Hodnocení efektivnosti podniků pomocí analýzy obalu dat

Markéta Matulová

workshop Finanční matematika v praxi III, září 2013

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
AMathNet
síť pro transfer znalostí v aplikované matematice
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Úvod

Modely datových obalů (DEA) slouží k hodnocení technické efektivity produkčních jednotek na základě velikosti vstupů a výstupů (bez nutnosti cenového vyjádření).

Úvod

Modely datových obalů (DEA) slouží k hodnocení technické efektivity produkčních jednotek na základě velikosti vstupů a výstupů (bez nutnosti cenového vyjádření).

Historie:
1957: Farrell: model měření efektivity jednotek s jedním vstupem a výstupem
1978: Charnes, Cooper, Rhodes: CCR model: vícenásobné vstupy a výstupy, konstantní výnosy z rozsahu
1984: Banker, Charnes, Cooper: BCC model: proměnný výnos z rozsahu

Úvod

Modely datových obalů (DEA) slouží k hodnocení technické efektivity produkčních jednotek na základě velikosti vstupů a výstupů (bez nutnosti cenového vyjádření).

Historie:
1957: Farrell: model měření efektivity jednotek s jedním vstupem a výstupem
1978: Charnes, Cooper, Rhodes: CCR model: vícenásobné vstupy a výstupy, konstantní výnosy z rozsahu
1984: Banker, Charnes, Cooper: BCC model: proměnný výnos z rozsahu

Uvažujme homogenní produkční jednotky, spotřebovávající stejný typ zdrojů (materiál, podlahová plocha, pracovníci, atd.), budeme je označovat vstupy, k produkci ekvivalentních efektů (tržby, zisk, počet obsloužených klientů, atp.), dále jen výstupy. Pokud v činnosti jednotek dominuje pouze jeden vstup a jeden výstup, lze snadno vyjádřit efektivitu pomocí poměrového ukazatele

efektivita = výstup/vstup

Úvod

Modely datových obalů (DEA) slouží k hodnocení technické efektivity produkčních jednotek na základě velikosti vstupů a výstupů (bez nutnosti cenového vyjádření).

Historie:
1957: Farrell: model měření efektivity jednotek s jedním vstupem a výstupem
1978: Charnes, Cooper, Rhodes: CCR model: vícenásobné vstupy a výstupy, konstantní výnosy z rozsahu
1984: Banker, Charnes, Cooper: BCC model: proměnný výnos z rozsahu

Uvažujme homogenní produkční jednotky, spotřebovávající stejný typ zdrojů (materiál, podlahová plocha, pracovníci, atd.), budeme je označovat vstupy, k produkci ekvivalentních efektů (tržby, zisk, počet obsloužených klientů, atp.), dále jen výstupy. Pokud v činnosti jednotek dominuje pouze jeden vstup a jeden výstup, lze snadno vyjádřit efektivitu pomocí poměrového ukazatele

efektivita = výstup/vstup

Pro vícenásobné vstupy a výstupy je možné jejich agregováním ukazatel modifikovat:

efektivita = vážené výstupy/vážené vstupy

Model s jedním vstupem a výstupem

Uvažujme 8 poboček obchodní firmy, které charakterizujeme jedním vstupem (počet zaměstnanců) a jedním výstupem (počet uzavřených smluv s klienty). Efektivitu lze vyjádřit pomocí ukazatele "počet smluv na zaměstnance", údaje jsou zaznamenány v tabulce:

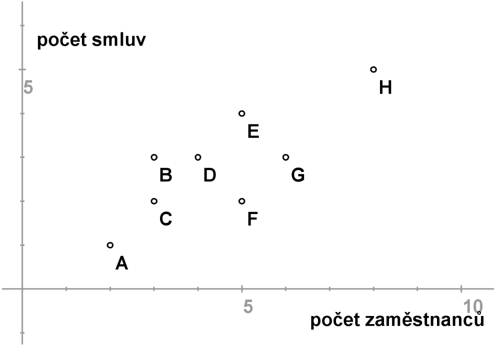
Pobočka	A	B	C	D	E	F	G	H
zaměstnanců	2	3	3	4	5	5	6	8
smluv	1	3	2	3	4	2	3	5
efektivita	0,5	1	0,667	0,75	0,8	0,4	0,5	0,625

Model s jedním vstupem a výstupem

Data reprezentujeme graficky, viz:

