)^n n!}{n!}x^n &= \\ = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n&. \end{aligned}$$

c) Ověřte jako cvičení, že funkce f je v bodě $x = 0$ spojitá. Spočítejme první derivaci v bodě 0:

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{-1/x^2} - 0}{x} = \lim_{y\to+\infty} e^{-y^2} y = \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{e^{y^2}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{2y e^{y^2}} = 0.$$

Obdobně dostaneme $f'_-(0) = 0$, dohromady $f'(0) = 0$. Druhou derivaci v bodě 0 musíme počítat stejně jako první derivaci přímo z definice. Dostáváme

$$\begin{aligned} f''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\left(e^{-1/x^2}\right)' - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2}\cdot 2}{x^4} &= \\ = \lim_{y\to+\infty} 2e^{-y} y^2 = \lim_{y\to+\infty} \frac{4y}{e^y} = \lim_{y\to+\infty} 4e^{-y} = 0&, \end{aligned}$$

přičemž jsme ve výpočtu použili větu o limitě složené funkce ($y = \frac{1}{x^2}$) a dvakrát l'Hospitalovo pravidlo.
Proto Taylorův polynom druhého stupně funkce f je

$$T_2(x) = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 = 0,$$

tj. tento polynom je nulový.
Není těžké indukcí ukázat, že daná funkce má nulový Taylorův polynom stupně n pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Snadno totiž vidíme, že

$$f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2} Q\Big(\frac{1}{x}\Big), \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

kde $Q(y)$ je polynom v proměnné y. Odtud $f^{(n+1)}(0) = 0$, neboť

$$f_+^{(n+1)}(0) = \lim_{x \to 0+} \frac{\mathrm{e}^{-1/x^2} Q\big(\frac{1}{x}\big) - 0}{x} = \lim_{y \to +\infty} \mathrm{e}^{-y^2} Q(y) y = \lim_{y \to +\infty} \frac{Q(y) y}{\mathrm{e}^{y^2}} = 0,$$

kde jsme ve výpočtu použili větu o limitě složené funkce (substituce $y = \frac{1}{x}$) a poslední rovnost zdůvodníme tím, že funkce e^x „utíká do nekonečna rychleji než libovolný polynom“.
Podobně vyjde $f_-^{(n+1)}(0) = 0$. ▲

Maclaurinovy vzorce elementárních funkcí

V následujícím přehledu jsou uvedeny Maclaurinovy vzorce nejdůležitějších elementárních funkcí. V níže uvedených vzorcích n značí libovolné přirozené číslo a ξ značí vhodné číslo mezi x a nulou.

1. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x), \qquad R_n(x) = \frac{\mathrm{e}^\xi}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Zdůvodnění: $(\mathrm{e}^x)^{(k)} = \mathrm{e}^x$ (důkaz provedeme indukcí), odkud $(\mathrm{e}^x)^{(k)}_{x=0} = 1$, $k \in \mathbb{N}$.

2. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}(x),$$
$$R_{2n}(x) = (-1)^n \cos \xi \, \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Zdůvodnění: $(\sin x)' = \cos x$, $(\sin x)'' = -\sin x$, $(\sin x)^{(3)} = -\cos x$, $(\sin x)^{(4)} = \sin x$, odkud plyne pro $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$(\sin x)^{(2k+1)}_{x=0} = (-1)^k, \qquad (\sin x)^{(2k)}_{x=0} = 0.$$

3. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x),$$
$$R_{2n+1}(x) = (-1)^n \cos \xi \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\,.$$

4. Pro každé $x \in (-1, +\infty)$ platí

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + R_n(x),$$
$$R_n(x) = (-1)^{n+2} \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\xi)^{n+1}}\,.$$

Zdůvodnění: $\big(\ln(x+1)\big)' = \frac{1}{x+1}$, $\big(\ln(x+1)\big)'' = -\frac{1}{(x+1)^2}$, obecně $\big(\ln(x+1)\big)^{(k)} = (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{(x+1)^k}$, tedy $\big(\ln(x+1)\big)^{(k)}_{x=0} = (-1)^{k+1}(k-1)!\,.$

5. Pro libovolná $a \in \mathbb{R}$ a $x \in (-1, +\infty)$ (v případě $a \in \mathbb{N}$ i pro $x \leq -1$) platí

$$(1+x)^a = 1 + \binom{a}{1} x + \binom{a}{2} x^2 + \cdots + \binom{a}{n} x^n + R_n(x),$$
$$R_n(x) = \binom{a}{n+1} x^{n+1} (1+\xi)^{a-n-1},$$

kde pro $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ definujeme tzv. *zobecněný binomický koeficient*

$$\binom{a}{k} = \frac{a(a-1)\cdots(a-k+1)}{k!}\,.$$

Maclaurinův vzorec mocninné funkce se někdy nazývá *binomický vzorec*.
Zdůvodnění: Pro derivace platí

$$\begin{aligned} f'(x) &= a(x+1)^{a-1}, \\ f''(x) &= a(a-1)(x+1)^{a-2}, \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= a(a-1)\cdots(a-(n-1))(x+1)^{a-n}, \end{aligned}$$

a proto

$$(1+x)^a = 1 + \frac{ax}{1!} + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!} x^n + R_n(x).$$

Poznámka 7.11. V případě $a \in \mathbb{N}$, $a \geq k$ je definice zobecněného binomického koeficientu ve shodě s definicí binomického čísla známou z elementární matematiky.

Speciálními případy binomického rozvoje jsou pro $a \in \mathbb{N}$, $n \geq a$, binomická věta a pro $a = -1$ geometrická řada. Ověřte!

Poznámka 7.12. Rozvoj mocninné funkce používáme především k počítání odmocnin. Je-li $a - n - 1 < 0$, pak pro každé $x > 0$ je odhad chyby

$$|R_n(x)| \leq \left| \binom{a}{n+1} \right| |x|^{n+1}.$$

Poznámka 7.13. Z Maclaurinových rozvojů exponenciály, sinu a kosinu je vidět (aspoň formálně, exponenciální funkce nebyla pro komplexní hodnoty definována a hodnota zbytku v komplexním čísle rovněž v této podobě nemá smysl), proč platí tzv. *Eulerův vztah* $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i} \sin x$:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} &= 1 + \frac{\mathrm{i}x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{\mathrm{i}x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + R_n(\mathrm{i}x) = \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) + \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right)\mathrm{i} + R_n(\mathrm{i}x). \end{aligned}$$

S přesným důkazem se seznámíte v teorii mocninných řad.

Příklad 7.14. Napište Taylorův polynom 3. stupně v bodě $x_0 = 0$ funkce $f(x) = \operatorname{tg} x$.

Řešení. Ukážeme dva možné postupy řešení.

a) Nejprve budeme postupovat přímo podle definice a počítat hodnoty derivací funkce v bodě 0 až do řádu tři. Platí

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, & f'(0) &= 1, \\ f''(x) &= \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)' = \frac{(-2)\cdot(-\sin x)}{\cos^3 x} = 2 \operatorname{tg} x \frac{1}{\cos^2 x}, & f''(0) &= 0, \\ f'''(x) &= 2\left(\operatorname{tg} x \frac{1}{\cos^2 x}\right)' = 2\left(\frac{1}{\cos^4 x} + 2\operatorname{tg}^2 x \frac{1}{\cos^2 x}\right), & f'''(0) &= 2. \end{aligned}$$

Taylorův polynom 3. stupně funkce $\operatorname{tg} x$ v bodě $x_0 = 0$ je tudíž

$$T_3(x) = 0 + 1 \cdot x + \frac{0}{2} \cdot x^2 + \frac{2}{3!} \cdot x^3 = x + \frac{1}{3} x^3.$$

b) Podívejme se na úlohu „chytřeji". Víme, že platí $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Označme T_{3s} a T_{3c} Taylorův polynom 3. stupně funkcí po řadě $\sin x$, $\cos x$ v bodě $x_0 = 0$. Platí

$$T_{3s} = x - \frac{x^3}{3!} = x - \frac{x^3}{6}, \qquad T_{3c} = 1 - \frac{x^2}{2!} = 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Počítejme proto podíl těchto polynomů:

$$\begin{array}{l} \left(x - \dfrac{x^3}{6}\right) : \left(1 - \dfrac{x^2}{2}\right) = x + \dfrac{x^3}{3}\,. \\ -x + \dfrac{x^3}{2} \\ \quad\;\; \dfrac{x^3}{3} \end{array}$$

Dospěli jsme ke stejnému výsledku $T_3(x) = x + \frac{x^3}{3}$, ale podstatně jednodušší cestou než v prvním případě. Tento postup lze korektně zdůvodnit — viz [17, str. 176]. (Zejména při počítání polynomů vyšších stupňů je tento způsob jednoznačně výhodnější.) ▲

7.3. Aplikace Taylorova vzorce

Pro další úvahy zaveďme následující symboly, které se často v matematické analýze používají.

Definice 7.15. Nechť f, g jsou funkce, $x_0 \in \mathbb{R}$ a nechť existuje okolí $\mathscr{O}(x_0)$ takové, že pro všechna $x \in \mathscr{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $g(x) \neq 0$. Definujeme

1. $f = o(g)$, $x \to x_0$, jestliže $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0\,.$
2. $f \sim g$, $x \to x_0$, jestliže $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$; říkáme, že f je *silně ekvivalentní* s g pro $x \to x_0$.

Poznámka 7.16.

1. Zápis $f = o(g)$, $x \to x_0$ (čteme f je malé o g pro $x \to x_0$) říká, že „funkce f je nekonečně malá vzhledem k funkci g pro $x \to x_0$“.
2. Zápis $f \sim g$, $x \to x_0$ říká, že se funkce f, g v okolí bodu x_0 „chovají přibližně stejně“.
3. Má-li funkce f v okolí $\mathscr{O}(x_0)$ bodu x_0 ohraničenou derivaci řádu $n+1$, vyplývá ze vztahu (7.5), že platí

$$f(x) = T_n(x) + o\big((x - x_0)^n\big) \qquad \text{pro } x \in \mathscr{O}(x_0). \tag{7.6}$$

Lze ukázat, že dokonce stačí pouhá existence vlastní derivace $f^{(n)}(x_0)$, tj. existence Taylorova mnohočlenu $T_n(x)$ — viz [17, str. 175]. Tedy pro zbytek v Taylorově vzorci dostáváme, že $R_n(x) = o\big((x - x_0)^n\big)$. Tomuto tvaru zbytku se říká *Peanův*.

Příklad 7.17. Ukažte, že platí $2(1-\cos x) \sim x^2$, $x \to 0$.

Řešení. Podle definice je

$$\lim_{x\to 0} \frac{2(1-\cos x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot \sin^2 x}{x^2(1+\cos x)} = 1.$$

▲

Příklad 7.18. Vypočtěte limity

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \mathrm{e}^{-x^2/2}}{x^4}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$.

Řešení. a) Nejprve si rozepíšeme Taylorovy vzorce funkcí $\cos x$ a $\mathrm{e}^{-x^2/2}$. Podle (7.6) platí:

$$\begin{aligned}
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4),\\
\mathrm{e}^y &= 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2),\\
\mathrm{e}^{-x^2/2} &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4).
\end{aligned}$$

Dosazením do limity dostáváme

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \mathrm{e}^{-x^2/2}}{x^4} &= \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4)\right)}{x^4} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{2}{24}x^4 + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{12}\,.
\end{aligned}$$

b) Opět si nejprve rozepíšeme Maclaurinovy vzorce funkcí v limitě:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3),\\
\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3),
\end{aligned}$$

odkud

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - x - x^2}{x^3} = \\
&\qquad = \lim_{x\to 0} \frac{x + x^2 + x^3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) + o(x^3) - x - x^2}{x^3} = \frac{1}{3}\,.
\end{aligned}$$

▲

Příklad 7.19. V relativistické mechanice je pohybová energie E_k částice definována vztahem

$$E_k = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - 1 \right),$$

kde m_0 je klidová hmotnost částice, c rychlost světla a u rychlost částice. Ověřte, že je v tomto výrazu pro pohyby malou rychlostí $u \ll c$ obsažen klasický vzorec

$$E_k = \frac{1}{2} m_0 u^2.$$

Řešení. Označme $t = \frac{u}{c}$ a $f(t) = (1 - t^2)^{-\frac{1}{2}}$. Vzorec pro E_k při pohybu malou rychlostí u odvodíme pomocí Taylorova vzorce funkce f v bodě $t = 0$. Z binomického rozvoje plyne

$$f(t) = 1 + \frac{1}{2!} t^2 + R(t), \qquad \text{kde } R(t) = o(t^2).$$

Odtud

$$\left(1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2!} \frac{1}{c^2} u^2 + R\left(\frac{u}{c}\right).$$

V dalších členech Taylorova mnohočlenu bude podíl rychlostí $\frac{u}{c}$ vystupovat ve vyšších mocninách, a protože je $u \ll c$, lze vyšší mocniny $\left(\frac{u}{c}\right)^n$ zanedbat. Celkově pro $u \ll c$ platí

$$E_k \approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} - 1\right) = \frac{1}{2} m_0 u^2,$$

což jsme měli ověřit. ▲

Cvičení

1. Pomocí vzorce (7.3) vypočtěte přibližně

   a) $\cos 61°$, b) $\mathrm{e}^{1,2}$, c) $\sin 32°$.

2. Pomocí diferenciálu (vzorce (7.3)) vypočtěte přibližně

   a) $\operatorname{arccotg} 1{,}01$, b) $\sqrt{28}$, c) $\sqrt{85}$.

3. Dokažte, že pro $x \to 0$ platí

   a) $\sin x \approx x$, b) $\operatorname{tg} x \approx x$, c) $\operatorname{arctg} x \approx x$.

4. Odvoďte Maclaurinův vzorec funkce (s polynomem obecného stupně n)

   a) $y = \ln(x + 1)$, b) $y = \ln(1 - x)$.

5. Pomocí předcházejícího příkladu určete Maclaurinův polynom $2n$-tého stupně funkce $\ln \frac{1+x}{1-x}$.

6. Pomocí předcházejícího příkladu vypočtěte $\ln 2$ a $\ln 3$.

7. Určete Taylorův mnohočlen n-tého stupně se středem v bodě x_0 funkce f, kde

   a) $n = 3,\ x_0 = 1,\ f(x) = \frac{1}{x}$, b) $n = 3,\ x_0 = 1,\ f(x) = \ln x$,
   c) $n = 2,\ x_0 = 0,\ f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, d) $n = 2,\ x_0 = \frac{\pi}{2}$, $f(x) = \cos \frac{x}{2}$.

8. Určete Taylorův vzorec funkce f v bodě x_0, kde

   a) $f(x) = x^3 - 2x + 5,\ x_0 = 1$, b) $f(x) = x^4 - 3x^2 - 10x + 11,\ x_0 = 2$.

9. Napište Maclaurinův polynom 3. stupně funkce f, kde

   a) $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$, b) $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$.

10. Vypočtěte limitu
$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\mathrm{e}^x - 1} - \frac{1}{\sin x} \right).$$

11. Ověřte, že platí

    a) $\ln x = o(x^n),\ x \to \infty$ pro $n \in \mathbb{N}$, b) $x = o(\mathrm{e}^x),\ x \to \infty$,
    c) $x \operatorname{arctg} x \sim \frac{\pi}{2} x ,\ x \to \infty$, d) $\sin x \sim x,\ x \to 0$.

12. Rozhodněte, zda úhly určené podle tabulky hodnot funkce tg jsou určené přesněji než úhly určené tabulkou hodnot funkce sin. Předpokládejte, že hodnoty obou funkcí jsou určeny na stejný počet desetinných míst.

*

„Matematici jsou jako Francouzi. Cokoliv jim řeknete, přeloží si do vlastního jazyka, čímž je z toho něco úplně jiného.“
(Johann Wolfgang von Goethe)

Dodatek

D.1. Další vlastnosti reálných čísel

V kapitole 1 jsme definovali reálná čísla a uvedli jejich základní vlastnosti. Ukazuje se, že pro vybudování základů diferenciálního počtu má klíčovou roli axiom (R13) o existenci suprema každé neprázdné shora ohraničené množiny. Již tehdy jsme konstatovali, že tento axiom je očividně ekvivalentní požadavku existence infima každé neprázdné zdola ohraničené podmnožiny $\mathbb{R}$.

Z definice 1.8 vyplývá, že množina reálných čísel je uspořádané pole, jež splňuje axiom (R13). V dalším výkladu budeme libovolné *uspořádané pole*, tj. strukturu splňující axiomy (R1)–(R12) definice 1.8, označovat symbolem $\mathbb{P}$.

V tomto oddílu uvedeme šest dalších vlastností, které jsou v $\mathbb{P}$ ekvivalentní s axiomem (R13). V souvislosti s tím zformulujeme a dokážeme několik důležitých a klasických výsledků o množině reálných čísel. Řada z nich má významná zobecnění v teorii metrických prostorů, topologii a pod. — viz např. [6].

Pro dvě podmnožiny X, Y nějaké uspořádané množiny $(A, \leq)$ se používá označení $X \leq Y$, jestliže pro každé $x \in X$ a $y \in Y$ platí $x \leq y$. Je-li některá množina jednoprvková, např. $X = \{x\}$, píšeme stručně $x \leq Y$ místo $\{x\} \leq Y$. Dále budeme značit $U(X)$ resp. $L(X)$ množinu všech horních resp. dolních závor množiny X v A.

Definice D.1. Řekneme, že uspořádané pole $\mathbb{P}$ splňuje *axiom spojitosti* nebo také, že je *spojité*, jestliže k libovolným dvěma neprázdným množinám $X, Y \subseteq \mathbb{P}$, $X \leq Y$, existuje prvek $a \in \mathbb{P}$ takový, že $X \leq a \leq Y$.

Lemma D.2. *Uspořádané pole $\mathbb{P}$ splňuje axiom o existenci suprema právě tehdy, když splňuje axiom spojitosti.*

Důkaz. „$\Rightarrow$“
Nechť $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{P}$, $\emptyset \neq Y \subseteq \mathbb{P}$ a $X \leq Y$. Pak je X shora ohraničená a $Y \subseteq U(X)$. Tedy existuje $a = \sup X = \min U(X)$. Platí $X \leq a \leq U(X)$, a tudíž i $X \leq a \leq Y$.

