

KVADRATICKÁ KALIBRACE

Petra Širůčková,
prof. RNDr. Gejza Wimmer, DrSc.

Finanční matematika v praxi III. a Matematické modely a aplikace

4. 9. 2013



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



AMathNet
sít pro transfer znalostí v aplikované matematice

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Osnova

- 1 Kalibrace
 - Pojem kalibrace
 - Cíle kalibrace
 - Předpoklady
- 2 Metoda maximální věrohodnosti
 - Odhad vektoru parametrů
 - Konfidenční oblast pro vektor parametrů
 - Měření kalibrovaným přístrojem
- 3 Replikovaný model
 - Odhad vektoru parametrů
 - Konfidenční oblast pro vektor parametrů
 - Měření kalibrovaným přístrojem
- 4 Porovnání metod
- 5 Literatura

Pojem kalibrace

- Kalibrací rozumíme soubor úkonů, které dávají za určitých podmínek závislost mezi hodnotami indukovanými měřidlem A a mezi příslušnými hodnotami indukovanými jiným měřidlem B.
- Fáze kalibrace
 - Sestavení kalibračního modelu (kalibrace přístroje)
 - Použití kalibračního modelu (měření kalibrovaným přístrojem)

Cíle kalibrace

- Stanovení hodnot vybraných parametrů, které charakterizují vybraný objekt
- Určení oblastí spolehlivosti
- Testování hypotéz o hodnotách vybraných parametrů

Předpoklady

- Měříme m různých objektů pomocí dvou různých přístrojů (přístroje A a přístroje B), měření provedeme n - krát, všechna měření jsou nezávislá.
- Předpokládáme, že:
 - přístroj A je méně „přesný“ a přístroj B „přesnější“
 - naměřené hodnoty na obou přístrojích mají normální rozdělení
 - pro každý z m objektů platí, že při měření přístrojem A jsou bezchybně měřené hodnoty $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$
 - při měření přístrojem B jsou bezchybně měřené hodnoty $c\mu_i^2 + b\mu_i + a$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, m$

Metoda maximální věrohodnosti

- Náhodné veličiny $X_{ij} \sim N(\mu_i, \sigma_x^2)$ resp.
 $Y_{ij} \sim N(c\mu_i^2 + b\mu_i + a, \sigma_y^2)$ realizujeme pomocí přístroje A resp. B
- Cíl: najít vektor parametrů $\Theta = (a, b, c, \mu_1, \dots, \mu_m, \sigma_x^2, \sigma_y^2)$
- Známe rozdělení pravděpodobnosti náhodných veličin X_{ij} a Y_{ij} a víme, že jsou nezávislé, můžeme určit jejich hustotu a k určení Θ použít odhadu pomocí metody maximální věrohodnosti

Odhad vektoru parametrů

- Určíme věrohodnostní funkci, jejím zlogaritmováním pak logaritmickou věrohodnostní funkci:

$$\begin{aligned}l(x_{11}, \dots, y_{mn}; \Theta) &= \ln L(x_{11}, \dots, y_{mn}; \Theta) = \\&= -mn \ln(2\pi) - \frac{mn}{2} \ln \sigma_x^2 - \frac{mn}{2} \ln \sigma_y^2 - \\&- \frac{1}{2\sigma_x^2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \mu_i)^2 - \frac{1}{2\sigma_y^2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (y_{ij} - a - b\mu_i - c\mu_i^2)^2.\end{aligned}$$

- Minimalizací funkce $l(x_{11}, \dots, y_{mn}; \Theta)$ získáme realizace maximálně věrohodných odhadů parametru Θ .