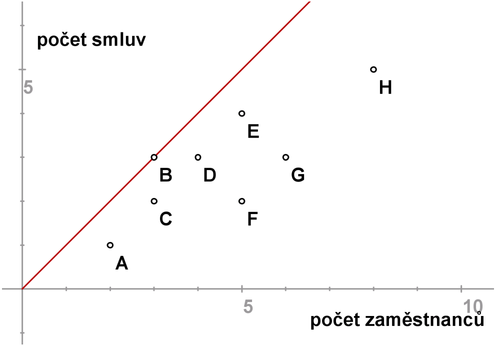
Model s jedním vstupem a výstupem

Data reprezentujeme graficky, viz:



Model s jedním vstupem a výstupem

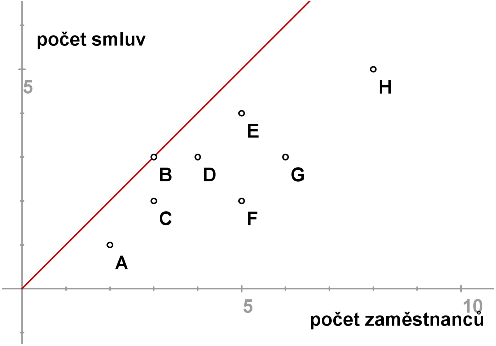
Data reprezentujeme graficky, viz:



Ukazatel efektivity dané pobočky udává sklon přímky spojující příslušný bod s počátkem, pro pobočku B nabývá nejvyšší hodnoty - tuto přímku budeme dále nazývat efektivní hranicí.

Model s jedním vstupem a výstupem

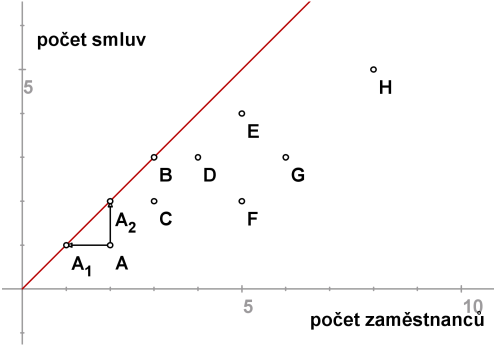
Data reprezentujeme graficky, viz:



Ukazatel efektivity dané pobočky udává sklon přímky spojující příslušný bod s počátkem, pro pobočku B nabývá nejvyšší hodnoty - tuto přímku budeme dále nazývat efektivní hranicí. Nejlepší pobočkou je tedy pobočka B, efektivitu ostatních můžeme pak vyjádřit také v relativní míře. Například efektivita A / efektivita B =0,5 což znamená, že A dosahuje pouze 50% efektivity B. Tato relativní míra nabývá i pro ostatní pobočky hodnot z intervalu [0, 1] a je nezávislá na jednotkách, ve kterých jsme vstup, resp. výstup měřili.

Model s jedním vstupem a výstupem

Jakým způsobem může jednotka A dosáhnout stoprocentní hodnoty, tj. efektivní hranice? Může snížit vstupy při zachování výstupů (model orientovaný na vstupy, v grafickém znázornění reprezentuje bod A_1) nebo zvýšit výstup při zachování vstupů (model orientovaný na výstupy, v grafickém znázornění reprezentuje bod A_2) nebo změnit obojí. Jednotky A_1, A_2 nazýváme virtuální, neodpovídají žádné reálné pobočce. Úsečka A_1A_2 reprezentuje všechny dostupné body na efektivní hranici, pro jejichž dosažení A nemusí zvyšovat počet zaměstnanců nebo snižovat počet uzavřených smluv.



Model s jedním vstupem a výstupem

Označíme-li souřadnice bodů $A[x, y]$, $A_1[x_1, y_1]$, $A_2[x_2, y_2]$, vzhledem k tomu, že A_1, A_2 leží na efektivní hranici, lze ve vyjádření relativní efektivity A použít ve jmenovateli místo jednotky B libovolnou z těchto virtuálních jednotek.
Dostaneme pak

$\boxed{\frac{x}{y} / \frac{x_1}{y_1} = x/x_1}$ neboť $y = y_1$

nebo

$\boxed{\frac{x}{y} / \frac{x_2}{y_2} = y_2/y}$ neboť $x = x_2$.

Model s jedním vstupem a výstupem

Označíme-li souřadnice bodů $A[x, y]$, $A_1[x_1, y_1]$, $A_2[x_2, y_2]$, vzhledem k tomu, že A_1, A_2 leží na efektivní hranici, lze ve vyjádření relativní efektivity A použít ve jmenovateli místo jednotky B libovolnou z těchto virtuálních jednotek. Dostaneme pak

$\frac{x}{y}/\frac{x_1}{y_1} = x/x_1$ neboť $y = y_1$

nebo

$\frac{x}{y}/\frac{x_2}{y_2} = y_2/y$ neboť $x = x_2$.