„$\Leftarrow$“
Nechť $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{P}$ a X je shora ohraničená. Pak $U(X)$ je neprázdná a $X \leq U(X)$. Podle předpokladu existuje $a \in \mathbb{P}$ tak, že $X \leq a \leq U(X)$. Číslo a je tedy horní závorou X, takže $a \in U(X)$. Současně platí $a \leq U(X)$, tedy $a = \min U(X)$, tj. $a = \sup X$. ∎

Další ekvivalent axiomu o existenci suprema souvisí s následující důležitou větou. K její formulaci potřebujeme pojem *pokrytí*. Řekneme, že systém množin $\{M_i; i \in I\}$, kde I je nějaká indexová množina, pokrývá množinu M, jestliže platí $\bigcup_{i\in I} M_i \supseteq M$.

Věta D.3 (Borelova věta o pokrytí). *Nechť $\{J_i; i \in I\}$ je systém otevřených intervalů, který pokrývá ohraničený uzavřený interval $[a, b]$. Pak lze vybrat konečný podsystém systému $\{J_i; i \in I\}$, který rovněž pokrývá interval $[a, b]$.*

Důkaz. Nechť $A = \{x \in [a, b] :$ interval $[a, x]$ lze pokrýt konečným počtem intervalů $J_i\}$. Množina A je neprázdná, protože $a \in A$, a shora ohraničená, takže existuje $c = \sup A$. Ukážeme, že $c \in A$.

Protože $c \in [a, b]$, lze najít $i_0 \in I$ tak, že $c \in J_{i_0} = (\alpha, \beta)$. Tedy $\alpha < c < \beta$. Podle definice suprema existuje $x \in A$, $\alpha < x \leq c$ takové, že interval $[a, x]$ je možné pokrýt konečným systémem intervalů $\{J_{i_1}, \dots, J_{i_n}\}$. Pak systém $\{J_{i_1}, \dots, J_{i_n}, J_{i_0}\}$ pokrývá $[a, c]$.

Dále ukážeme, že $c = b$. Připusťme, že $c < b$. Zopakujeme postup z předchozího odstavce a najdeme konečný systém intervalů $\{J_{i_1}, \dots, J_{i_n}, J_{i_0}\}$, který pokrývá všechny intervaly $[a, y]$, kde $y \in (c, \beta) \cap [a, b]$. Platí tedy $y \in A$ a $y > c$, což je spor s definicí c. □

Uvedená vlastnost je základem definice tzv. kompaktních topologických prostorů. Proto se ohraničeným uzavřeným intervalům často říká *kompaktní intervaly*. Všimněte si, že v předpokladech řady důležitých vět (Weierstrassova, Bolzanova) figurovaly právě takové intervaly. Borelova věta je velmi užitečným nástrojem, jak ukazuje následující příklad a také důkaz věty D.50.

Příklad D.4. Dokažte první část Weierstrassovy věty 4.33 (ohraničenost) pomocí Borelovy věty o pokrytí.

Řešení. Ze spojitosti funkce f na intervalu $[a, b]$ vyplývá, že pro každé $x \in [a, b]$ existuje okolí $\mathscr{O}(x)$ takové, že f je na tomto okolí ohraničená, tj. existuje číslo $K_x > 0$ tak, že $|f(y)| \leq K_x$ pro $y \in \mathscr{O}(x) \cap [a, b]$. Systém $\{\mathscr{O}(x); x \in [a, b]\}$ tvoří zřejmě otevřené pokrytí kompaktního intervalu $[a, b]$. Tedy podle Borelovy věty lze najít konečné podpokrytí $\{\mathscr{O}(x_1), \dots, \mathscr{O}(x_n)\}$ takové, že $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathscr{O}(x_i) \supseteq [a, b]$. Označíme-li nyní $K = \max\{K_{x_1}, \dots, K_{x_n}\}$, je $|f(x)| \leq K$ pro každé $x \in [a, b]$, což jsme měli dokázat. ▲

Lemma D.5. *Uspořádané pole $\mathbb{P}$ splňuje axiom o existenci suprema právě tehdy, když splňuje Borelovu větu o pokrytí.*

Důkaz. Nutnost vyplývá z věty D.3. Dokážeme postačitelnost. Ukážeme, že platí axiom spojitosti, o němž již víme, že je ekvivalentní s axiomem o existenci suprema.

Nechť $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{P}$, $\emptyset \neq Y \subseteq \mathbb{P}$ a $X \leq Y$. Připusťme, že neexistuje $c \in \mathbb{P}$ takové, že $X \leq c \leq Y$. Pak neexistuje ani $\max X$, ani $\min Y$. Kterýkoliv tento prvek by totiž měl vlastnost čísla c. Zvolme libovolně $a \in X$ a $b \in Y$, tj. $a < b$. Pro každé $x \in [a, b]$ existuje buď $c_x \in X$, $c_x > x$, nebo $d_x \in Y$, $d_x < x$. Jinak by totiž platilo $X \leq x \leq Y$. Přitom tyto možnosti se vylučují, protože by platilo $d_x < x < c_x$, což je spor s tím, že $X \leq Y$.

Nechť $A = \{x \in [a, b] :$ existuje $c_x \in X, c_x > x\}$ a $B = \{x \in [a, b] :$ existuje $d_x \in Y$, $d_x < x\}$. Protože X nemá maximum, je $a \in A$ a obdobně, protože Y nemá minimum, je $b \in B$. Platí tedy $A \cup B = [a, b]$, $A \cap B = \emptyset$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$.

Systém intervalů $\{(a-1, c_x) : x \in A\} \cup \{(d_x, b+1) : x \in B\}$ je otevřeným pokrytím intervalu $[a, b]$. Podle předpokladu existuje jeho konečný podsystém pokrývající rovněž interval $[a, b]$. Mezi těmito intervaly je pouze konečný počet těch, které mají tvar $(a-1, c_x)$, $x \in A$. Přitom aspoň jeden interval tohoto typu mezi nimi je, a nemůže být v intervalu tvaru $(d_x, b+1)$, $x \in B$. Označme c největší z těchto čísel c_x. Je $c \in X$, a proto je $c < b$, takže $c \in [a, b]$. Bod c nemůže být v žádném intervalu tvaru $(d_x, b+1)$, $x \in B$. Jinak by platilo $d_x < c$, což je nemožné, protože $X \leq Y$. Tedy bod c neleží v žádném intervalu sestrojeného podpokrytí, což je spor. □

Další ekvivalent axiomu o existenci suprema souvisí s monotonními posloupnostmi. V souvislosti s důkazem následujícího tvrzení a rovněž s formulacemi dalších výsledků připomeňme, že archimedovské pole bylo zavedeno v komentáři za lemmatem 1.11.

Definice D.6. Řekneme, že uspořádané pole $\mathbb{P}$ je *monotonní*, jestliže každá monotonní ohraničená posloupnost prvků z $\mathbb{P}$ má v $\mathbb{P}$ limitu.

Lemma D.7. *Uspořádané pole $\mathbb{P}$ splňuje axiom o existenci suprema právě tehdy, když je monotonní.*

Důkaz. Nutnost plyne z věty 2.20. Dokážeme postačitelnost. Opět ověříme platnost axiomu spojitosti.

Nejprve ukážeme, že pole $\mathbb{P}$ je archimedovské. Připusťme, že množina přirozených čísel je ohraničená. Protože posloupnost $\{n\}$ je rostoucí, existuje podle předpokladu $\lim\limits_{n\to\infty} n = a \in \mathbb{P}$. K číslu $\varepsilon = 1$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ je $a - 1 < n < a + 1$. Speciálně pro n_0 platí $n_0 > a - 1$. Současně pro $n_0 + 2 > n_0$ platí $a + 1 > n_0 + 2$, tj. $n_0 < a - 1$, a to je spor. Že je $\mathbb{P}$ archimedovské, se nyní ukáže stejně jako v důkazu lemmatu 1.11.

Nechť $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{P}$, $\emptyset \neq Y \subseteq \mathbb{P}$ a $X \leq Y$. Pokud existuje $\max X$ nebo $\min Y$, má tento prvek c požadované vlastnosti, neboť $X \leq c \leq Y$. Předpokládejme tedy, že neexistuje ani $\max X$ ani $\min Y$. Zkonstruujeme dvě posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$. Vybereme libovolné $a_0 \in X$ a $b_0 \in Y$. Dále postupujeme indukcí. Máme-li již a_k a b_k, položíme $c_k = (a_k + b_k)/2$. Je-li c_k horní závorou X, zvolíme $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = c_k$; není-li c_k horní závorou X, zvolíme $a_{k+1} = c_k$, $b_{k+1} = b_k$. Posloupnosti mají tyto vlastnosti:

(1) $\{a_n\}$ je neklesající a $\{b_n\}$ je nerostoucí,

(2) $a_n < b_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

(3) pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_n \notin U(X)$, $b_n \in U(X)$,

(4) $b_n - a_n = (b_0 - a_0)/2^n$.

Podle (1) a (2) jsou posloupnosti ohraničené, protože $a_0 \leq a_n < b_n \leq b_0$. Vzhledem k předpokladu tedy existují $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{P}$ a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{P}$. Protože $\mathbb{P}$ je archimedovské a $2^n > n$ pro $n \in \mathbb{N}$, je $\{2^n\}$ rostoucí neohraničená posloupnost, takže $\lim\limits_{n\to\infty} 1/2^n = 0$ a rovněž $\lim\limits_{n\to\infty} (b_0 - a_0)/2^n = 0$. Odtud dostáváme $b - a = \lim\limits_{n\to\infty} b_n - \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (b_0 - a_0)/2^n = 0$. Platí tedy $a = b$.

Podle (3) je $b_n \geq x$ pro libovolné $x \in X$ a $n \in \mathbb{N}$, takže podle věty 2.12 (k jejímu důkazu není potřeba platnost axiomu o existenci suprema) platí $b \geq x$, tedy $b = a \in U(X)$. Dále z (3) plyne, že $a_n < y$ pro libovolné $y \in Y$ a $n \in \mathbb{N}$. Je totiž $a_n < U(X)$ a $Y \subseteq U(X)$. Podle věty 2.12 platí $a \leq y$, tedy $a \in L(Y)$. To ovšem znamená, že $X \leq a \leq Y$, čímž je axiom spojitosti dokázán. □

Připomeňme nyní Bolzanovu-Weierstrassovu větu 2.39 říkající, že z každé ohraničené posloupnosti reálných čísel lze vybrat konvergentní podposloupnost.

Lemma D.8. *Uspořádané pole $\mathbb{P}$ splňuje axiom o existenci suprema právě tehdy, když v něm platí Bolzanova-Weierstrassova věta.*

Důkaz. Nutnost plyne ihned z věty 2.39. Dokážeme postačitelnost. Nechť $\{a_n\}$ je ohraničená monotonní posloupnost v $\mathbb{P}$. Podle předpokladu z ní lze vybrat konvergentní podposloupnost $\{a_{n_k}\}$, takže $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. Protože posloupnost $\{a_n\}$ je monotonní, platí rovněž $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. To však znamená, že $\mathbb{P}$ je monotonní. Tvrzení nyní plyne z lemmatu D.7. □

Předposlední ekvivalent axiomu o existenci suprema souvisí s cauchyovskými posloupnostmi.

Definice D.9. Uspořádané pole $\mathbb{P}$ se nazývá *úplné*, je-li v něm každá cauchyovská posloupnost konvergentní.

Lemma D.10. *Uspořádané pole $\mathbb{P}$ splňuje axiom o existenci suprema právě tehdy, když je archimedovské a úplné.*

Důkaz. Nutnost plyne z lemmatu 1.11 a věty 2.43. Ukážeme postačitelnost. Nechť $\{a_n\}$ je neklesající shora omezená posloupnost v $\mathbb{P}$. Tedy existuje $a \in \mathbb{P}$ tak, že $a_n \leq a$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Ukážeme, že posloupnost $\{a_n\}$ je cauchyovská. Připusťme, že platí opak. To znamená, že existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ lze najít $k \in \mathbb{N}$, $k > n$ tak, že platí $a_k - a_n \geq \varepsilon$. Postupně najdeme $k_1 \in \mathbb{N}$ tak, že $a_{k_1} - a_1 \geq \varepsilon$, $k_2 \in \mathbb{N}$, $k_2 > k_1$ tak, že $a_{k_2} - a_{k_1} \geq \varepsilon$, a obecně indukcí pro každé $n \in \mathbb{N}$ najdeme $k_n \in \mathbb{N}$, $k_n > k_{n-1}$ tak, že $a_{k_n} - a_{k_{n-1}} \geq \varepsilon$.

Nyní platí $a_{k_n} - a_1 = (a_{k_n} - a_{k_{n-1}}) + (a_{k_{n-1}} - a_{k_{n-2}}) + \cdots + (a_{k_2} - a_1) \geq \varepsilon + \varepsilon + {} + \cdots + \varepsilon = n\varepsilon$. Tedy $n\varepsilon \leq a_{k_n} - a_1 \leq a - a_1$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. To je spor s tím, že $\mathbb{P}$ je archimedovské. Posloupnost $\{a_n\}$ je tudíž cauchyovská a podle předpokladu je konvergentní. Analogicky se ukáže, že také každá nerostoucí zdola ohraničená posloupnost je konvergentní v $\mathbb{P}$. To znamená, že pole $\mathbb{P}$ je monotonní. Tvrzení nyní plyne z věty D.7. □

O posloupnosti intervalů $\{J_n\}$ v $\mathbb{P}$ říkáme, že tvoří posloupnost vložených intervalů, jestliže platí $J_n \supseteq J_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Definice D.11. O uspořádaném poli $\mathbb{P}$ říkáme, že splňuje *princip vložených intervalů*, jestliže pro každou posloupnost vložených ohraničených uzavřených intervalů $\{J_n\}$ platí $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} J_n \neq \emptyset$.

Věta D.12 (Cantorův princip vložených intervalů). *Je-li* $\{[a_n, b_n]\}$ *posloupnost vložených uzavřených intervalů v* $\mathbb{R}$*, pak* $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$*. Je-li navíc* $\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$*, je tento průnik jednobodová množina.*

Důkaz. Protože $[a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}]$, je posloupnost $\{a_n\}$ neklesající a posloupnost $\{b_n\}$ nerostoucí. Dále $a_1 \leq a_n < b_n \leq b_1$, jsou tedy obě ohraničené. Podle věty 2.20 jsou proto obě konvergentní. Označme $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Podle věty 2.12 je $a \leq b$, takže $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = [a, b]$ (pro $a = b$ je $[a, a] = \{a\}$). Tím je dokázána neprázdnost průniku.

Je-li navíc $\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$, dostáváme z nerovností $a_n \leq a \leq b \leq b_n$, že platí $0 \leq b - a \leq b_n - a_n \to 0$ pro $n \to \infty$, takže $a = b$ a máme $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{a\}$. □

Lemma D.13. *Uspořádané pole* $\mathbb{P}$ *splňuje axiom o existenci suprema právě tehdy, když je archimedovské a platí v něm princip vložených intervalů.*

Důkaz. Nutnost plyne z lemmatu 1.11 a z věty D.12. Dokážeme postačitelnost. Ověříme platnost axiomu spojitosti.

Nechť $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{P}$, $\emptyset \neq Y \subseteq \mathbb{P}$ a $X \leq Y$. Pokud existuje $\max X$ nebo $\min Y$, má tento prvek c požadované vlastnosti, neboť $X \leq c \leq Y$. Předpokládejme tedy, že neexistuje ani $\max X$ ani $\min Y$. Obdobně jako v lemmatu D.7 zkonstruujeme dvě posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ s vlastnostmi

(1) $\{a_n\}$ je neklesající a $\{b_n\}$ je nerostoucí,

(2) $a_n < b_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

(3) pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_n \notin U(X)$, $b_n \in U(X)$,

(4) $b_n - a_n = (b_0 - a_0)/2^n$.

Označme $J_n = [a_n, b_n]$. Pak $\{J_n\}$ je posloupnost vložených intervalů v $\mathbb{P}$ a podle předpokladu je $\bigcap_{n=1}^{\infty} J_n \neq \emptyset$. Protože $\mathbb{P}$ je archimedovské, platí $\lim_{n\to\infty} 1/2^n = 0$ a ze (4) plyne, že také $\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$. Tedy $\bigcap_{n=1}^{\infty} J_n = \{a\}$, tj. průnik je jednobodová množina. Přitom $a_n \leq a \leq b_n$ pro $n \in \mathbb{N}$.

Ukážeme, že $a \in U(X) \cap L(Y)$. Připusťme, že $a \notin U(X)$. Pak existuje $x \in X$ takové, že $a < x$. Vzhledem ke (3) platí nerovnost $b_n \geq x$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, takže $b_n - a_n \geq x - a > 0$, což je spor s tím, že $\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$. Tedy $a \in U(X)$. Připusťme nyní, že $a \notin L(Y)$. Pak existuje $y \in Y$ takové, že $y < a$. Ze (3) plyne, že $a_n \leq y$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, takže $b_n - a_n \geq a - y > 0$, což je zase spor. Je tedy $a \in L(Y)$ a celkově $X \leq a \leq Y$. Platí tudíž axiom spojitosti. □

Nyní již můžeme zformulovat hlavní tvrzení tohoto oddílu. Shrnutím předchozích výsledků dostáváme následující větu.

Věta D.14. *Nechť $\mathbb{P}$ je uspořádané pole. Pak jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(1) *V $\mathbb{P}$ platí axiom o existenci suprema.*

(2) *V $\mathbb{P}$ platí axiom o existenci infima.*

(3) *V $\mathbb{P}$ platí axiom spojitosti.*

(4) *V $\mathbb{P}$ platí Borelova věta o pokrytí.*

(5) *$\mathbb{P}$ je monotonní.*

(6) *V $\mathbb{P}$ platí Bolzanova-Weierstrassova věta.*

(7) *$\mathbb{P}$ je archimedovské a úplné.*

(8) *$\mathbb{P}$ je archimedovské a platí v něm princip vložených intervalů.*

D.2. Limita funkce a její zobecnění

V kapitole 2 jsme se setkali s definicí limity posloupnosti, v kapitole 4 potom s definicí limity funkce. Následující věta ukazuje, že mezi těmito pojmy je těsný vztah a že limitu funkce lze definovat pomocí limity posloupnosti (tzv. *Heineho* definice limity).