Odhad vektoru parametrů

- Maximálně věrohodný odhad je asymptoticky normální a nestranný odhad Θ . Pro dostatečně velké n platí:

$$\widehat{\Theta}^{abc} \approx N \left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \frac{1}{n} J(\Theta^{abc})^{-1} \right)$$

- kde $J(\Theta)$ je Fisherova informační matice

Konfidenční oblast pro vektor parametrů

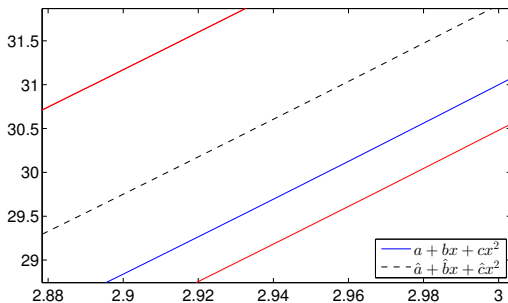
- Asymptotická $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ - ní konfidenční oblast pro vektor parametrů (a, b, c) je

$$*C_{(1-\alpha)}^1 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \hat{a} - a \\ \hat{b} - b \\ \hat{c} - c \end{pmatrix}' (\Sigma^{abc})^{-1} \begin{pmatrix} \hat{a} - a \\ \hat{b} - b \\ \hat{c} - c \end{pmatrix} \leq \chi_3^2(1 - \alpha) \right\}$$

- Pro vektor $L = (1, x, x^2)$ a $L \cdot \Theta$ dostaneme

$$P \left\{ \mathbf{L}'_x \widehat{\Theta}^{abc} - \sqrt{\mathbf{L}'_x \widehat{\Sigma}^{abc} \mathbf{L}_x \cdot \chi_1^2(1 - \alpha)} < \mathbf{L}'_x \Theta^{abc} < \right. \\ \left. < \mathbf{L}'_x \widehat{\Theta}^{abc} + \sqrt{\mathbf{L}'_x \widehat{\Sigma}^{abc} \mathbf{L}_x \cdot \chi_1^2(1 - \alpha)} \right\} = 1 - \alpha.$$

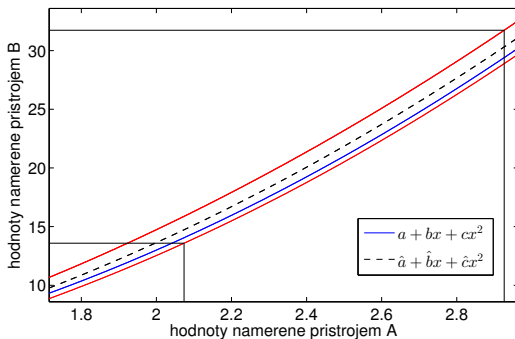
Konfidenční oblast pro vektor parametrů



Červeně označený - konfidenční pás okolo kalibrační křivky, modře označená - kalibrační křivka, čárkovaně označená - skutečná kalibrační křivka.

Obrázek je vykreslen pro hodnoty $\mu = (1, 2, \dots, 5)$, $\sigma_x = 0, 2$, $\sigma_y = 0, 1$, $n = 10$.

Měření kalibrovaným přístrojem



Červeně označený - konfidenční pás okolo kalibrační křivky, modře označená - kalibrační křivka, čárkovaně označená - skutečná kalibrační křivka.

Pro $\mu = (1, 2, \dots, 5)$, $\sigma_x = 0.2$, $\sigma_y = 0.1$, $n = 10$ a naměřenou hodnotu $x = 2.5$ je interval $(13.585, 31.737)$ nejméně 90% konfidenční interval pro hodnotu $\nu_x = a + b\mu_x + c\mu_x^2$.

Replikovaný model

- Předpokládáme nejdříve, že provedeme pouze jedno měření, tak získáme model

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} \sim N \left[\begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_x^2 \mathbf{I}_m & \mathbf{0}_m \\ \mathbf{0}_m & \sigma_y^2 \mathbf{I}_m \end{pmatrix} \right],$$

- kde $\nu_i = c\mu_i^2 + b\mu_i + a$. Máme tedy regresní model, ten linearizujeme pomocí Taylorova polynomu

$$\left(\text{diag}(b_0 \mathbf{1}_m + 2c_0 \mu_0), -\mathbf{I}_m \right) \begin{pmatrix} \delta\mu \\ \nu \end{pmatrix} + \left(\mathbf{1}_m, \mu_0, \mu_0^2 \right) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