V modelu orientovaném na výstupy můžeme relativní efektivitu interpretovat jako potřebné navýšení výstupu, $\frac{y_2}{y} = \frac{2}{1} = 2$, tedy efektivní hranice by A dosáhla zdvojnásobením počtu uzavřených smluv.

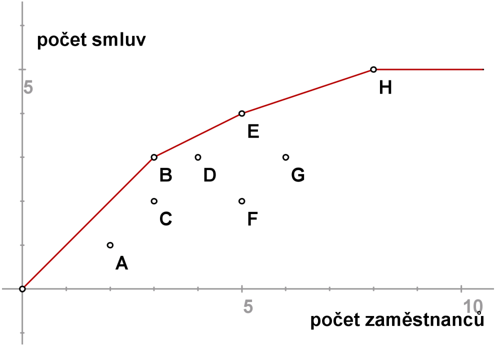
Pro model orientovaný na vstupy převrácená hodnota relativní efektivity reprezentuje potřebnou redukci vstupů, $\frac{x_1}{x} = \frac{1}{2} = 0,5$, tedy efektivní hranice by A dosáhla s polovinou zaměstnanců.

Model s jedním vstupem a výstupem

V předchozích úvahách jsme pracovali s předpokladem konstantních výnosů z rozsahu, kdy efektivní hranice byla tvořena polopřímkou, tj. pro každou pobočku s kombinací vstupu a výstupu $[x, y]$ se předpokládá za dosažitelnou i kombinace $[\alpha x, \alpha y]$ pro lib. $\alpha > 0$. Ukazatel relativní efektivity pak vychází shodně, ať použijeme model orientovaný na vstupy či na výstupy.

Model s jedním vstupem a výstupem

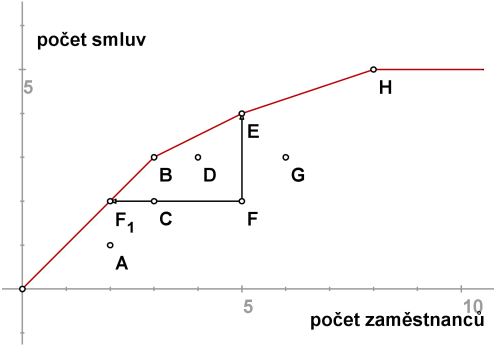
V předchozích úvahách jsme pracovali s předpokladem konstantních výnosů z rozsahu, kdy efektivní hranice byla tvořena polopřímkou, tj. pro každou pobočku s kombinací vstupu a výstupu $[x, y]$ se předpokládá za dosažitelnou i kombinace $[\alpha x, \alpha y]$ pro lib. $\alpha > 0$. Ukazatel relativní efektivity pak vychází shodně, ať použijeme model orientovaný na vstupy či na výstupy.
Za předpokladu variabilních výnosů z rozsahu je třeba efektivní hranici modifikovat.



Nyní tvoří hranice obal dat, tak že efektivní se jeví též jednotky E a H.

Model s jedním vstupem a výstupem

Ukazatel relativní efektivity se může měnit podle použitého modelu. Například pro jednotku F při orientaci na vstupy dostaneme hodnotu efektivita F_1 / efektivita F = 2/5 = 0,4, kdežto při orientaci na výstupy hodnotu efektivita F/efektivita E = 1/2= 0,5.



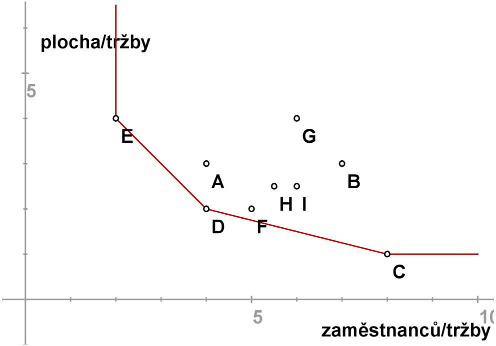
Dva vstupy a jeden výstup

Uvažujme příklad 9 supermarketů , kde jako vstupy bereme počet zaměstnanců (v desítkách) a podlahovou plochu (v 1000 m^2), výstupem rozumíme roční tržby. Za předpokladu konstantních výnosů z rozsahu můžeme dále pracovat s hodnotami vstupů přepočtenými na jednotku výstupu. Normované hodnoty jsou uvedeny v tabulce.