Věta D.15.

a) *Nechť $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, kde $a, L \in \mathbb{R}^*$, a $\{x_n\}$, $x_n \neq a$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, je libovolná posloupnost taková, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Pak platí $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L$.*

b) *Nechť existuje $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ pro každou posloupnost $\{x_n\}$, $x_n \neq a$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, takovou, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Pak hodnota této limity nezávisí na posloupnosti $\{x_n\}$ a je-li tato hodnota L, platí $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.*

Důkaz.

a) K libovolnému $\mathscr{O}(L)$ existuje $\mathscr{O}(a)$ takové, že pro $x \in \mathscr{O}(a) \setminus \{a\}$ platí $f(x) \in \mathscr{O}(L)$. Dále k $\mathscr{O}(a)$ existuje n_0 tak, že pro $n \geq n_0$ je $x_n \in \mathscr{O}(a)$. Protože $x_n \neq a$, je pro $n \geq n_0$ také $f(x_n) \in \mathscr{O}(L)$.

b) Jsou-li $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ dvě posloupnosti splňující předpoklady, pak je splňuje také posloupnost $\{z_n\} = \{x_1, y_1, x_2, y_2, \dots\}$. Tedy $f(z_n) \to L$. Protože $\{f(x_n)\}$ a $\{f(y_n)\}$ jsou vybrané z $\{f(z_n)\}$, musí obě konvergovat k L.
Nechť neplatí $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$. Pak existuje okolí $\mathscr{O}(L)$ takové, že pro každé $\mathscr{O}(a)$ lze najít $x \in \mathscr{O}(a) \setminus \{a\}$ tak, že $f(x) \notin \mathscr{O}(L)$. Je tudíž možné sestrojit posloupnost $\{x_n\}$, $x_n \neq a$, pro niž $x_n \to a$ a $f(x_n) \notin \mathscr{O}(L)$. To je spor s tím, že pro takovou posloupnost musí platit $f(x_n) \to L$. □

Důsledek D.16 (Heine). *Nechť $a, L \in \mathbb{R}^*$. Pak $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x_n\}$, $x_n \neq a$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, takovou, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, platí $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L$.*

Předchozí důsledek se často používá k důkazu neexistence limity funkce. Pokud najdeme dvě různé posloupnosti $\{x_n\}$, $\{z_n\}$ konvergující k bodu a takové, že $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)$, limita $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ neexistuje.

Pro posloupnosti jsme v kapitole 2 definovali limitu superior a limitu inferior. Nyní tyto pojmy zavedeme i pro funkce.

Označme $\mathscr{P}_\delta(x_0) = \mathscr{O}_\delta(x_0) \smallsetminus \{x_0\}$ tzv. ryzí δ-okolí bodu x_0, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ (pro $x_0 = \pm\infty$ srv. komentář za definicí 1.19).

Nechť pro některé $\delta_0 > 0$ je $\mathscr{P}_{\delta_0}(x_0) \subseteq D(f)$. Pro funkci f shora omezenou na $\mathscr{P}_{\delta_0}(x_0)$ definujme $M_f(\delta) = \sup\{f(x) : x \in \mathscr{P}_\delta(x_0)\}$, $0 < \delta < \delta_0$. Podobně pro funkci zdola omezenou na $\mathscr{P}_{\delta_0}(x_0)$ definujme $m_f(\delta) = \inf\{f(x) : x \in \mathscr{P}_\delta(x_0)\}$. Funkce $M_f(\delta)$ je neklesající pro $\delta \in (0, \delta_0)$, funkce $m_f(\delta)$ je nerostoucí. Odtud vyplývá, že existují $\lim\limits_{\delta \to 0^+} M_f(\delta)$ a $\lim\limits_{\delta \to 0^+} m_f(\delta)$.

Definice D.17. Označme

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) := \lim_{\delta \to 0^+} M_f(\delta) \qquad \text{a} \qquad \liminf_{x \to x_0} f(x) := \lim_{\delta \to 0^+} m_f(\delta).$$

Tyto limity se nazývají *limita superior* a *limita inferior* funkce f v bodě x_0.
Pro funkci, která není shora ohraničená na žádném ryzím okolí, klademe $\limsup\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ a pro funkci, která není zdola ohraničená na žádném ryzím okolí, klademe $\liminf\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Analogicky se definuje jednostranná limita superior a limita inferior. V definici funkcí $M_f(\delta)$ a $m_f(\delta)$ se použijí ryzí jednostranná okolí daného bodu.

Příklad D.18.

a) Najděte $\limsup\limits_{x \to x_0} \chi(x)$ a $\liminf\limits_{x \to x_0} \chi(x)$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$, kde $\chi(x)$ je Dirichletova funkce.

b) Najděte $\limsup\limits_{x \to 0} \sin \dfrac{1}{x}$ a $\liminf\limits_{x \to 0} \sin \dfrac{1}{x}$.

Řešení.

a) Zřejmě pro libovolné $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je $M_\chi(\delta) = 1$ a $m_\chi(\delta) = 0$. Tedy $\limsup\limits_{x \to x_0} \chi(x) = 1$, $\liminf\limits_{x \to x_0} \chi(x) = 0$.

b) Označme $f(x) = \sin \frac{1}{x}$. Pak $|f(x)| \leq 1$ pro každé $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$. Buď $\delta > 0$ libovolné. Pro dostatečně velké $n \in \mathbb{N}$ platí $0 < 1\big/(\frac{\pi}{2} + n\pi) < \delta$. Přitom $f(x_n) = (-1)^n$. Proto pro $x_0 = 0$ máme $M_f(\delta) = 1$ a $m_f(\delta) = -1$. Tedy $\limsup\limits_{x \to 0} \sin \frac{1}{x} = 1$, $\liminf\limits_{x \to 0} \sin \frac{1}{x} = -1$. ▲

Lemma D.19. *Pro libovolnou funkci* f *platí* $\liminf\limits_{x \to x_0} f(x) \leq \limsup\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Důkaz. Pro $\limsup\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ resp. $\liminf\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ je to zřejmé. Ve zbývajících případech je f ohraničená na $\mathscr{P}_{\delta_0}(x_0)$ a $m_f(\delta) \leq M_f(\delta)$ pro každé $\delta \in (0, \delta_0)$. □

Věta D.20. *Nechť* $x_0, L \in \mathbb{R}^*$. *Pro libovolnou funkci* f *platí* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ *právě tehdy, když* $\liminf\limits_{x\to x_0} f(x) = \limsup\limits_{x\to x_0} f(x) = L$.

Důkaz.
„$\Rightarrow$“
Nechť $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$, $L \in \mathbb{R}$. Pak k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta_0 > 0$ tak, že pro $x \in \mathscr{P}_{\delta_0}$ je $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$. Odtud pro $0 < \delta < \delta_0$ je $L - \varepsilon \le m_\delta(f) \le M_\delta(f) \le L + \varepsilon$ a pro $\delta \to 0^+$ je $L - \varepsilon \le \liminf\limits_{x\to x_0} f(x) \le \limsup\limits_{x\to x_0} f(x) \le L + \varepsilon$, a tedy $\liminf\limits_{x\to x_0} f(x) = \limsup\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ ($\varepsilon > 0$ bylo libovolné).

Pro $L = +\infty$ k libovolnému $k \in \mathbb{R}$ existuje $\delta_0 > 0$ tak, že pro $x \in \mathscr{P}_{\delta_0}$ je $f(x) > k$, tedy pro $0 < \delta < \delta_0$ je $k \le m_\delta(f)$, a tudíž $k \le \liminf\limits_{x\to x_0} f(x)$. Odtud $\liminf\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ (k bylo libovolné), což vzhledem k lemmatu D.19 dokazuje tvrzení. Případ $L = -\infty$ je obdobný.

„$\Leftarrow$“
Pro $L \in \mathbb{R}$ k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta_0 > 0$ tak, že pro $0 < \delta < \delta_0$ platí $L - \varepsilon < m_\delta(f) \le M_\delta(f) < L + \varepsilon$. Tedy pro $x \in \mathscr{P}_{\delta_0}$ je $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$, takže $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$.

Pro $L = +\infty$ k libovolnému $k \in \mathbb{R}$ existuje $\delta_0 > 0$ tak, že pro $0 < \delta < \delta_0$ je $k < m_\delta(f)$. Tedy pro $x \in \mathscr{P}_{\delta_0}$ je $k < f(x)$, takže $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$. Případ $L = -\infty$ je obdobný. □

U posloupností hrál důležitou roli pojem cauchyovské posloupnosti. Ukazuje se, že tento pojem lze zavést i pro funkce a že platí obdobný výsledek jako věta 2.43.

Věta D.21 (Cauchyovo-Bolzanovo kritérium pro funkce). *Funkce* f *má v bodě* $x_0 \in \mathbb{R}^*$ *vlastní limitu právě tehdy, když má následující vlastnost:*

> *Ke každému* $\varepsilon > 0$ *existuje ryzí okolí* $\mathscr{P}(x_0)$ *takové, že pro libovolná* $x, y \in \mathscr{P}(x_0)$ *platí nerovnost* $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Důkaz.
„$\Rightarrow$“
Nechť $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$ libovolné číslo. Pak k číslu $\varepsilon/2$ existuje ryzí okolí $\mathscr{P}(x_0)$ takové, že pro $x \in \mathscr{P}(x_0)$ je $|f(x) - L| < \varepsilon/2$. Nyní pro $x, y \in \mathscr{P}(x_0)$ dostaneme $|f(x) - f(y)| = |f(x) - L + L - f(y)| \le |f(x) - L| + |f(y) - L| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

„$\Leftarrow$“
Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné a $\mathscr{P}(x_0)$ je jemu odpovídající okolí z podmínky věty. Nechť $\{x_n\}$, $x_n \ne x_0$, je posloupnost taková, že $x_n \to x_0$ pro $n \to \infty$. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $x_n \in \mathscr{P}(x_0)$ pro $n \ge n_0$, a tudíž pro $m, n \ge n_0$ platí $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$. To ovšem znamená, že posloupnost $\{f(x_n)\}$ je cauchyovská a podle věty 2.43 je konvergentní a má vlastní limitu. Z věty D.15 dostáváme, že existuje vlastní limita $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. □

Analogické tvrzení platí pro jednostranné limity.

D.3. Další vlastnosti konvexních funkcí

V kapitole 6 jsme zavedli konvexní a konkávní funkce a vyšetřovali jsme jejich vlastnosti zejména za předpokladu, že funkce měly první resp. druhou derivaci. Ukazuje se, že i bez těchto předpokladů mají konvexní a konkávní funkce řadu důležitých vlastností. Některé z nich si nyní uvedeme. Protože funkce f je konkávní právě tehdy, když funkce $-f$ je konvexní, omezíme se ve formulacích na konvexní funkce.

Nechť f je definovaná na intervalu I s krajními body α a β, $\alpha < \beta$. Označme vnitřek intervalu $I^o = (\alpha, \beta)$ a jeho uzávěr $\overline{I} = [\alpha, \beta]$ (pro $\alpha = -\infty$ resp. $\beta = +\infty$ zůstává $\overline{I}$ zleva resp. zprava otevřený). Tedy $I^o \subseteq D(f) = I \subseteq \overline{I}$.

Lemma D.22. *Je-li f konvexní na I, je f spojitá na I^o.*

Důkaz. Nechť $x_2 \in I^o$ a $x_1 < x_2 < x_3$ — viz obr. 6.2 b). Nechť $y = p_1(x)$ je rovnice přímky procházející body $(x_1, f(x_1))$ a $(x_2, f(x_2))$ a $y = p_3(x)$ je rovnice přímky procházející body $(x_2, f(x_2))$ a $(x_3 f(x_3))$. Z definice konvexity je $f(x) \leq p_3(x)$, $x \in [x_2, x_3]$. Nechť $x_4 \in (x_2, x_3)$ a p je přímka procházející body $(x_2, f(x_2))$ a $(x_4, f(x_4))$. Pak $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq$ $\leq \frac{f(x_4)-f(x_2)}{(x_4-x_2)}$. Odtud vzhledem k rovnostem $p_1(x_2) = p(x_2) = f(x_2)$ máme $p_1(x) \leq p(x)$ pro $x \geq x_2$. Ale $p(x_4) = f(x_4)$, odkud $p_1(x) \leq f(x)$, $x \in [x_2, x_3]$. Celkem jsme dostali, že platí $p_1(x) \leq f(x) \leq p_3(x)$, $x \in [x_2, x_3]$. Protože $\lim\limits_{x \to x_2^+} p_1(x) = \lim\limits_{x \to x_2^+} p_3(x) = f(x_2)$, podle věty 4.15 je $\lim\limits_{x \to x_2^+} f(x) = f(x_2)$ a f je spojitá zprava v x_2. Obdobně se ukáže spojitost zleva. □

V krajních bodech I (pokud je v nich definovaná) konvexní funkce nemusí být spojitá, jak ukazuje příklad $f(x) = 0$, $x \in (0, 1)$, $f(0) = f(1) = 1$. Viz též příklad D.35.

Příklad D.23. Nechť funkce f je konvexní na ohraničeném intervalu I. Dokažte, že f je zdola ohraničená na I.

Řešení. Zvolíme $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$. Nechť $y = p(x)$ je rovnice přímky procházející body $(x_1, f(x_1))$ a $(x_2, f(x_2))$. V důkazu lemmatu D.22 byla odvozena nerovnost $p(x) \leq f(x)$ pro $x \in (\alpha, x_1] \cup [x_2, \beta)$. Protože lineární funkce p je ohraničená na ohraničené množině, je i funkce f na této množině zdola ohraničená. Na intervalu $[x_1, x_2]$ je f spojitá, takže je zde podle Weierstrassovy věty ohraničená. Celkem je tedy zdola ohraničená na I^o a tudíž i na $D(f)$. ▲

Příklad D.24. Nechť funkce f je rostoucí a konvexní na intervalu $(\alpha, +\infty)$. Dokažte, že pak $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Řešení. Postupujeme analogicky jako v předchozím příkladu. Zvolíme $\alpha < x_1 < x_2$ a označíme $y = p(x)$ rovnici přímky procházející body $(x_1, f(x_1))$ a $(x_2, f(x_2))$. Z důkazu lemmatu D.22 máme nerovnost $p(x) \leq f(x)$ pro $x \in [x_2, +\infty)$. Protože $f(x_1) < f(x_2)$, je lineární funkce p rostoucí, takže $\lim\limits_{x \to +\infty} p(x) = +\infty$, a tudíž platí i $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. ▲

Lemma D.25. *Funkce f je konvexní (ostře konvexní) na I právě tehdy, když pro libovolné $x_0 \in I$ je funkce $g(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ neklesající (rostoucí) na $I \setminus \{x_0\}$.*

Důkaz. Plyne přímo z věty 6.25. a lemmatu 6.23. □

Věta D.26. *Nechť funkce f je definovaná na otevřeném intervalu $I = (\alpha, \beta)$.*

1. *Je-li funkce f konvexní na I, pak pro každý bod $x_0 \in I$ existují vlastní jednostranné derivace $f'_-(x_0)$ a $f'_+(x_0)$ a platí $f'_-(x_0) \le f'_+(x_0)$. Tedy f je zejména spojitá na I.*
2. *Je-li f konvexní (ostře konvexní) na I a $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, pak platí $f'_+(x_1) \le f'_-(x_2)$ ($f'_+(x_1) < f'_-(x_2)$).*

Důkaz.

1. Označme $g(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $x \ne x_0$. Funkce g je neklesající podle lemmatu D.25. Pro $x_1 < x_0 < x_2$ je $g(x_1) \le g(x_2)$, proto platí $\lim_{x\to x_0^-} g(x) \le g(x_2)$, a tudíž i následně $\lim_{x\to x_0^-} g(x) \le \lim_{x\to x_0^+} g(x)$ (limity existují díky monotonii g a jsou vlastní, protože g je ohraničená v ryzím okolí bodu x_0). Ale $\lim_{x\to x_0^-} g(x) = f'_-(x_0)$ a $\lim_{x\to x_0^+} g(x) = f'_+(x_0)$. Z existence jednostranných derivací plyne spojitost zprava a zleva a tedy i spojitost funkce f. (Spojitost jsme již dokázali nezávisle v lemmatu D.22.)
2. Pro $x_1 < x < x_2$ platí $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$. Limitním přechodem v levém zlomku pro $x \to x_1^+$ a v pravém pro $x \to x_2^-$ dostaneme (existence jednostranných derivací plyne z bodu 1), že $f'_+(x_1) \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le f'_-(x_2)$. Je-li f ostře konvexní, zůstanou v předchozích nerovnostech vzhledem k ryzí monotónnosti pomocné funkce g ostré nerovnosti. □

Poznámka D.27.

a) V krajních bodech intervalu, na kterém je funkce f konvexní, (pokud patří do $D(f)$) také existují jednostranné derivace, ale mohou být nevlastní. Konkrétně platí:
Je-li f konvexní na $[\alpha, \beta)$, existuje $f'_+(\alpha)$ a $-\infty \le f'_+(x_0) < +\infty$. Je-li f konvexní na $(\alpha, \beta]$, existuje $f'_-(\beta)$ a $-\infty < f'_+(x_0) \le +\infty$.
b) I pro ostře konvexní funkci se může stát, že pro nějaké x_0 je $f'_-(x_0) < f'_+(x_0)$. Např. pro $f(x) = |\operatorname{tg} x|$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, která je ostře konvexní, je $f'_-(0) = -1 < 1 = f'_+(0)$.

Z věty D.26 dostáváme, že platí:

Důsledek D.28. *Je-li f konvexní (ostře konvexní) na intervalu $I = (\alpha, \beta)$, pak jsou f'_- a f'_+ neklesající (rostoucí) na I. (Je-li $I = [\alpha, \beta)$, tvrzení pro f'_+ platí na $[\alpha, \beta)$ a podobně, je-li $I = (\alpha, \beta]$, tvrzení pro f'_- platí na $(\alpha, \beta]$.)*

Lemma D.29. *Je-li f (ostře) konvexní na (α, β) a spojitá na $[\alpha, \beta]$, je f (ostře) konvexní na $[\alpha, \beta]$.*

Důkaz. Pro $x_1 < x_2 < x_3$ je $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$. Nyní pro $x_1 \to \alpha^+$ je (f je spojitá zprava v α) $\frac{f(x_2)-f(\alpha)}{x_2-\alpha} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$ a podle věty 6.25 je f konvexní na $[\alpha, \beta)$. Stejně se ukáže, že konvexnost se zachová i připojením koncového bod β.