- Za předpokladu, že měření zopakujeme n – krát získáme replikovaný model

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}^1 - \mu_0 \\ \mathbf{Y}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{X}^n - \mu_0 \\ \mathbf{Y}^n \end{pmatrix} \sim N \left[\mathbf{1}_n \otimes \begin{pmatrix} \delta\mu \\ \nu \end{pmatrix}, \mathbf{I}_n \otimes \begin{pmatrix} \sigma_x^2 \mathbf{I}_m & \mathbf{0}_m \\ \mathbf{0}_m & \sigma_y^2 \mathbf{I}_m \end{pmatrix} \right]$$

(kde \otimes je Kronekerova δ)

- Takto získáme model neúplného nepřímého měření s podmínkami II. typu na parametry 1. řádu.

Odhad vektoru parametrů

- Odhadneme parametry $a, b, c, \mu_1, \dots, \mu_m$, podle knihy Statistika a metrologie, parametry σ_x^2, σ_y^2 odhadneme pomocí MINQUE metody. Dostáváme

$$\begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{c} \end{pmatrix} \sim N \left[\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \left(\mathbf{A}' \left(\frac{1}{n} \mathbf{W} \right)^{-1} \mathbf{A} \right)^{-1} \right].$$

Konfidenční oblast pro vektor parametrů

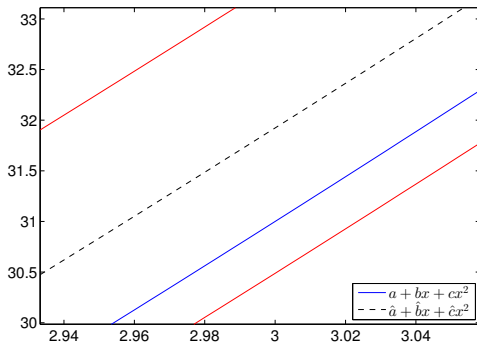
- Pro výpočet konfidenční oblasti, použijeme metodu Kenwarda Rogera

$$C_{(1-\alpha)}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{c} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \hat{a} - a \\ \hat{b} - b \\ \hat{c} - c \end{pmatrix}' \widehat{\Sigma}_A^{-1} \begin{pmatrix} \hat{a} - a \\ \hat{b} - b \\ \hat{c} - c \end{pmatrix} \leq \frac{3 \cdot F_{3,u}(1-\alpha)}{\lambda} \right\}$$

- Pro vektor $L = (1, x, x^2)$ a $L \cdot \Theta$ dostaneme

$$P \left\{ \hat{a} + \hat{b}x + \hat{c}x^2 - \sqrt{\frac{F_{1,u}(1-\alpha) \cdot (L'x \widehat{\Sigma}_A L_x)}{\lambda}} \leq a + bx + cx^2 \leq \hat{a} + \hat{b}x + \hat{c}x^2 + \sqrt{\frac{F_{1,u}(1-\alpha) \cdot (L'x \widehat{\Sigma}_A L_x)}{\lambda}} \right\} = 1 - \alpha.$$

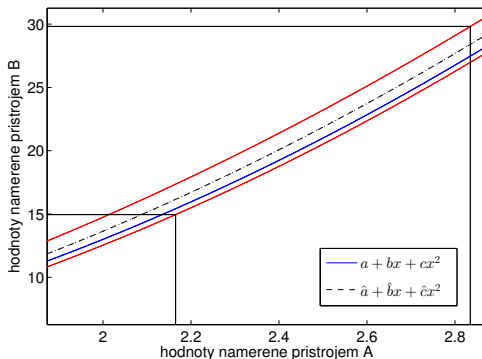
Konfidenční oblast pro vektor parametrů



Červeně označený - konfidenční pás okolo kalibrační křivky, modře označená - kalibrační křivka, čárkovaně označená - skutečná kalibrační křivka.

Obrázek je vytvořen pro hodnoty $\mu = (1, 2, \dots, 5)$, $\sigma_x = 0, 2$, $\sigma_y = 0, 1$, $n = 10$.