Nechť f je ostře konvexní na (α, β), ale není ostře konvexní na $[\alpha, \beta]$. Pak existují $\alpha \le x_1 < \gamma < x_2 \le \beta$ tak, že $\frac{f(x_1)-f(\gamma)}{x_1-\gamma} = \frac{f(x_2)-f(\gamma)}{x_2-\gamma}$. Protože $\frac{f(x)-f(\gamma)}{x-\gamma}$ je neklesající, je tato funkce na $(x_1, x_2) \setminus \{\gamma\}$ rovna nějaké konstantě C. Odtud $f(x) = f(\gamma) + C(x - \gamma)$ je lineární na $(x_1, x_2) \subseteq (\alpha, \beta)$, což je spor. $\square$

Věta D.30. *Nechť f je konvexní na I a $x_0 \in I^o$. Pak platí:*

$$\lim_{x \to x_0^+} f'_+(x) = \lim_{x \to x_0^+} f'_-(x) = f'_+(x_0),$$
$$\lim_{x \to x_0^-} f'_+(x) = \lim_{x \to x_0^-} f'_-(x) = f'_-(x_0).$$

Tedy $f'(x_0)$ existuje právě tehdy, když f'_+ (resp. f'_-) je v x_0 spojitá.

Důkaz. Limity existují, protože podle důsledku D.28 jsou f'_- a f'_+neklesající. Dokážeme např. první vztah (důkaz druhého je analogický). Pro $x > x_0$ je $f'_+(x_0) \le f'_-(x) \le f'_+(x)$ a pro $x \to x_0^+$ je tudíž $f'_+(x_0) \le \lim\limits_{x \to x_0^+} f'_-(x) \le \lim\limits_{x \to x_0^+} f'_+(x)$. Dále pro $x_0 < x < x_1$ je $f'_+(x) \le \frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$. Funkce f je podle lemmatu D.22 spojitá, tedy pro $x \to x_0^+$ je $\lim\limits_{x \to x_0^+} f'_+(x) \le \lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$. Nyní pro $x_1 \to x_0^+$ je $\lim\limits_{x \to x_0^+} f'_+(x) \le f'_+(x_0)$, což dohromady dokazuje tvrzení. $\square$

Lemma D.31. *Nechť f je konvexní na I a $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$.*

i) *Je-li $f(x_1) \le f(x_2)$ ($f(x_1) < f(x_2)$), je f neklesající (rostoucí) pro $x \ge x_2$, $x \in I$.*
ii) *Je-li $f(x_1) \ge f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$), je f nerostoucí (klesající) pro $x \le x_1$, $x \in I$.*

Je-li f ostře konvexní, je ryze monotonní na příslušném intervalu, i když $f(x_1) = f(x_2)$.

Důkaz. Nechť $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ a $f(x_1) \le f(x_2)$. Pak $0 \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} \le$ $\le \frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3}$. Odtud $f(x_4) \ge f(x_3)$. Je-li $f(x_1) < f(x_2)$, bude $f(x_4) > f(x_3)$. Obdobně se dokáže případ ii). Je-li f ostře konvexní, bude v případě i) $0 < \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} < \frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3}$, takže $f(x_4) > f(x_3)$. Případ ii) je analogický. $\square$

Věta D.32. *Nechť f je konvexní na I a $x_0 \in I$ je bod lokálního minima funkce f. Pak je toto minimum globální. Je-li f dokonce ostře konvexní, je toto minimum ostré a jediné.*

Důkaz. Bod x_0 je vnitřní a na jistém $\mathscr{O}(x_0) \subseteq I$ platí $f(x_0) \le f(x)$. Nechť např. $x_1 > x_0$. Zvolíme $x_2 \in \mathscr{O}(x_0)$, $x_0 < x_2 < x_1$. Podle lemmatu D.31 je $f(x_1) \ge f(x_2) \ge f(x_0)$. Obdobně pro $x_1 < x_0$. Minimum je tudíž globální. Je-li f ostře konvexní, je toto minimum podle lemmatu D.31 dokonce ostré a protože je globální, je jediné. $\square$

Příklad D.33. Může mít funkce konvexní (ostře konvexní) na I v nějakém bodě lokální maximum?

Řešení. Je-li konvexní, může, ale pak je f konstantní na nějakém okolí bodu x_0. Je totiž $f(x) \le f(x_0)$ pro $x \in \mathscr{O}(x_0)$. Podle lemmatu D.31 pak ale v tomto okolí současně $f(x) \ge$ $\ge f(x_0)$. Je-li tedy f ostře konvexní, nemůže mít lokální maximum. ▲

Věta D.34. *Nechť f je konvexní na otevřeném intervalu $I = (\alpha, \beta)$. Pak nastane právě jedna z pěti možností:*

(a) *f roste na I;*

(b) *f klesá na I;*

(c) *existuje $x_0 \in I$ takové, že f je konstantní na $(\alpha, x_0]$ a je rostoucí na $[x_0, \beta)$;*

(d) *existuje $x_0 \in I$ takové, že f je klesající na $(\alpha, x_0]$ a je konstantní na $[x_0, \beta)$;*

(e) *existuje interval (eventuelně degenerovaný na bod) $J = [x_0, x_1] \subseteq I$, $\alpha < x_0 \le x_1 < \beta$, takový, že f je konstantní na J, je klesající na $(\alpha, x_0]$ a je rostoucí na $[x_1, \beta)$.*

Je-li f ostře konvexní, nemohou nastat případy (c) a (d) a nastane-li případ (e), je J jednoprvková množina.

Důkaz. Nechť nenastane ani (a), ani (b). Ukážeme, že pak má f globální minimum. Protože f není klesající, lze najít $x_1 < x_2$ tak, že $f(x_1) \le f(x_2)$. Podle lemmatu D.31 je f neklesající pro $x \ge x_2$. Podobně z toho, že f není rostoucí, plyne existence x_3 takového, že pro $x \le x_3$ je f nerostoucí. Lze předpokládat, že $x_3 < x_2$. Na intervalu $[x_3, x_2]$ je podle lemmatu D.22 funkce f spojitá, takže podle Weierstrassovy věty 4.33 nabývá na tomto intervalu nejmenší hodnotu v nějakém bodě x_0, v němž je lokální minimum f na I. Pro $x_3 < x_0 < x_2$ je to zřejmé, pro $x_0 = x_2$ resp. $x_0 = x_3$ to plyne z monotonie f mimo $[x_3, x_2]$. Z věty D.32 máme, že je toto minimum globální.

Označme J množinu všech bodů globálního minima. Pak J je jednoprvková nebo je to interval. Pro $x_4 < x_5$ z J a $x \in (x_4, x_5)$ totiž $\frac{f(x)-f(x_4)}{x-x_4} \le \frac{f(x_5)-f(x_4)}{x_5-x_4} = 0$, z čehož máme $f(x) \le f(x_4)$, takže $x \in J$. Tedy f je konstantní na J. Zbytek tvrzení plyne z lemmatu D.31. Je-li f ostře konvexní, nemůže být na žádném podintervalu lineární. V případě (e) je podle věty D.32 množina J jednoprvková. □

Příklad D.35. Nechť funkce f je konvexní na ohraničeném otevřeném intervalu (α, β). Kdy je možné dodefinovat f tak, aby byla konvexní na $[\alpha, \beta]$? Jaké pak musí být funkční hodnoty $f(\alpha)$ a $f(\beta)$?

Řešení. Podle příkladu D.23 je f zdola ohraničená na (α, β). Dále podle věty D.34 existují $\lim_{x \to \alpha^+} f(x) = f(\alpha+) > -\infty$ a $\lim_{x \to \beta^-} f(x) = f(\beta-) > -\infty$. Podle lemmatu D.25 bude f konvexní na $[\alpha, \beta]$ právě tehdy, když pro libovolné $x_0 \in [\alpha, \beta]$ bude funkce $g(x) = \frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}$ neklesající na množině $[\alpha, \beta] \setminus \{x_0\}$.

Vyšetříme např. levý konec α. Podle předpokladu je funkce g neklesající na $(\alpha, \beta) \setminus \{x_0\}$, $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Aby se monotonie zachovala po dodefinování $f(\alpha)$, je nutné a stačí, aby $\frac{f(x_0)-f(\alpha)}{x_0-\alpha} \le \lim_{x \to \alpha^+} \frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x} = \frac{f(x_0)-f(\alpha+)}{x_0-\alpha}$. To lze splnit právě tehdy, když platí nerovnost $f(\alpha+) < +\infty$. Pak musí být $\frac{f(x_0)-f(\alpha)}{x_0-\alpha} \le \frac{f(x_0)-f(\alpha+)}{x_0-\alpha}$. Lze tedy funkční hodnotu v α volit libovolně tak, aby $f(\alpha) \ge f(\alpha+)$.

Musíme ještě ověřit, že při této volbě bude funkce g neklesající i pro $x_0 = \alpha$. Pro $\alpha < x < x_1 < x_2 < \beta$ je $\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$, což je ekvivalentní s nerovností $f(x) \ge$ $\ge f(x_1)\frac{x_2-x}{x_2-x_1} + f(x_2)\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$. Limitním přechodem s využitím nerovnosti $f(\alpha) \ge f(\alpha+)$ dostaneme, že $f(\alpha) \ge f(x_1)\frac{x_2-\alpha}{x_2-x_1} + f(x_2)\frac{\alpha-x_1}{x_2-x_1}$, tj. $\frac{f(x_1)-f(\alpha)}{x_1-\alpha} \le \frac{f(x_2)-f(\alpha)}{x_2-\alpha}$.

Totéž platí pro pravý konec. Musí být $f(\beta-) < +\infty$ a $f(\beta-) \le f(\beta)$. ▲

Příklad D.36. Nechť jsou funkce f a g konvexní na intervalu I. Dokažte, že pak také funkce $f+g$, $\max\{f,g\}$ a αf, kde $\alpha \in (0,+\infty)$, jsou konvexní na I. Je-li f ostře konvexní, jsou také $f+g$ a αf ostře konvexní.

Řešení. Využijeme vztah (6.4) z věty 6.25, který je ekvivalentní definici konvexity. Nechť $x_1 < x_2$ leží v I a $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

Platí $(f+g)(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + g(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \le \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + {} + \lambda_1 g(x_1) + \lambda_2 g(x_2) = \lambda_1 (f+g)(x_1) + \lambda_2 (f+g)(x_2)$.

Podobně platí $\max\{f,g\}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \max\{f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2), g(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)\} \le {} \le \max\{\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2), \lambda_1 g(x_1) + \lambda_2 g(x_2)\} \le \lambda_1 \max\{f,g\}(x_1) + \lambda_2 \max\{f,g\}(x_2)$.

Poslední tvrzení je triviální. Je-li f ostře konvexní, bude příslušná nerovnost ostrá. ▲

Výsledek předchozího příkladu lze indukcí rozšířit na libovolný konečný počet funkcí.

Příklad D.37. Nechť funkce f má v bodě x_0 inflexi a $f'(x_0)$ je vlastní. Ukažte, že pak existuje okolí $\mathscr{O}_\delta(x_0)$ takové, že platí $f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ pro každé $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ a $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ pro každé $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, nebo naopak — srv. poznámku 6.32.

Řešení. Podle předpokladu existuje okolí $\mathscr{O}_\delta(x_0)$ takové, že f je ostře konkávní na intervalu $(x_0 - \delta, x_0)$ a ostře konvexní na intervalu $(x_0, x_0 + \delta)$ nebo naopak. Nechť nastane např. první možnost. Vyšetříme pravé okolí $(x_0, x_0 + \delta)$. Ostatní případy jsou analogické.

Označme $g(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$. Protože f je zde ostře konvexní a funkce $-f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$ je lineární, a tedy také konvexní, je podle příkladu D.36 g ostře konvexní na $(x_0, x_0 + \delta)$. Funkce g spojitá na $[x_0, x_0 + \delta)$ ($f'(x_0)$ je vlastní), takže podle lemmatu D.29 je na tomto intervalu ostře konvexní. Z důsledku D.28 plyne, že g'_+ je rostoucí na $[x_0, x_0 + \delta)$. Protože $g'(x_0) = 0$, je $g'_+(x) > 0$ na $(x_0, x_0 + \delta)$.

Ukážeme, že g je rostoucí na $(x_0, x_0 + \delta)$. Připusťme, že v intervalu $(x_0, x_0 + \delta)$ existují $x_1 < x_2$ tak, že $g(x_1) \ge g(x_2)$. Podle lemmatu D.31 je g klesající na $[x_0, x_1)$. Zvolme $x_3, x \in (x_0, x_1)$, $x_3 < x$. Pak $\frac{f(x) - f(x_3)}{x - x_3} < 0$ a limitním přechodem $x \to x_3^+$ dostaneme, že $f'_+(x_3) \le 0$, což je spor, a g tedy roste. Protože $g(x_0) = 0$, je $g(x) > 0$ na $(x_0, x_0 + \delta)$ a odtud plyne tvrzení. ▲

Poznámka D.38. Ve formulaci následující věty budeme pracovat s n-ticemi bodů $x_1, \dots, x_n$ a s n-ticemi čísel $\lambda_1 \ge 0, \dots, \lambda_n \ge 0$, $n \in \mathbb{N}$, takovými, že $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. Pro takovéto n-tice označme $y_1, \dots, y_k$, $k \in \mathbb{N}$, všechny vzájemně různé body x_i, tj. $\{x_1, \dots, x_n\} = {} = \{y_1, \dots, y_k\}$. Dále označme μ_j součet všech λ_i, pro něž $y_j = x_i$, $j = 1, \dots, k$. Pak $\mu_j \ge 0$ a $\mu_1 + \dots + \mu_k = 1$.

Věta D.39 (Jensenova nerovnost). *Nechť funkce f je definovaná na intervalu I. Pak platí:*

(a) *Funkce f je konvexní na I právě tehdy, když pro libovolné $x_1, \dots, x_n \in I$ a libovolná $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, $\lambda_i \ge 0$, $i = 1 \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$, platí nerovnost*

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \le \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n). \tag{D.1}$$

(b) *Funkce f je ostře konvexní na I právě tehdy, když platí nerovnost (D.1), přičemž tato nerovnost je splněna pro nějaká $x_1, \dots, x_n$ a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ jako ostrá právě tehdy, když při označení z poznámky D.38 je $k \ge 2$ a pro alespoň jedno j je $0 < \mu_j < 1$.*

Důkaz. (a)
Postačitelnost je zřejmá. Pro $n = 2$ přechází nerovnost (D.1) v nerovnost (6.4), takže podle věty 6.25 je f konvexní.

Dokážeme nutnost. Označme $\alpha = \min\{x_1, \dots, x_n\}$, $\beta = \max\{x_1, \dots, x_n\}$. Pak

$$\alpha = (\lambda_1 + \dots + \lambda_n)\alpha \le \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \le (\lambda_1 + \dots + \lambda_n)\beta = \beta,$$

takže $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \in I$.

Důkaz provedeme indukcí. Pro $n = 1$ je tvrzení zřejmé. Nechť nerovnost (D.1) platí pro všechny $(n-1)$-tice, $n \ge 2$. Mějme n-tice $x_1, \dots, x_n$ a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, $\lambda_i \ge 0$, $i = 1 \dots, n$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. Nechť $0 < \lambda_i < 1$, $i = 1 \dots, n$ (jinak je tvrzení zřejmé). Označme nyní $\mu = \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1}$ a $\bar{x} = \frac{\lambda_1}{\mu} x_1 + \dots + \frac{\lambda_{n-1}}{\mu} x_{n-1}$. Je $\bar{x} \in I$, protože $\frac{\lambda_1}{\mu} + \dots + \frac{\lambda_{n-1}}{\mu} = 1$. Dále $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = \mu\bar{x} + (1-\mu)x_n$. S využitím nerovnosti (6.4) a indukčního předpokladu dostaneme

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) &= f(\mu\bar{x} + (1-\mu)x_n) \le \mu f(\bar{x}) + (1-\mu) f(x_n) \le \\ &\le \mu\Big(\frac{\lambda_1}{\mu} f(x_1) + \dots + \frac{\lambda_{n-1}}{\mu} f(x_{n-1})\Big) + \lambda_n f(x_n) = \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n). \end{aligned} \tag{D.2}$$

(b)
Postačitelnost je zřejmá vzhledem k (6.4) z věty 6.25. Ukážeme nutnost. Nechť v (D.1) nastane ostrá nerovnost. Nemůže být $k = 1$, protože by platilo $x_1 = \dots = x_n$ a dostali bychom rovnost. Kdyby neexistovalo $0 < \mu_j < 1$, existovalo by $s \in \{1, \dots, k\}$ takové, že $\mu_s = 1$ a $\mu_j = 0$ pro $j \ne s$. Pak

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) = f(y_s) = \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n),$$

což je spor.

Nechť nyní $k \ge 2$ a pro alespoň jedno j je $0 < \mu_j < 1$. Pak pro všechna $j = 1, \dots, k$ je $\mu_j < 1$, a tedy i $\lambda_i < 1$ pro všechna $i = 1, \dots, n$. Vyberme největší x_i, pro něž $\lambda_i > 0$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že je to x_n. Definujme bod $\bar{x}$ stejně jako v části (a). Stejně jako tam se ukáže, že $\bar{x}$ leží mezi těmi x_i, pro něž je $\lambda_i > 0$, a tedy $\bar{x} < x_n$. Přitom $0 < \mu < 1$. Protože předpokládáme, že f je ostře konvexní, bude $f(\mu\bar{x} + (1-\mu)x_n) < < \mu f(\bar{x}) + (1-\mu) f(x_n)$ v (D.2), a tudíž v (D.1) nastane ostrá nerovnost. □

Podmínku týkající se ostré nerovnosti lze také vyjádřit tak, že existují aspoň dva různé body x_i, x_j takové, že jim odpovídající koeficienty λ_i, λ_j jsou kladné.

Důsledek D.40. *Nechť f je ostře konvexní, platí $\lambda_i > 0$ pro všechna $i = 1, \dots, n$ a v (D.1) nastane rovnost. Pak $x_1 = \dots = x_n$.*

Příklad D.41. Dokažte, že pro libovolná nezáporná $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, platí nerovnost mezi geometrickým a aritmetickým průměrem (tzv. *AG-nerovnost*)

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n} \le \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$

Přitom rovnost nastane právě tehdy, když $x_1 = \dots = x_n$.

Řešení. Pokud je některé x_i nulové, tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme tedy, že $x_i > 0$, $i = 1, \dots, n$. Funkce e^x je ostře konvexní na $\mathbb{R}$, protože $(\mathrm{e}^x)'' = \mathrm{e}^x > 0$. Označme $y_i = \ln x_i$, $i = 1, \dots, n$. Nechť $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, a $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. Pak z Jensenovy nerovnosti dostaneme

$$x_1^{\lambda_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\lambda_n} = \mathrm{e}^{\lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_n y_n} \leq \lambda_1 \mathrm{e}^{y_1} + \dots + \lambda_n \mathrm{e}^{y_n} = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n.$$

Speciálně volbou $\lambda_i = \frac{1}{n}$, $i = 1, \dots, n$, dostaneme AG-nerovnost. Protože $0 < \frac{1}{n}$, plyne z důsledku D.40 zbytek tvrzení. ▲

AG-nerovnost má řadu významných aplikací a je mimořádně silným a užitečným nástrojem. Ukážeme si aspoň jedno použití.

Příklad D.42. Nechť $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, a nechť $a > 0$, $x_0 > 0$. Definujme rekurentně posloupnost

$$x_{n+1} = \frac{1}{p}\left((p-1)x_n + \frac{a}{x_n^{p-1}}\right). \tag{D.3}$$

Dokažte, že pak je posloupnost $\{x_n\}$ konvergentní. Označíme-li $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \omega$, pak $\omega > 0$ a platí $\omega^p = a$, tj. $\omega = \sqrt[p]{a}$.

Řešení. Zřejmě je $x_n > 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Použijeme AG-nerovnost na p činitelů: prvních $p - 1$ bude x_n a poslední bude a/x_n^{p-1}. Vyjde

$$a = x_n^{p-1} \cdot \frac{a}{x_n^{p-1}} \leq \left(\frac{p-1}{p} x_n + \frac{a}{p x_n^{p-1}}\right)^p = x_{n+1}^p.$$

Tedy $x_n^p \geq a$ pro každé $n \geq 1$. Pomocí této nerovnosti ukážeme, že posloupnost x_n je nerostoucí. Platí

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \left(\frac{p-1}{p} x_n + \frac{a}{p x_n^{p-1}}\right) = \frac{x_n}{p} - \frac{a}{p x_n^{p-1}} = \frac{1}{p}\left(\frac{x_n^p - a}{x_n^{p-1}}\right) \geq 0.$$

Protože je tato posloupnost zdola ohraničená, je podle věty 2.20 konvergentní. Kdyby platilo, že $x_n \to 0$, bylo by i $x_n^p \to 0$, což je spor s tím, že $x_n^p \geq a > 0$.

Zbývá ukázat, že $\omega^p = a$. Provedeme v (D.3) limitní přechod pro $n \to \infty$. To můžeme, protože již víme, že limita existuje a je kladná. Vyjde

$$\omega = \frac{1}{p}\left((p-1)\omega + \frac{a}{\omega^{p-1}}\right), \qquad \text{neboli} \qquad \omega^p = \frac{p-1}{p}\omega^p + \frac{a}{p}$$

a odtud již vychází $\omega^p = a$, což jsme měli dokázat. ▲

Předchozí příklad ukazuje, že ke každému kladnému číslu existuje jeho p-tá odmocnina, a to pro každé $p \geq 2$. Jednoznačnost takového čísla je zřejmá; je-li $\omega_1 < \omega_2$, je $\omega_1^p < \omega_2^p$. Tento důkaz je jiný než ten, který byl naznačen v lemmatu 1.14. Zejména má konstruktivní charakter — umožňuje počítat přibližné hodnoty odmocniny s libovolnou přesností.

D.4. Další vlastnosti funkcí na intervalu

V tomto oddílu budeme potřebovat k formulacím a důkazům tvrzení základní poznatky o mohutnosti množin, se kterými se seznámíte v přednášce z teorie množin — viz [9]. Připomeňme základní výsledky.

- Množiny A a B se nazývají *ekvipotentní*, jestliže existuje bijekce A na B. Píšeme $A \sim B$. Relace „$\sim$" je ekvivalence.
- Množina se nazývá *nekonečná*, je-li ekvipotentní se svou vlastní podmnožinou.
- *Mohutnost* množiny A značíme $\operatorname{card} A$. (Pro konečné množiny je to počet prvků A.)
- Množiny A a B jsou ekvipotentní právě tehdy, když mají stejnou mohutnost, tj. když $\operatorname{card} A = \operatorname{card} B$.
- Je-li A ekvipotentní s C, kde $C \subseteq B$, a $\operatorname{card} A \neq \operatorname{card} B$, píšeme $\operatorname{card} A < \operatorname{card} B$. Definujeme $\operatorname{card} A \leq \operatorname{card} B$, je-li $\operatorname{card} A = \operatorname{card} B$ nebo $\operatorname{card} A < \operatorname{card} B$. Relace „$\leq$" je úplným uspořádáním.
- Je-li $A \subseteq B$, je $\operatorname{card} A \leq \operatorname{card} B$. Je-li $A \subseteq B$ a $\operatorname{card} A < \operatorname{card} B$, je $B \setminus A \neq \emptyset$. Existuje-li prosté zobrazení A do B, je $\operatorname{card} A \leq \operatorname{card} B$.
- Mohutnost množiny $\mathbb{N}$ značíme $\operatorname{card} \mathbb{N} = \aleph_0$ (čte se alef nula). Je to nejmenší nekonečná mohutnost. Množiny o mohutnosti $\aleph_0$ se nazývají *spočetné*. Pro libovolnou konečnou množinu A platí $\operatorname{card} A < \aleph_0$. Množina A se nazývá *nejvýše spočetná*, je-li $\operatorname{card} A \leq \aleph_0$.
- Platí $\operatorname{card} \mathbb{N} = \operatorname{card} \mathbb{Z} = \operatorname{card} \mathbb{Q} = \aleph_0$, $\operatorname{card} \mathbb{R} > \aleph_0$,
  $\operatorname{card} \mathbb{R} = \operatorname{card} \mathbb{I} = \operatorname{card} \mathbb{C} = \operatorname{card} J$, kde $J \subseteq \mathbb{R}$ je libovolný interval.
  O množinách ekvipotentních s $\mathbb{R}$ říkáme, že mají *mohutnost kontinua*. Tuto mohutnost značíme $\operatorname{card} \mathbb{R} = 2^{\aleph_0}$.
- Je-li I (nejvýše) spočetná množina a pro každé $i \in I$ je A_i (nejvýše) spočetná množina, je sjednocení $\bigcup_{i \in I} A_i$ (nejvýše) spočetná množina.
- Jsou-li $A_1, \ldots, A_n$, $n \in \mathbb{N}$ (nejvýše) spočetné množiny, je kartézský součin $A_1 \times \cdots \times A_n$ (nejvýše) spočetná množina.

Příklad D.43. Dokažte, že množina algebraických čísel $\mathbb{A}$ je spočetná.

Řešení. Algebraická čísla jsou reálné kořeny nenulových mnohočlenů s celočíselnými koeficienty — viz poznámka 2.28. Protože $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{A}$, je $\operatorname{card} \mathbb{A} \geq \aleph_0$.

Pro $n \in \mathbb{N}$ označme A_n množinu všech nenulových mnohočlenů s celočíselnými koeficienty $a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k$ takových, že $|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_k| + k \leq n$. Dále označme B_n množinu všech reálných kořenů všech mnohočlenů z A_n. Zřejmě všechny množiny A_n jsou konečné (určitě je $\operatorname{card} A_n < (2n+1)^{n+1}$), takže jsou konečné i množiny B_n. Přitom platí $\mathbb{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$, takže $\operatorname{card} \mathbb{A} \leq \aleph_0$. ▲

Z předchozího příkladu plyne, že množina všech transcendentních čísel $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{A}$ je neprázdná (je totiž $\operatorname{card} \mathbb{A} = \aleph_0 < \operatorname{card} \mathbb{R}$). Přitom jsme neuvedli jediný konkrétní příklad transcendentního čísla (tento důkaz neprázdnosti $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{A}$ pocházející od Cantora je tzv. existenční). Ukázat o konkrétním čísle (např. e nebo π), že je transcendentní, je daleko obtížnější.

Analogicky lze uvažovat komplexní algebraická čísla. Výsledek bude stejný.

Následující výsledky jsou tvrzení říkající, že množina všech bodů, v nichž má funkce definovaná na intervalu jistou vlastnost, není „příliš velká". V důkazech využijeme skutečnost, že množina po dvou disjunktních otevřených intervalů je nejvýše spočetná. Stačí vybrat v každém intervalu racionální číslo. Tím dostáváme prosté zobrazení množiny těchto intervalů do množiny $\mathbb{Q}$, která je spočetná.

Věta D.44. *Nechť funkce f je monotonní na intervalu I. Pak množina všech bodů nespojitosti f na I je nejvýše spočetná, přičemž všechny body nespojitosti jsou prvního druhu.*

Důkaz. Z lemmatu 4.18 plyne, že v každém bodě $x_0 \in I$ existují konečné jednostranné limity $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0-)$ a $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0+)$ (v případných krajních bodech vždy jen jedna z těchto limit). Tedy všechny body nespojitosti jsou prvního druhu.

Nechť f je např. neklesající. Pak ve vnitřních bodech je $f(x_0-) \le f(x_0+)$ a funkce je nespojitá v x_0 právě tehdy, když $f(x_0-) < f(x_0+)$. Označme $J \subseteq I$ množinu všech vnitřních bodů nespojitosti f. Pro každé $x \in J$ vyberme racionální číslo $r(x) \in (f(x-), f(x+))$. Pro $x_1, x_2 \in J, x_1 < x_2$, je $f(x_1+) \le f(x_2-)$, takže $(f(x_1-), f(x_1+)) \cap (f(x_2-), f(x_2+)) = \emptyset$. To znamená, že $r\colon J \to \mathbb{Q}$ je prosté zobrazení. Protože $\mathbb{Q}$ je spočetná, je J nejvýše spočetná. Krajní body intervalu (pokud je v nich f definovaná), mohou přidat nejvýše dva body nespojitosti. $\square$

Věta D.45. *Nechť f je funkce definovaná na intervalu I. Pak množina všech jejích bodů nespojitosti prvního druhu je nejvýše spočetná.*

Důkaz. Označme $J \subseteq I^o$ množinu všech bodů nespojitosti prvního druhu funkce f ležících uvnitř I. Pak $x_0 \in J$ právě tehdy, když $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0-) \ne \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0+)$. Je $J = J_1 \cup J_2$, kde $J_1 = \{x \in J : f(x-) < f(x+)\}$ a $J_2 = \{x \in J : f(x-) > f(x+)\}$. Dokážeme, že množina J_1 je nejvýše spočetná. Podobně se totéž ukáže pro J_2. Tím bude tvrzení lemmatu dokázáno.

Nechť $x \in J_1$. Vyberme racionální číslo $r_x \in (f(x-), f(x+))$. Tím je definováno zobrazení $\varphi\colon J_1 \to \mathbb{Q}$, které však nemusí být prosté. Položme $A_r = \{x \in J_1 : \varphi(x) = r\}$, kde $r \in \mathbb{Q}$. Pak platí $J_1 = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} A_r$. Protože $\mathbb{Q}$ je spočetná, stačí ukázat, že každá A_r je nejvýše spočetná.

Nechť $x \in A_r$. Protože $r < f(x+)$, existuje pravé δ_x-okolí $(x, x+\delta_x)$ takové, že pro $s \in (x, x+\delta_x)$ je $f(s) > r$. Dokážeme, že pro libovolná $x_1, x_2 \in A_r$, $x_1 < x_2$, je $(x_1, x_1+\delta_{x_1}) \cap (x_2, x_2+\delta_{x_2}) = \emptyset$. Připusťme, že tomu tak není. Pak je $x_2 < x_1 + \delta_{x_1}$ a $f(x) > r$ na intervalu $(x_1, x_2]$. Limitním přechodem $x \to x_2^-$ dostaneme, že $f(x_2-) \ge r$, což je spor. Každému $x \in A_r$ jsme tedy přiřadili jistý otevřený interval $(x, x+\delta_x)$. Protože množina těchto intervalů je po dvou disjunktní, je nejvýše spočetná a tutéž vlastnost má tudíž i množina A_r.

Pokud krajní body intervalu I patří do $D(f)$, mohou přidat nejvýše dva další body nespojitosti prvního druhu. □

Z předchozí věty plyne znovu věta D.44, protože monotonní funkce má pouze body nespojitosti prvního druhu.

Věta D.46. *Nechť f je funkce definovaná na intervalu I. Pak množina všech jejích bodů odstranitelné nespojitosti je nejvýše spočetná.*

Důkaz. Označme $J \subseteq I^o$ množinu všech bodů odstranitelné nespojitosti funkce f ležících uvnitř I. V těch bodech $x \in J$, kde není f definovaná, zvolme $f(x)$ libovolně ale tak, aby $\lim_{s\to x} f(s) \neq f(x)$. Je $J = J_1 \cup J_2$, kde $J_1 = \{x \in J : \lim_{s\to x} f(s) > f(x)\}$ a $J_2 =$ $= \{x \in J : \lim_{s\to x} f(s) < f(x)\}$. Dokážeme, že množina J_1 je nejvýše spočetná. Podobně se totéž ukáže pro J_2. Tím bude tvrzení lemmatu dokázáno.

Označme $A_n = \{x \in J_1 : \lim_{s\to x} f(s) > f(x)+1/n\}$, kde $n \in \mathbb{N}$. Pak platí $J_1 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Protože $\mathbb{N}$ je spočetná, stačí ukázat, že každá A_n je nejvýše spočetná.

Nechť $x \in A_n$ a $\lim_{s\to x} f(s) = a$. K číslu $1/2n > 0$ existuje $\delta_x > 0$ takové, že pro $s \in (x-\delta_x, x+\delta_x)$, $s \neq x$ platí nerovnosti $a - 1/2n < f(s) < a + 1/2n$. Předpokládejme nyní, že pro některé $y \in (x, x+\delta_x)$ platí $y \in J_1$. Pak existuje $\lim_{s\to y} f(s) = b$ a musí platit $a - 1/2n \leq b \leq a + 1/2n$. Odtud $b - f(y) < a + 1/2n - (a - 1/2n) = 1/n$. Tedy $y \notin A_n$. Přiřaďme každému $x \in A_n$ otevřený interval $(x, x+\delta_x)$. Z předchozího vyplývá, že pro $x_1, x_2 \in A_n$, $x_1 < x_2$, je $(x_1, x_1+\delta_{x_1}) \cap (x_2, x_2+\delta_{x_2}) = \emptyset$. Množina těchto intervalů je proto nejvýše spočetná a tutéž vlastnost má tudíž i množina A_n.

Pokud krajní body intervalu I patří do $D(f)$, mohou přidat nejvýše dva další body odstranitelné nespojitosti. □

Věta D.47. *Nechť f je funkce definovaná na intervalu I. Pak množina všech bodů, v nichž má f ostré lokální extrémy, je nejvýše spočetná.*

Důkaz. Nechť $J \subseteq I$ je množina všech bodů, v nichž má funkce f ostré lokální extrémy. Pak $J = J_1 \cup J_2$, kde J_1 je množina těch bodů, v nichž má f ostrá lokální maxima, a J_2 je množina těch bodů, v nichž má f ostrá lokální minima. Dokážeme, že množina J_1 je nejvýše spočetná. Podobně se totéž ukáže pro J_2. Tím bude tvrzení lemmatu dokázáno.

Nechť $x \in J_1$. Z definice ostrého lokálního maxima vyplývá, že existuje přirozené číslo n_x takové, že pro $s \in (x - 1/n_x, x + 1/n_x)$, $s \neq x$ platí nerovnost $f(x) > f(s)$. Označme $A_n = \{x \in J_1 : n_x = n\}$. Pak platí $J_1 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Protože $\mathbb{N}$ je spočetná, stačí ukázat, že každá A_n je nejvýše spočetná.

Dokážeme, že pro $x_1, x_2 \in A_n$, $x_1 \neq x_2$, je $|x_1 - x_2| \geq 1/n$. V opačném případě by totiž bylo $f(x_1) > f(x_2)$, protože $n_{x_1} = n$, a současně $f(x_2) > f(x_1)$, protože $n_{x_2} = n$, což je spor. Přiřaďme každému $x \in A_n$ otevřený interval $(x, x + 1/2n)$. Z předchozího vyplývá, že pro $x_1, x_2 \in A_n$, $x_1 < x_2$, je $(x_1, x_1 + 1/2n) \cap (x_2, x_2 + 1/2n) = \emptyset$. Množina těchto intervalů je proto nejvýše spočetná a tutéž vlastnost má tudíž i množina A_n. □

Předchozí věta neplatí pro neostré lokální extrémy. Funkce konstantní na intervalu má lokální extrém (současně neostré maximum i minimum) v každém bodě.

Věta D.48. *Nechť funkce f je konvexní na intervalu I. Pak množina všech bodů, v nichž neexistuje f', je nejvýše spočetná.*

Důkaz. Stačí se omezit na vnitřek I^o intervalu I. Podle věty D.30 derivace $f'(x)$ neexistuje právě tehdy, když je f'_+ v bodě x nespojitá. Dále z důsledku D.28 víme, že f'_+ je neklesající, takže podle věty D.44 má nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti. □

Poznamenejme ještě, že ke všem předchozím tvrzením lze najít funkce, které mají skutečně spočetně mnoho bodů s příslušnou vlastností. Funkce celých částí $\lfloor x \rfloor$ je neklesající a má body nespojitosti (prvního druhu) právě ve všech celých číslech. Riemannova funkce $\rho(x)$ má body odstranitelné nespojitosti právě v racionálních číslech — viz cvičení 13 ke kapitole 4. Funkce $\cos x$ má ostré lokální extrémy právě v bodech $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, které tvoří spočetnou množinu.