Měření kalibrovaným přístrojem



Červeně označený - konfidenční pás okolo kalibrační křivky, modře označená - kalibrační křivka, čárkovaně označená - skutečná kalibrační křivka.

Pro $\mu = (1, 2, \dots, 5)$, $\sigma_x = 0.2$, $\sigma_y = 0.1$, $n = 10$ a naměřenou hodnotu $x = 2.5$ je interval $(14.954, 29.819)$ nejméně 90% konfidenční interval pro hodnotu $\nu_x = a + b\mu_x + c\mu_x^2$.

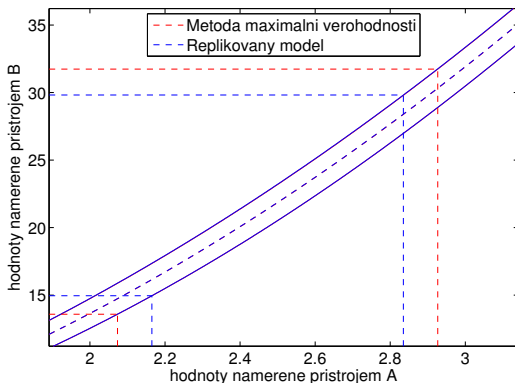
Porovnání metod

μ, n	$C_{1-\alpha}^2$	$C_{1-\alpha}^1$
$\mu = (1, 2, 3, 4), n = 2$	70,76%	65,90%
$\mu = (1, 2, 3, 4), n = 5$	85,07%	83,60%
$\mu = (1, 2, 3, 4), n = 10$	90,09%	89,50%
$\mu = (1, 2, 3, 4), n = 20$	92,76%	93,80%
$\mu = (1, 2, 3, 4), n = 50$	94,14%	93,00%
$\mu (1, 2, 3, 4, 5), n = 2$	72,27%	72,20%
$\mu (1, 2, 3, 4, 5), n = 5$	87,24%	87,20%
$\mu (1, 2, 3, 4, 5), n = 10$	91,47%	90,70%
$\mu (1, 2, 3, 4, 5), n = 20$	93,51%	92,60%
$\mu (1, 2, 3, 4, 5), n = 50$	94,03%	94,20%
$\mu (1, \dots 6), n = 2$	71,59%	77,10%
$\mu (1, \dots 6), n = 5$	87,20%	88,60%
$\mu (1, \dots 6), n = 10$	91,38%	89,90%
$\mu (1, \dots 6), n = 20$	93,29%	92,80%
$\mu (1, \dots 6), n = 50$	94,31%	92,90%

$C_{1-\alpha}^2, C_{1-\alpha}^1$... empirické pokrytí

Porovnání metod

Srovnání konfidenčních intervalů (1.2) a (2.2).



Obrázky jsou generovány pro hodnoty $\mu = (1, 2, \dots, 5)$, $\sigma_x = 0.2$, $\sigma_y = 0.1$, $n = 10$.

Literatura

- WIMMER, G. Niektoré matematicko - štatistické metódy kalibrácie, In ROBUST 2006, Zborník prací 14. zimní školy, 23-27 ledna 2006, Lhota nad Rohanovem.Praha, 2006. s. 375-386, 12 s. ISBN 80-7015-073-4.
- MYŠKOVA, Kateřina. One-dimensional calibration with quadratic calibration function. Forum Statisticum Slovacum 2 (2011), 120–123.
- KENWARD, Michael, G., ROGER, James H. Small Sample Inference for Fixed Effects from Restricted Maximum Likelihood, Biometric, Volume 53, Issue 3 (Sep.,1997), 983-997.
- ANDĚL, Jiří. Základy matematické statistiky. 1. vyd. Praha: Matfyzpress, 2005, 358 s. ISBN 8086732401.
- KUBÁČEK, Lubomír a Ludmila KUBÁČKOVÁ, Statistika a metrologie, 1. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého, 2000, 307 s. ISBN 8024400936.
- ANDĚL, Jiří. Matematická statistika. 2. vyd. Praha: SNTL - nakladatelství technické literatury, Alfa, vydavatelstvo technickej a ekonomickej literatury, 1985, 346 s