Příklad na konvexní funkci nám dá trochu více práce. Nechť $k > 1$. Definujme $f(x) = x$ pro $x \in [0, 1]$, $f(x) = 1 + k(x - 1)$ pro $x \in [1, 2]$, $f(x) = 1 + k + k^2(x - 2)$ pro $x \in [2, 3]$, $f(x) = 1 + k + k^2 + k^3(x - 3)$ pro $x \in [3, 4]$ atd. Graf je tvořen na sebe navazujícími úsečkami, jejichž směrnice se neustále zvětšují. Funkce je zřejmě konvexní. Přesně to ověříme takto. Označme $f_0(x) = x$, $f_n(x) = 1 + k + k^2 + \cdots + k^{n-1} + k^n(x - n)$, $x \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Tyto funkce jsou lineární, a proto jsou konvexní. Na intervalu $[0, n + 1]$ pak platí $f = \max\{f_0, f_1, \ldots, f_n\}$. Podle příkladu D.36 je f na tomto intervalu konvexní. Pro libovolné $x_1, x_2 \geq 0$ a $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, nyní zvolíme $n \in \mathbb{N}$ tak, aby $x_1, x_2 \leq n + 1$. Pak bude platit nerovnost $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$, což znamená, že f je konvexní na celém intervalu $[0, +\infty)$. Přitom f' neexistuje právě v přirozených číslech.

Množina bodů nespojitosti druhého druhu může být nespočetná. Např. Dirichletova funkce $\chi(x)$ má body nespojitosti druhého druhu v každém reálném čísle — viz str. 81.

Dále si všimneme vlastnosti, která je zesílením spojitosti na intervalu a která má mimo jiné důležitou roli v teorii vlastního Riemannova integrálu.

Definice D.49. Řekneme, že funkce f definovaná na intervalu J je na tomto intervalu *stejnoměrně spojitá*, jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ lze nalézt číslo $\delta > 0$ takové, že pro libovolné dva body $x, y \in J$, která mají vlastnost $|x - y| < \delta$, platí $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Zřejmě každá funkce stejnoměrně spojitá na intervalu J je na tomto intervalu i spojitá. Opak ale neplatí. Např. funkce $1/x$ je spojitá na intervalu $(0, 1)$. Není ale stejnoměrně spojitá. K číslu $\varepsilon = 1$ by totiž muselo existovat $\delta > 0$ tak, že pro $x, y \in (0, 1)$, $|x - y| < \delta$ by platilo $|1/x - 1/y| < 1$. To však není pravda, protože v sebemenším pravém okolí nuly lze najít x, y tak, že rozdíl $|1/x - 1/y|$ bude větší než 1. Zcela analogicky se ověří, že také funkce $\sin 1/x$ není stejnoměrně spojitá na tomtéž intervalu.

Jiná situace je, pokud je interval kompaktní. Platí totiž následující tvrzení.

Věta D.50 (Heineho-Cantorova věta). *Nechť funkce f je spojitá na ohraničeném uzavřeném intervalu $[a, b]$. Pak je funkce f na tomto intervalu spojitá stejnoměrně.*

Důkaz. Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Podle definice spojitosti (v krajních bodech jednostranné) lze ke každému $x \in [a, b]$ nalézt okolí $\mathscr{O}(x) = (x-\delta_x, x+\delta_x)$ takové, že pro $y \in \mathscr{O}(x) \cap [a, b]$ platí $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$. Systém okolí $\widehat{\mathscr{O}}(x) = (x - \delta_x/2, x + \delta_x/2)$ je otevřeným pokrytím kompaktního intervalu $[a, b]$. Podle Borelovy věty D.3 existuje konečné podpokrytí $\{\widehat{\mathscr{O}}(x_1), \dots, \widehat{\mathscr{O}}(x_n)\}$ takové, že $\bigcup_{i=1}^{n} \widehat{\mathscr{O}}(x_i) \supseteq [a, b]$. Položme $\delta = \min\{\delta_{x_1}/2, \dots, \delta_{x_n}/2\}$.

Nechť $x, y \in [a, b]$, $|x - y| < \delta$. Pak existuje $i \in \{1, \dots, n\}$ takové, že $x \in \widehat{\mathscr{O}}(x_i) = (x_i - \delta_{x_i}/2, x_i + \delta_{x_i}/2)$. Vzhledem k volbě čísla δ platí $y \in \mathscr{O}(x_i) = (x_i - \delta_{x_i}, x_i + \delta_{x_i})$. Platí $|f(x) - f(y)| = |f(x) - f(x_i) + f(x_i) - f(y)| \le |f(x) - f(x_i)| + |f(y) - f(x_i)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. K danému $\varepsilon > 0$ jsme tedy našli číslo $\delta > 0$ s požadovanou vlastností. □

Srovnejme definice spojitosti na intervalu a stejnoměrné spojitosti na intervalu. Spojitost na intervalu J znamená:

$$\forall \varepsilon > 0\, \forall x \in J\, \exists \delta > 0\, \forall y \in J : |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Stejnoměrná spojitost na intervalu J znamená:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x, y \in J : |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Rozdíl je tedy jen v pořadí kvantifikátorů. Zatímco u spojitosti číslo δ závisí na volbě ε ale také na výběru x (píšeme $\delta = \delta(\varepsilon, x)$), u s stejnoměrné spojitosti závisí jen na volbě ε (píšeme $\delta = \delta(\varepsilon)$), je tedy pro všechna x univerzální.

Věta D.51. *Nechť funkce f je spojitá na intervalu (a, b), $a, b \in \mathbb{R}$. Pak f lze spojitě rozšířit na interval $[a, b]$ (tj. existují vlastní jednostranné limity $\lim_{x\to a^+} f(x)$ a $\lim_{x\to b^-} f(x)$) právě tehdy, když je f na (a, b) stejnoměrně spojitá.*

Důkaz. Nutnost je zřejmá. Lze-li f spojitě rozšířit na $[a, b]$, je podle Heineho-Cantorovy věty f na $[a, b]$ a tudíž i na (a, b) stejnoměrně spojitá.

Ukážeme postačitelnost. Nechť tedy f je stejnoměrně spojitá na (a, b). K libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro $x, y \in (a, b)$, $|x - y| < \delta$, platí $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Zejména tato nerovnost platí na intervalu $(a, a + \delta$ resp. $(b - \delta, b)$. To však podle věty D.21 znamená, že v bodech a a b existují jednostranné limity funkce f. □

Tvrzení neplatí na neohraničeném intervalu. Např. funkce $\sin x$ (a podobně každá spojitá periodická funkce) je stejnoměrně spojitá na $\mathbb{R}$ a přitom limity pro $x \to \pm\infty$ neexistují. Srovnejte rovněž předchozí lemma s příklady za definicí D.49.

Na závěr si všimneme vlastnosti, kterou mají určité důležité množiny reálných funkcí.

Definice D.52. Funkce f definovaná na intervalu J se nazývá *darbouxovská* na J, má-li následující vlastnost: Pro každé dva body $x_1, x_2 \in J$ takové, že $f(x_1) < f(x_2)$, a pro každé číslo $c \in \big(f(x_1), f(x_2)\big)$ existuje bod ξ ležící uvnitř otevřeného intervalu s krajními body x_1 a x_2, v němž platí $f(\xi) = c$.

Darbouxovská funkce musí tedy s libovolnou dvojicí hodnot $f(x_1) < f(x_2)$ ze svého definičního oboru nabývat na intervalu s koncovými body x_1 a x_2 i všech mezilehlých hodnot.

Z Bolzanovy věty 4.35 vyplývá, že tuto vlastnost mají spojité funkce. Následující věta udává další třídu funkcí s touto vlastností.

Věta D.53 (Darbouxova věta). *Nechť funkce f má vlastní derivaci na intervalu J. Pak je funkce f' na J darbouxovská.*

Důkaz. Nechť $x_1, x_2 \in J$, $f'(x_1) < f'(x_2)$ (pokud jde o krajní body, jsou derivace jednostranné) a $c \in \big(f'(x_1), f'(x_2)\big)$. Nechť např. $x_1 < x_2$. Položme $g(x) = f(x) - cx$. Pak g má vlastní derivaci a platí $g'(x) = f'(x) - c$. Tedy g je spojitá na intervalu $[x_1, x_2]$ a podle Weierstrassovy věty nabývá na tomto intervalu své nejmenší hodnoty v bodě $\xi \in [x_1, x_2]$. Ukážeme, že ξ je vnitřní bod. Je totiž $g'(x_1) < 0$ a $g'(x_2) > 0$. Podle lemmatu 5.22 je g klesající v bodě x_1 a rostoucí v bodě x_2 (uvažujeme jednostranná okolí). Proto je $\xi \in (x_1, x_2)$. Podle věty 6.8 platí $g'(\xi) = 0$, a tedy $f'(\xi) = c$. □

Věta platí i v případě nevlastní derivace, pokud předpokládáme, že f je spojitá.

Příkladem funkce, která je darbouxovská, ale není spojitá, je funkce $f(x) = \sin 1/x$ pro $x \neq 0$, $f(0) = a$, kde $a \in [-1, 1]$. Pro $|a| > 1$ už darbouxovská není!

D.5. Obecná Taylorova věta

V kapitole 7 jsme zavedli Taylorův mnohočlen a uvedli jsme odhad chyby, které se dopustíme při náhradě funkce jejím Taylorovým mnohočlenem. Věta 7.8 je speciálním případem následujícího výsledku.

Věta D.54 (Taylorova věta). *Nechť funkce f má na otevřeném intervalu I vlastní derivace až do řádu $n+1$ pro některé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Nechť $x_0, x \in I$, $x_0 \neq x$ a nechť J je interval s koncovými body x_0 a x. Nechť φ je funkce, která je spojitá na intervalu J a která má nenulovou derivaci uvnitř J.*

Pak existuje číslo ξ ležící uvnitř J takové, že pro zbytek v Taylorově vzorci se středem v x_0 platí:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \cdot \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(\xi)} (x - \xi)^n. \tag{D.4}$$

Důkaz. Pro $t \in J$ položme

$$g(t) = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Funkce g je spojitá na J a platí $g(x) = 0$, $g(x_0) = R_n(x)$. Uvnitř J má g derivaci, přičemž

$$\begin{aligned} g'(t) = -f'(t) - \left(\frac{f''(t)}{1!}(x-t) - \frac{f'(t)}{1!}\right) - \left(\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 - 2\,\frac{f''(t)}{2!}(x-t)\right) - \\ - \cdots - \left(\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - n\,\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^{n-1}\right) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n. \end{aligned}$$

Funkce g a φ splňují na intervalu J předpoklady Cauchyovy věty 5.24. Tedy uvnitř J existuje číslo ξ tak, že platí $[g(x_0) - g(x)]\varphi'(\xi) = [\varphi(x_0) - \varphi(x)]g'(\xi)$. Podle předpokladu je $\varphi'(\xi) \neq 0$. Po osamostatnění $g(x_0)$ a dosazení za g dostaneme vztah (D.4). □

Důsledek D.55 (Lagrangeův tvar zbytku). *Nechť jsou splněny předpoklady o funkci f z věty* D.54*. Pak existuje číslo ξ ležící uvnitř J takové, že platí*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x - x_0)^{n+1}.$$

Důkaz. V předchozí větě položíme $\varphi(t) = (x - t)^{n+1}$. □

Důsledek D.56 (Cauchyův tvar zbytku). *Nechť jsou splněny předpoklady o funkci f z věty* D.54*. Pak existuje číslo ξ ležící uvnitř J takové, že platí*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\,(x - \xi)^n \cdot (x - x_0).$$

Důkaz. V předchozí větě položíme $\varphi(t) = t$. □

Cauchyův tvar bývá někdy vhodnější pro odhad velikosti zbytku než Lagrangeův tvar. Je tomu tak např. u Maclaurinova vzorce mocninné funkce $(1 + x)^a$.

*

Kdysi jsem zašel s jedním přítelem matematikem do čínské restaurace. Na jídelníčku bylo vytištěno: Veškeré služby navíc jsou účtovány zvlášť. Přítel podotkl: „Třetí i poslední slovo mohli klidně vynechat.“

*

Určitá auta hrkají. Moje auto je zcela určité. Není tedy divu, že hrká!

Historická poznámka

Počátky diferenciálního počtu jsou spjaty s pojmem nekonečně malé veličiny. Tento pojem se v náznaku objevuje již v antickém Řecku, kde byl užíván především k výpočtu ploch a objemů. Matematikové se k tomuto termínu vracejí opět ve středověku, kde byl Galileem poprvé použit v souvislosti s diferenciálním počtem k popisu volného pádu.

Vznik diferenciálního počtu lze datovat do 17. století. Toto století je obdobím zámořských objevů a také všeobecného rozvoje vzdělanosti, který se promítl rovněž do matematiky. Matematika je postupně obohacována o nové disciplíny, jako analytická geometrie nebo teorie pravděpodobnosti. Celé úsilí vrcholí zavedením ústředního pojmu matematiky — funkce — a vytvořením tzv. infinitesimálního počtu, což je souhrnné označení pro diferenciální a integrální počet.

Počátky diferenciálního počtu souvisí s potřebou řešit některé geometrické problémy. Mezi nejznámější patří úloha nalézt extrémy funkce, kterou řešil Fermat, a problém hledání tečny ke křivce, který uvádějí ve svých pracích Fermat, Barrow, ale i matematikové, kteří jsou považováni za vlastní autory diferenciálního a integrálního počtu — Newton a Leibniz.

Diferenciální počet si získal popularitu nejen pro nesmírnou důležitost svých aplikací, ale také díky několika historickým okolnostem spjatým s jeho vznikem a rozvojem. Nejznámější je bezesporu spor o autorství, který vzplál mezi Newtonem a Leibnizem a který nebyl během celého jejich života rozřešen. Podařilo se to až historii samé, která spravedlivě odměnila oba muže. V chápání podstaty derivace se totiž ujal Newtonův geometrický přístup, pro její formální vyjádření je však používán aparát Leibnizův.

O tom, že mnozí matematikové byli ješitní, svědčí i příklad dalšího z nich, Johanna Bernoulliho. Ten se proslavil zejména příhodou s L'Hôpitalem, který jej požádal, aby mu osvětlil metody kalkulu. Na základě těchto lekcí sestavil L'Hôpital první učebnici analýzy, z níž nejznámější se stalo L'Hôpitalovo pravidlo, užívané i dnes pod tímto názvem. Přestože se v knize objevilo poděkování Bernoullimu, cítil se Johann být podveden.

Záhy po vybudování diferenciálního počtu se objevily pochybnosti o jeho korektnosti. Byl totiž vystavěn na pojmu nekonečně malé veličiny, jehož podstata byla chápána pouze intuitivně. Přesně nebyla definována ani pravidla pro počítání s nekonečně malými veličinami.

Chatrné základy této disciplíny vedly k sílící kritice nejen ze strany matematiků. Situace se stala tak vážnou, že vstoupila do dějin jako druhá krize matematiky. Bylo tedy nutno výstavbu diferenciálního počtu zpřesnit a položit na rozumné základy. To se podařilo o téměř 130 let později Cauchymu, který roku 1820 zavedl pojem limity. Proces zpřesňování základů matematické analýzy posléze dokončil Weierstrass, který vybudoval dodnes užívaný „$\varepsilon - \delta$ jazyk“ moderní analýzy.

Jak tedy můžeme vidět, historický vývoj postupoval zcela opačně, než postupují studenti při studiu analýzy dnes. Nejprve byly položeny základy integrálního počtu, poté základy diferenciálního počtu a ještě o více než 130 let později se objevil pojem limity, dnes ústřední pojem analýzy.

V následujícím přehledu jsou uvedeni matematikové, jejichž jména jsou zmíněna v nějaké souvislosti v tomto skriptu.

Isaac Barrrow (1630–1677), anglický matematik

Jacob Bernoulli (1654–1705), švýcarský matematik

Johann Bernoulli (1667–1748), švýcarský matematik

Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781–1848), český matematik, filosof a teolog

Félix Edouard Justin Emile Borel (1871–1956), francouzský matematik

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845–1918), německý matematik

Constantin Carathéodory (1873–1950), řecký matematik

Augustin Louis Cauchy (1789–1857), francouzský matematik

Jean Gaston Darboux (1842–1917), francouzský matematik

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859), německý matematik

Leonhard Euler (1707–1783), švýcarský matematik, fyzik, mechanik a astronom

Pierre de Fermat (1601–1665), francouzský matematik

Galileo Galilei (1564–1642), italský matematik a fyzik

Heinrich Eduard Heine (1821–1881), německý matematik

Guillaume François Antoine Marquis de L'Hôpital (1661–1704), francouzský matematik

Johann Ludwig William Valdemar Jensen (1859–1925), dánský matematik

Joseph-Louis Lagrange (1736–1813), francouzský matematik a mechanik

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), německý matematik, právník a diplomat

Colin Maclaurin (1698–1746), skotský matematik

Isaac Newton (1643–1727), anglický matematik a fyzik

Giuseppe Peano (1858–1932), italský matematik

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866), německý matematik

Michel Rolle (1652–1719), francouzský matematik

Bertrand Arthur William Russell (1872–1970), britský matematik, logik a filosof

Brook Taylor (1685–1731), anglický matematik

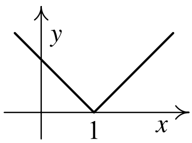
Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897), německý matematik

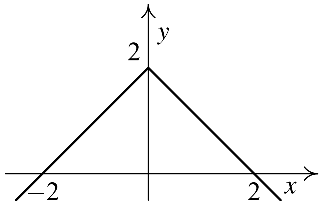
Řadu zajímavých údajů o vzniku základních pojmů diferenciálního počtu a další informace z historie této matematické disciplíny lze nalézt v [21].

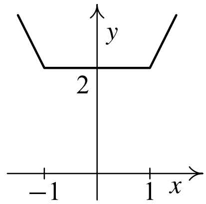
Na závěr upozorněme na nejednoznačnost ve psaní jména L'Hôpital. Podle některých historických pramenů se píše tak, jak jsme právě uvedli. Podle jiných se píše L'Hospital resp. l'Hospital. V českých učebnicích (ale ne jen v nich) se ustálila poslední uvedená podoba, kterou jsme v textu užívali i my.

Výsledky cvičení

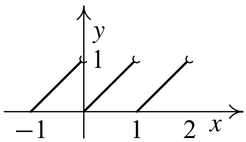
Kapitola 1. Pojem funkce

1\. a) 

b) 

c) 

2\. a) $(-1/2, 3/2)$, b) $(-1, 5)$, c) $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

3\. a) 

Je periodická s nejmenší periodou 1.
b) $\chi(\chi(x)) = 1$, $x \in \mathbb{R}$, graf je přímka. Je periodická a nemá nejmenší periodu.

4\. a) ano, b) ne, např. $\left|\left\lfloor -\frac{1}{2} \right\rfloor\right| \neq \left\lfloor \left|-\frac{1}{2}\right| \right\rfloor$.

5\. Je $f(x) = f_s(x) + f_l(x)$, kde $f_s(x) = (f(x) + f(-x))/2$ je sudá funkce a $f_l(x) = (f(x) - f(-x))/2$ je lichá funkce.

6\. Kdyby $\omega_0 > 0$ byla nejmenší perioda a $\omega_1 > \omega_0$ byla perioda, která není jejím celočíselným násobkem, pak by číslo $\omega_1 - \left\lfloor \frac{\omega_1}{\omega_0} \right\rfloor \cdot \omega_0$ byla perioda menší než ω_0, což je spor.

7\. Pokud $0 \in D(f)$, pak $f(0) = -f(0)$ a odtud přímo $f(0) = 0$.

8\. Existuje: $f(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

9\. a) ani sudá ani lichá, b) lichá, c) ani sudá ani lichá, d) sudá, e) lichá.

10\. a) $y = \frac{1+5x}{2-3x}$, b) $y = \log_{10} x + 3$, c) $y = \frac{1}{x}$.

Kapitola 2. Posloupnosti

1. a) Např. $a_n = b_n = 1/n$, b) Např. $a_n = 1/n$, $b_n = 1/n^2$.

2. a) $1/(2\sqrt{a})$, b) -1, c) -1.

3. a) 1, b) 1, c) 0, d) $3/4$, e) 6, f) 2.

4. a) $2, -2$, b) $2, 0$, c) $0, \infty$, d) $-2, 2$,
e) $0, 1$, f) $-\infty, +\infty$, g) $-\infty, +\infty$, h) $0, 2$.

5. a) Limita existuje a rovná se $1/3$.
b) Limita neexistuje, posloupnost má hromadné body 0 a $\pm 1/2$.

6. Kdyby $\omega \notin G_f$, existovala by klesající posloupnost $\{\omega_n\} \subseteq G_f$ taková, že $\omega_n \to \omega$ pro $n \to \infty$. Konvergentní posloupnost je ale cauchyovská, takže rozdíl $\omega_m - \omega_n$, $n > m$, je pro velká m, n menší než ω. Avšak $\omega_m - \omega_n$ je perioda, což je spor.

Kapitola 3. Elementární funkce

1. a) $P(x) = (x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

$(-\infty, -1)$	$(1, 1)$	$(1, \infty)$
$+$	$-$	$+$

b) $P(x) = (x^2+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)(x^2+\sqrt{3}x+1)$, $P(x) > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$,

c) $P(x) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$

$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$+$	$-$	$+$

2. $P(x) = (x^2+4)(x+1)(x-2)$

$(-\infty, -1)$	$(-1, 2)$	$(2, \infty)$
$+$	$-$	$+$

3. a) $R(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 13 + \frac{-19x+53}{x^2-2x+4}$,
b) $R(x) = x^3 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9} + \frac{5}{9(3x+2)}$, c) $R(x) = -4 + \frac{23-2x}{x^2-3x+6}$,
d) $R(x) = 3x^2 + 3 + \frac{-6x^2+5x-8}{x^3-x+1}$, e) $R(x) = 2x^2 - 3 + \frac{x^2-x+1}{x^4-3x^2+2x-1}$.

4. a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, -\sqrt{2}, 1/3, \sqrt{2}, 5\}$

$(-\infty, -3)$	$(-3, -2)$	$(-2, -\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}, 0)$	$(0, \frac{1}{3})$	$(\frac{1}{3}, \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, \frac{3}{2})$	$(\frac{3}{2}, 5)$	$(5, \infty)$
$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

b) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}$

$(-\infty, -3)$	$(-3, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

c) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 3\}$

$(-\infty, -3)$	$(-3, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 2)$	$(2, 3)$	$(3, +\infty)$
$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$

d) $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$(-\infty, -3)$	$(-3, -1)$	$(-1, 2)$	$(2, +\infty)$
$-$	$+$	$-$	$+$

e) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$(-\infty, -3)$	$(-3, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
$-$	$+$	$-$	$-$	$+$

f) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$

$(-\infty, -3)$	$(-3, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$-$	$+$	$-$	$+$	$+$

5. a) $\dfrac{2}{x-2} + \dfrac{3}{x+2} - \dfrac{1}{x+3}$, b) $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x} + \dfrac{2x-3}{x^2-x+2}$,

c) $\dfrac{x}{x^2+1} - \dfrac{2}{(x-1)^2}$, d) $\dfrac{3}{x-1} + \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{4}{x}$,

e) $\dfrac{3}{x+2} + \dfrac{-x+3}{x^2+x+1}$, f) $\dfrac{x}{(x^2+1)^2} - \dfrac{1}{x^2+1} + \dfrac{1}{x}$.

6. $P(x) = -2x^5 + 8x^4 - 26x^3$

$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$+$	$-$

8. $D = \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, je sudá a periodická s nejmenší periodou π.

9. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, funkce je periodická s nejmenší periodou π a $f(x) = x$ pro $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

10. Ve všech případech je $f(x) = x$, liší se jen definiční obory:

a) $[-1, 1]$, b) $[-1, 1]$, c) $\mathbb{R}$, d) $\mathbb{R}$.

11. a) není periodická, b) π, c) není periodická, d) není periodická.

12. a) 4π, b) 2π, c) 6π, d) 2π, e) 6π.

13. a) $[1/3, 1]$, b) $[-3/2, 5/2]$, c) $(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$, d) $[-1, 3]$,
e) $(1, 2]$, f) $(1, 5]$, g) $(3/2, 11]$, h) $[2, 3]$,
i) $[-9/2, 3/2]$, j) $[-1/3, 1]$, k) $[-1, 1]$, l) $[3, 4]$.

14. a) $\left[\frac{1-\pi}{3}, \frac{1}{3}\right]$, $f^{-1}\colon y = \frac{1}{3}\left(1 - \arccos\frac{x}{2}\right)$, $D(f^{-1}) = [-2, 2]$,
b) $\left(\frac{4-\pi}{10}, \frac{4+\pi}{10}\right)$, $f^{-1}\colon y = \frac{1}{5}\left(2 + \operatorname{arctg}(x-2)\right)$, $D(f^{-1}) = (-\infty, +\infty)$,
c) $[0, 1]$, $f^{-1}\colon y = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{x-3}{4}\right)$, $D(f^{-1}) = [3, 3+4\pi]$,
d) $\mathbb{R}$, $f^{-1}\colon y = 2 + \operatorname{cotg}(2-x)$, $D(f^{-1}) = (2-\pi, 2)$,
e) $\left[\frac{1}{3} - \frac{\pi}{6}, \frac{1}{3} + \frac{\pi}{6}\right]$, $f^{-1}\colon y = \frac{1}{3}(1 + \arcsin x$, $D(f^{-1}) = [-1, 1]$,
f) $\mathbb{R}$, $f^{-1}\colon y = \frac{1}{3}\left(4 + \operatorname{tg}(x-1)\right)$, $D(f^{-1}) = (1 - \frac{\pi}{2}, 1 + \frac{\pi}{2})$
g) $\left[-\frac{1}{2}, \pi - \frac{1}{2}\right]$, $f^{-1}\colon y = \frac{1}{2}\left(-1 + \arccos(2x-3)\right)$, $D(f^{-1}) = [1, 3]$,
h) $(-\infty, 2/3)$, $f^{-1}\colon y = (2 - \mathrm{e}^x)$, $D(f^{-1}) = \mathbb{R}$,

i) $\mathbb{R}$, $f^{-1}\colon y = \ln\sqrt{x^2-2x-2}$, $D(f^{-1}) = (1+\sqrt{3}, +\infty)$,
j) $\mathbb{R}$, $f^{-1}\colon y = \ln\frac{4x-4}{x+1}$, $D(f^{-1}) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$,
k) $(-\infty, 5/2)$, $f^{-1}\colon y = \frac{5-\mathrm{e}^x}{2}$, $D(f^{-1}) = \mathbb{R}$,
l) $(-\infty, \ln 3]$, $f^{-1}\colon y = \ln(3-x^2)$, $D(f^{-1}) = [0, \sqrt{3})$,
m) $\mathbb{R}$, $f^{-1}\colon y = \ln\frac{2}{x-1}$, $D(f^{-1}) = (1, +\infty)$,
n) $\left[\frac{5}{4}, \frac{5+2\pi}{4}\right]$, $f^{-1}\colon y = \frac{1}{2}\arccos(x+3) + \frac{5}{4}$, $D(f^{-1}) = [-4, -2]$,
o) $[-2, 2]$, $f^{-1}\colon y = 2\cos\frac{x}{3}$, $D(f^{-1}) = [0, 3\pi]$,
p) $(-\infty, 0]$, $f^{-1}\colon y = -\sqrt{x}$, $D(f^{-1}) = [0, +\infty)$.

15. a) $\sqrt{1-x^2}$, b) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

16. *Návod:* Položte $u = \operatorname{arctg} x$, $v = \operatorname{arccotg}\frac{1}{x}$ a upravujte podobně jako v příkladu 3.19.

17. a) lichá, b) lichá, c) sudá, d) sudá.

18. a) $D(\sinh) = D(\cosh) = D(\operatorname{tgh}) = \mathbb{R}$, $D(\operatorname{cotgh}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
b) cosh je sudá, ostatní jsou liché,
c) $\operatorname{argsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, $x \in \mathbb{R}$,
$\operatorname{argcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$, $x \in [1, +\infty)$,
$\operatorname{argtgh} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$, $x \in (-1, 1)$,
$\operatorname{argcotgh} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$, $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$,
d) Funkce argcosh není ani sudá, ani lichá, ostatní jsou liché.

Kapitola 4. Limita a spojitost funkce

1. a) $1/3$, b) $2/3$.

2. e^a

3. a) 6, b) 4, c) $-1/12$.

4. a) $-\infty$, $+\infty$, b) -1, 1.

5. a) 0, b) 0, c) $1/2$, d) $(a+b)/2$,
e) $\sqrt{2}/2$, f) $2/3$, g) 1, h) 2.

6. $f(1) = 2/3$.

7. Pouze v bodě $x = 0$.

8. Použitím věty 4.11 vyjde, že $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

9. a) Odstranitelná nespojitost, b) nespojitost druhého druhu, c) nespojitost prvního druhu, d) nespojitost prvního druhu (jednostranné limity jsou 1 a -1).

10. Plyne z rovností $\big||f(x)| - 0\big| = |f(x)| = |f(x) - 0|$.

11. a) $\operatorname{arctg} x$, $H(f) = [0, \pi/2)$, b) $\sin x \cdot \operatorname{arctg} x$, $H(f) = (-\pi/2, \pi/2)$.

12. Nechť $x_0, x_1 \in D(f)$, např. $x_1 < x_0$, f je spojitá v x_0 a $f(x_0) \neq f(x_1)$. Je-li $\inf G_f = 0$, existují libovolně malé kladné periody. Pak je možné sestrojit posloupnost period $\{\omega_n\}$ tak, že $\omega_1 < \omega_2 < \cdots \to x_0 - x_1$, tj. $x_1 + \omega_n \to x_0$, a proto podle věty D.15 dodatku $f(x_1 + \omega_n) \to f(x_0)$. Ale $f(x_1 + \omega_n) = f(x_1)$ je konstantní posloupnost, takže $f(x_0) = f(x_1)$, což je spor.

13. Platí $\lim\limits_{x\to x_0} \rho(x) = 0$ pro každé $x_0 \in \mathbb{R}$. Tedy $\rho(x)$ je spojitá v iracionálních číslech a má odstranitelné nespojitosti v racionálních číslech. Limita se určí následovně: Pro $0 < \varepsilon < 1$ označme M_ε množinu všech $x \in (x_0 - 1, x_0 + 1) \cap \mathbb{Q}$, pro něž $\rho(x) \geq \varepsilon$. Tato množina je konečná (hodnota 1 se nabývá nejvýše dvakrát, hodnota $1/2$ nejvýše třikrát atd.) Označme $\delta = \min\{|x_0 - x| : x \in M_\varepsilon, x \neq x_0\}$. Pak $\delta > 0$ a pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$, je $|\rho(x)| < \varepsilon$.

14. a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sinh x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cosh x - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tgh} x}{x} = 1$,

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sinh x = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \cosh x = +\infty$,

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \operatorname{tgh} x = \pm 1$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \operatorname{cotgh} x = \pm 1$, $\lim\limits_{x\to 0^\pm} \operatorname{cotgh} x = \pm\infty$.

15. $f(x) = x \cos \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$, $x \in [-\pi, \pi]$.

16. Ve všech případech je to možné.

a) $x = 0$, $f = \operatorname{sgn}$, $g = 0$, b) $x = 0$, $f = 0$, $g = \operatorname{sgn}$,

c) $x = 0$, $f(0) = 0$, $f(x) = 1$ jinak, $g(0) = g(1) = 0$, $g(y) = 1$ jinak.

17. Platí $\max\{f, g\} = 1/2(f + g + |f - g|)$ a $\min\{f, g\} = 1/2(f + g - |f - g|)$. Tvrzení plyne z vět 4.21 a 4.22.

Kapitola 5. Derivace funkce

1. a) $y = -\frac{1}{2}x + 1$, $y = 2x - \frac{3}{2}$, b) $y = 1$, $x = 0$,
   c) $y = 2x - \frac{\pi}{2} + 2$, $y = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{8} + 2$, d) $x = 1$, $y = 1$.

2. $y = -\frac{1}{2}x$, $y = 2x$.

3. a) $\dfrac{x \ln 10 \log x - (1 + x^2) \operatorname{arctg} x}{(x + x^3) \ln 10 \log^2 x}$, b) $\dfrac{e^x (1 + x - x^2 + x^3)}{(1 + x^2)^2}$,
   c) $\dfrac{x(2x \operatorname{arctg} x + 1) \ln x - (x^2 + 1) \operatorname{arctg} x}{x \ln^2 x}$, d) $\dfrac{e^x}{\sqrt{1 + e^{2x}}}$,
   e) $\sqrt{\dfrac{x}{2 - x}}$, f) $\dfrac{-1}{\sqrt{x^2 - 1}}$, g) $\dfrac{\sqrt{1 + x}}{x}$, h) $x \operatorname{arctg} x$,
   i) $\dfrac{x e^x}{2\sqrt{1 + e^x}}$, j) $\dfrac{4x}{(x + 1)(x^2 + 1)^2}$, k) $\sqrt{\dfrac{a - x}{x}}$, l) $\dfrac{-e^x}{(1 + e^x)\sqrt{1 - e^{2x}}}$.

4. a) $2\sqrt{1 - x^2}$, $D(f) = [-1, 1]$, $D(f') = (-1, 1)$,
   b) $\dfrac{4 - 3x}{2\sqrt{2 - x}} + \dfrac{1}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}$, $D(f) = [-1, 2]$, $D(f') = (-1, 2)$.

5. a) $\cosh x$, $x \in \mathbb{R}$, b) $\sinh x$, $x \in \mathbb{R}$, c) $\dfrac{1}{\cosh^2 x}$, $x \in \mathbb{R}$,
   d) $\dfrac{1}{\sinh^2 x}$, $x \neq 0$, e) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$, $x \in \mathbb{R}$, f) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$, $x > 1$,
   g) $\dfrac{1}{1 - x^2}$, $|x| < 1$, h) $\dfrac{1}{1 - x^2}$, $|x| > 1$.

6. a) $e^{-\frac{2}{\pi}}$, b) $\frac{1}{2}$, c) $\frac{1}{6}$, d) $\frac{1}{2}$, e) 0,
   f) 0, g) 1, h) 1, i) e^3, j) 0.

7. a) 1, b) 0, c) $+\infty$, d) e.

8. Důkaz se provede úplnou indukcí.

9. Pro x z daného ryzího pravého okolí je podle Lagrangeovy věty (předpoklady jsou splněny) $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c)$, kde $c = c(x)$ a $x_0 < c(x) < x$. Pro $x \to x_0^+$ tedy $c(x) \to x_0^+$, takže platí $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c) \to K$.

10. a) Podle předchozího cvičení nemůže mít vlastní derivace bod nespojitosti prvního druhu.
    b) $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ pro $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

Kapitola 6. Průběh funkce

Označme $M(x, y)$ resp. $m(x, y)$ lokální maximum resp. minimum v bodě (x, y).

1. $2a$.

2. $S_{\max} = \frac{av}{4}$.

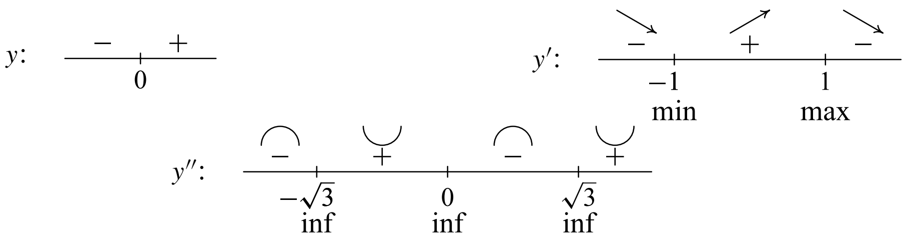
3. Rozměry trojúhelníka: $a = r\sqrt{3}$, $v = \frac{3r}{2}$, kde a je základna a v výška.

4. a) $m(-2, 1)$, b) $m(2, -22)$, $M(-2, 10)$, c) nejsou,
   d) $M(1, 1)$, $m(0, 0)$, $m(2, 0)$, e) $M(0, 1)$, $m(-1, 0)$, $m(1, 0)$,
   f) $M(0, 3)$, g) $m(1, \mathrm{e})$.

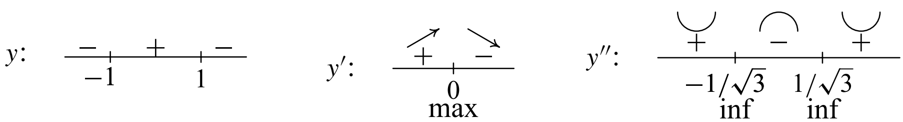
5. a) $M(1, 2)$, $m(-2, -151)$, b) $M(\mathrm{e}, \mathrm{e}^2)$, $m(1, 0)$.

6. a) konvexní na $\mathbb{R}$, inflexe není,
   b) konkávní na $(-\infty, 2/3)$, konvexní na $(2/3, +\infty)$, inflexe v $x = 2/3$,
   c) konvexní na $(-\infty, -1/3\sqrt{3})$ a $(1/3\sqrt{3}, +\infty)$, konkávní na $(-1/3\sqrt{3}, 0)$ a $(0, 1/3\sqrt{3})$, inflexe v $x = -1/3\sqrt{3}$ a $x = 1/3\sqrt{3}$,
   d) konvexní na $(-\sqrt{3}, 0)$ a $(\sqrt{3}, +\infty)$, konkávní na $(-\infty, -\sqrt{3})$ a $(0, \sqrt{3})$, inflexe v $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ a $x = \sqrt{3}$,
   e) konvexní na $(-\sqrt{3}, 0)$ a $(\sqrt{3}, +\infty)$, konkávní na $(-\infty, -\sqrt{3})$ a $(0, \sqrt{3})$, inflexe v $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ a $x = \sqrt{3}$.

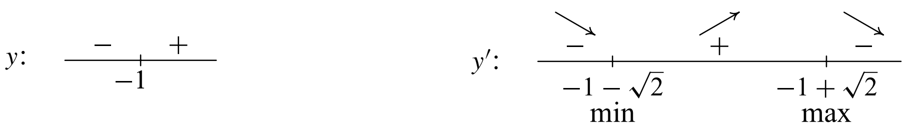
7. a) $D = \mathbb{R}$, lichá, asymptota $y = 0$, graf viz obr. 1.4 a).

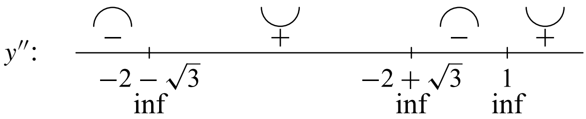


   b) $D = \mathbb{R}$, sudá, asymptota $y = -1$, graf viz obr. 1.4 b).

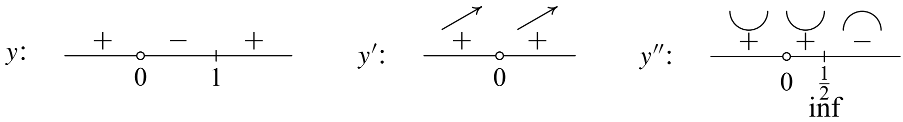


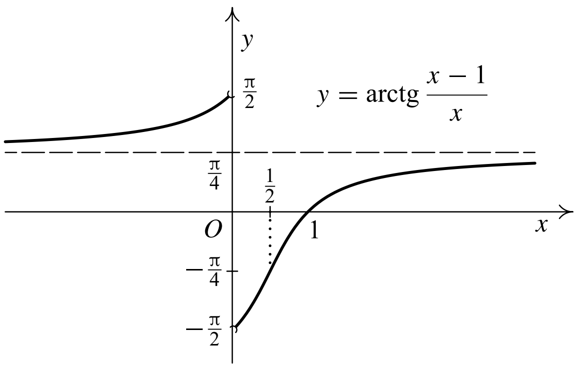
   c) $D = \mathbb{R}$, asymptota $y = 0$, graf viz obr. 1.4 c).



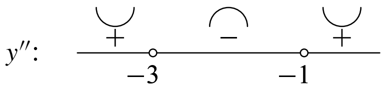


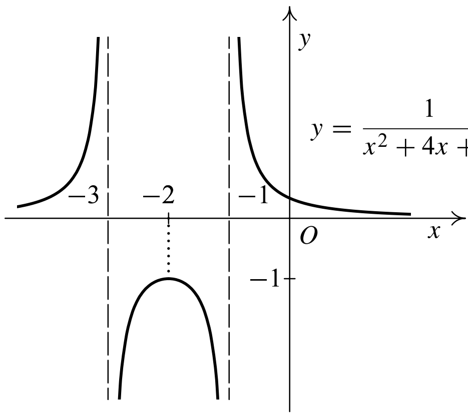
d) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, asymptota $y = \frac{\pi}{4}$.





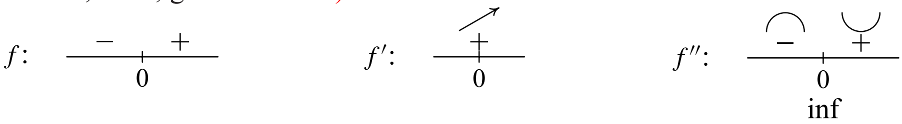
e) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, -1\}$, asymptoty $x = -3$, $x = -1$, $y = 0$.



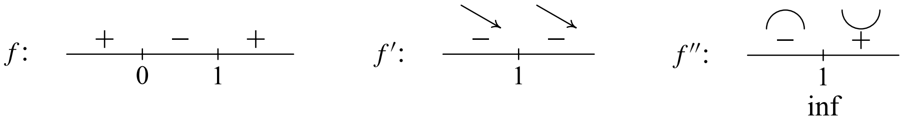


8. a) $x = 2,\ y = 3x$, b) $x = -1,\ x = 1,\ y = x$, c) $x = -1,\ x = 1,\ y = 0$, d) $x = 0,\ y = x$, e) $y = x + 4/3$, f) $x = -1/\mathrm{e},\ y = x + 1/\mathrm{e}$.

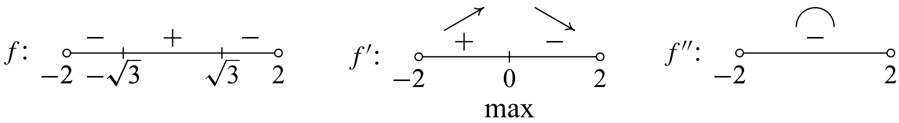
9. a) $D = \mathbb{R}$, lichá, graf obr. V.1 a).



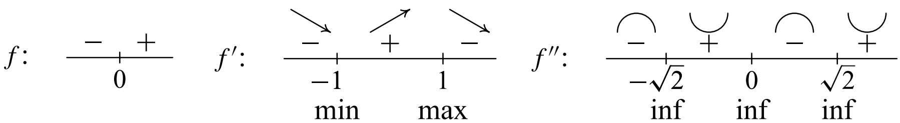
b) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, asymptoty $x = 1$, $y = 1$, graf obr. V.1 b).



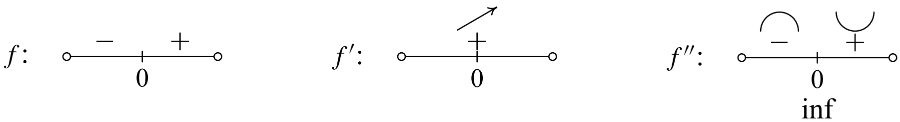
c) $D = (-2, 2)$, sudá, asymptoty $x = -2$, $x = 2$, graf obr. V.1 c).



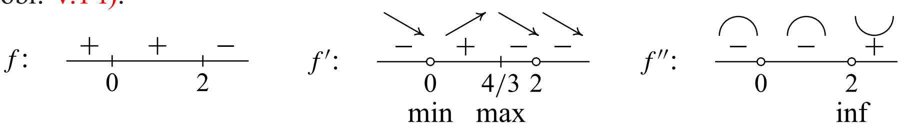
d) $D = \mathbb{R}$, lichá, asymptota $y = 0$, graf obr. V.1 d).



e) $D = (-1, 1)$, lichá, asymptoty $x = -1$, $x = 1$, graf obr. V.1 e).



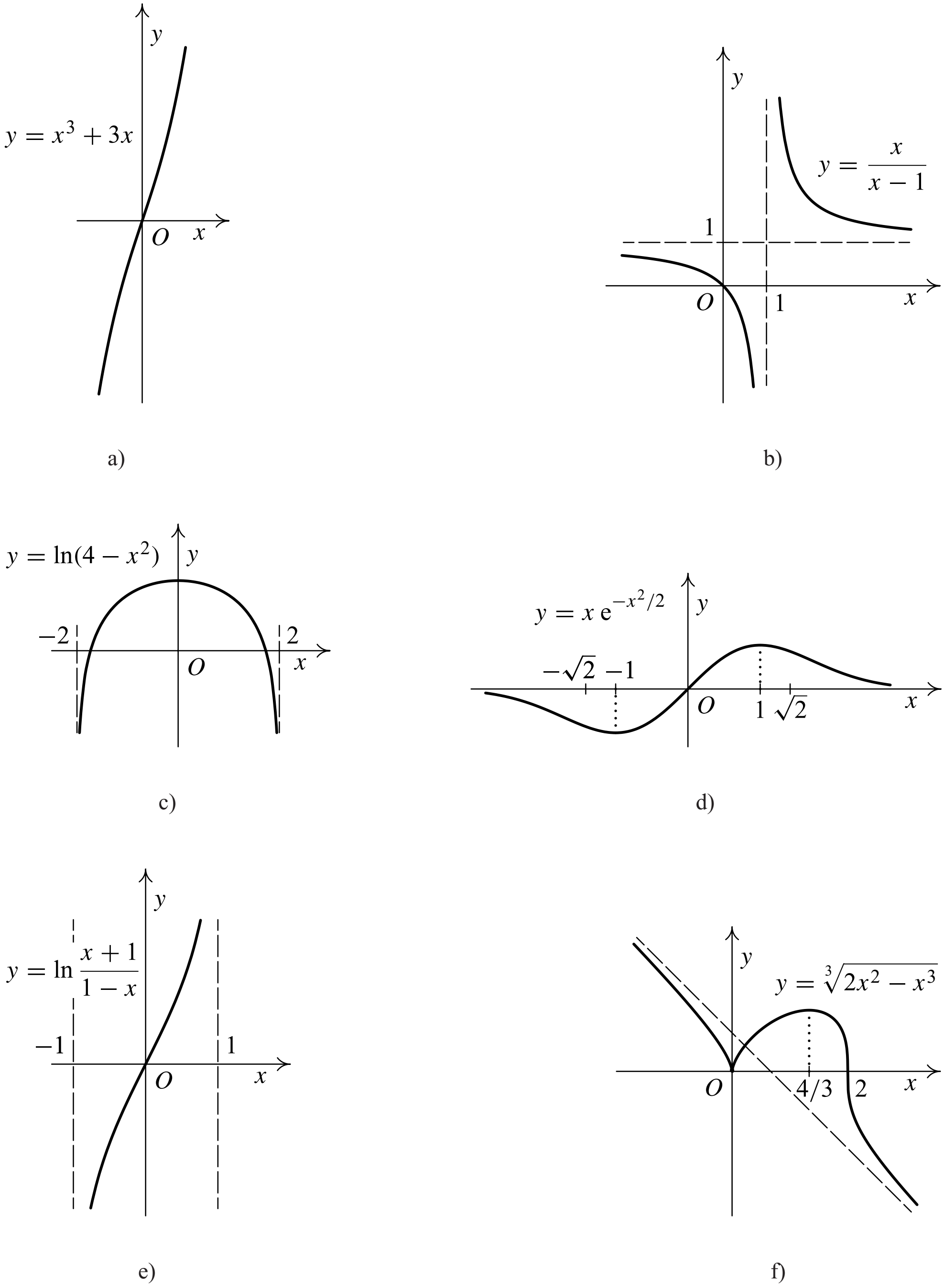
f) $D = \mathbb{R}$, asymptota $y = -x + 2/3$, $f'_{\pm}(0) = \pm\infty$, $f'(2) = -\infty$, graf obr. V.1 f).



10. Funkce je lichá, takže stačí ověřit pro $x > 0$. Protože $1/x$ je klesající, je $f(x)$ monotonní na $(0, \delta)$, $\delta > 0$ právě tehdy, když $g(x) = f(1/x)$ je monotonní na $(1/\delta, +\infty)$. Je

$$g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2 + \cos x}{x} \qquad \Rightarrow \qquad g'(x) = \frac{-x \sin x - 2 - \cos x}{x^2}.$$

O znaménku derivace rozhoduje spojitá funkce $h(x) = -x \sin x - 2 - \cos x$. Označme $x_n = \pi/2 + 2\pi n$, $y_n = -\pi/2 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{N}$. Po dosazení dostaneme, že $h(x_n) = -2\pi n - 2 \to -\infty$ a $h(y_n) = 2\pi n - 2 \to +\infty$ pro $n \to \infty$. Tedy



$y = x^3 + 3x$
y
O
x
a)
$y = \frac{x}{x-1}$
y
1
O
1
x
b)
$y = \ln(4 - x^2)$
y
-2
2
O
x
c)
$y = x\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$
y
$-\sqrt{2}$
-1
O
1
$\sqrt{2}$
x
d)
$y = \ln\frac{x+1}{1-x}$
y
-1
1
O
x
e)
$y = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}$
y
O
$4/3$
2
x
f)

Obr. V.1

pro libovolně velká x nabývá $g'(x)$ jak kladné tak záporné hodnoty, a tudíž g není monotonní na žádném intervalu $(1/\delta, +\infty)$.

Kapitola 7. Přibližné vyjádření funkce

1. a) $\cos 61° \doteq 0{,}4849$, b) $e^{1{,}2} \doteq e \cdot 1{,}2 \doteq 3{,}26194$, c) $\sin 32° \doteq 0{,}53022$.

2. a) $\frac{\pi}{4} - 0{,}005$, b) $5{,}3$, c) $9{,}\bar{2}$.

4. a) $\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x)$,
   kde $R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^{n+2}}{n+1}\,\frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}}$,
   b) $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} - R_{n+1}(x)$,
   kde $R_{n+1}(x) = \frac{1}{(1+\xi)^{n+1}}\,\frac{x^{n+1}}{n+1}$.

5. $T_{2n}(x) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)$.

6. $\ln 2 \doteq 0{,}693134$ $(x = \frac{1}{3})$, $\ln 3 \doteq 1{,}096586$ $(x = \frac{1}{2})$.

7. a) $T_3(x) = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3$,
   b) $T_3(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3}$,
   c) $T_2(x) = 1 - x^2$, d) $T_2(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{(x-\frac{\pi}{2})}{2} - \frac{(x-\frac{\pi}{2})^2}{8}\right)$.

8. a) $f(x) = (x-1)^3 + 3(x-1)^2 + (x-1) + 4$,
   b) $f(x) = (x-2)^4 + 8(x-2)^3 + 21(x-2)^2 + 10(x-2) - 5$.

9. a) $T_3(x) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3$, b) $T_3(x) = 2x + \frac{2}{3}x^3$.

10. $-\frac{1}{2}$. *Nápověda:* Převeďte na společného jmenovatele, jmenovatele „nahraďte“ funkcí ekvivalentní (uvažte, že $\sin x \sim x$, $x \to 0$ a $e^x - 1 \sim x$, $x \to 0$) a v čitateli použijte Maclaurinovy rozvoje funkcí $\sin x$ a e^x.

11. Úhly určené podle tabulky hodnot tg jsou určené přesněji než pomocí hodnot sin. *Nápověda:* Pro diferenciál funkce $\alpha = \alpha_t = \operatorname{arctg} z$ platí $|d\alpha_t| = \cos^2\alpha\,|dz|$, pro funkci $\alpha = \alpha_s = \arcsin y$ platí $|d\alpha_s| = \frac{1}{|\cos\alpha|}|dy|$. Protože $\cos^2\alpha \le \frac{1}{|\cos\alpha|}$, je $|d\alpha_t| \le |d\alpha_s|$.

Literatura

[1] Balcar, B. – Štěpánek, P.: *Teorie množin*. Academia, Praha 1986.

[2] Barvínek, E.: *Calculus* (rukopis). Knihovna sekce matematiky, Přírodovědecká fakulta MU v Brně, Brno 1999.

[3] Berman G. N.: *Sbornik zadač po kursu matematičeskogo analiza*. Sedmnácté vydání. Nauka, Moskva 1971.

[4] Birkhoff, G. – Mac Lane, S.: *Prehľad modernej algebry*. Alfa, Bratislava 1979.

[5] Demidovič B. P.: *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*. Fragment, 2003.

[6] Došlá, Z. – Došlý, O. : *Metrické prostory*. Druhé vydání. Přírodovědecká fakulta MU v Brně, Brno 2000.

[7] Fichtengoľc, G. M.: *Kurs differencialňogo i integralňogo isčislenija, díl I*. Sedmé vydání. Nauka, Moskva 1969.

[8] Fichtengoľc, G. M.: *Kurs differencialňogo i intěgralňogo isčislenija, díl II*. Sedmé vydání. Nauka, Moskva 1969.

[9] Fuchs, E.: *Teorie množin pro učitele*. První vydání. Masarykova univerzita, Brno 1999.

[10] Fuchsová, L.: *Matematická analýza I., Diferenciální počet funkcí jedné proměnné*. SPN Praha 1988.

[11] Horák, P.: *Algebra a teoretická aritmetika II*. Druhé vydání. Přírodovědecká fakulta MU v Brně, Brno 1993.

[12] Horák, P.: *Základy matematiky*. Přírodovědecká fakulta MU v Brně, vyjde.

[13] Jarník, V.: *Diferenciální počet (I)*. Academia, Praha 1974.

[14] Jarník, V.: *Integrální počet (I)*. Academia, Praha 1974.

[15] Kosmák, L.: *Základy matematickej analýzy*. Alfa, Bratislava 1985.

[16] Kuroš, A. G.: *Kapitoly z obecné algebry*. Academia, Praha 1968.

[17] Novák, V.: *Diferenciální počet v* $\mathbb{R}$. Druhé vydání. Přírodovědecká fakulta MU v Brně, Brno 1997.

[18] Postnikov, M. M.: *Teorija Galua*. FIZMATGIZ, Moskva 1963.

[19] Švec, M. – Šalát, T. – Neubrunn, T.: *Matematická analýza funkcií reálnej premennej*. Alfa, Bratislava 1987.

[20] Vanžura J.: *Řešené příklady z matematické analýzy*. Třetí, upravené vydání. Nakladatelství Karolinum, Praha 2003.

[21] Veselý, J.: *Matematická analýza pro učitele 1, 2*. Druhé vydání. MATFYZPRESS, Praha 2001.

Rejstřík

Diferenciální počet funkcí jedné proměnné

Doc. RNDr. Zuzana Došlá, CSc.

Doc. RNDr. Jaromír Kuben, CSc.

Vydala Masarykova univerzita v Brně roku 2004

První dotisk prvního vydání, 2004
Vysázeno systémem LaTeX 2ε
Tisk: Grafex Blansko
215 stran
13,64 AA – 13,72 VA

Náklad 500 výtisků
Pořadové číslo 4041/Př-9/04-17/31
ISBN 80-210-3121-2
Doporučená cena 120,– Kč

Tato publikace neprošla redakční ani
jazykovou úpravou v redakci nakladatelství