Obchod	A	B	C	D	E	F	G	H	I
zaměstnanců	4	7	8	4	2	5	6	5,5	6
plocha	3	3	1	2	4	2	4	2,5	2,5
tržby	1	1	1	1	1	1	1	1	1

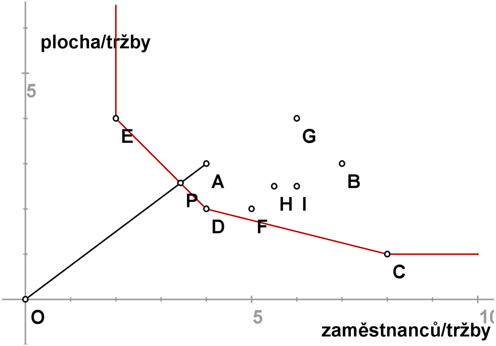
Dva vstupy a jeden výstup

V grafickém znázornění se efektivnější jeví ty obchody, které se nalézají blíž k počátku, efektivní hranice obaluje data následujícím způsobem:



Dva vstupy a jeden výstup

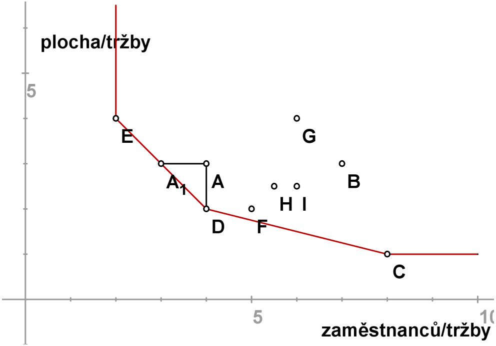
V grafickém znázornění se efektivnější jeví ty obchody, které se nalézají blíž k počátku, efektivní hranice obaluje data následujícím způsobem:



Obchod A je neefektivní, míru jeho efektivity můžeme měřit radiálně jako $\frac{|OP|}{|OA|} = 0,8571$. Protože virtuální jednotka P je kombinací jednotek D,E, nazýváme je referenčními jednotkami pro A.

Dva vstupy a jeden výstup

V grafickém znázornění se efektivnější jeví ty obchody, které se nalézají blíž k počátku, efektivní hranice obaluje data následujícím způsobem:



Obchod A je neefektivní, míru jeho efektivity můžeme měřit radiálně jako $\frac{|OP|}{|OA|} = 0,8571$. Protože virtuální jednotka P je kombinací jednotek D,E, nazýváme je referenčními jednotkami pro A. Efektivní hranice lze dosáhnout též jinak než proporčním snížením obou vstupů o 15%, snížení pouze jednoho vstupu při zachování úrovně druhého demonstrují body A_1, D.

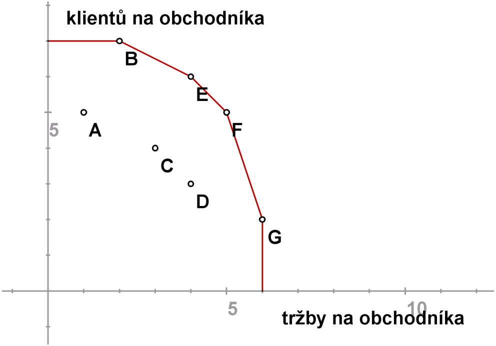
Jeden vstup a dva výstupy

Nyní naopak uvažujme případ, kdy u 7 obchodních kanceláří sledujeme 1 vstup (počet obchodníků) a dva výstupy (počet obsloužených zákazníků a tržby. Hodnoty výstupů u jednotlivých poboček přepočtené na 1 obchodníka jsou uvedeny v tabulce.

Kancelář	A	B	C	D	E	F	G
obchodníků	1	1	1	1	1	1	1
zákazníků	1	2	3	4	4	5	6
tržby	5	7	4	3	6	5	2

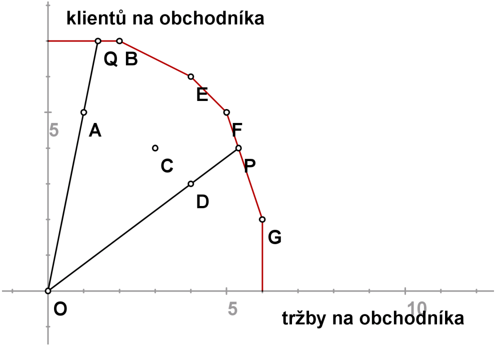
Jeden vstup a dva výstupy

Můžeme znázornit jednotkové výstupy jednotlivých kanceláří, efektivní hranice bude obalovat data z opačné strany, protože body ležící blíž k počátku reprezentují méně efektivní jednotky. (jde o jednotky A,C,D)



Jeden vstup a dva výstupy

Můžeme znázornit jednotkové výstupy jednotlivých kanceláří, efektivní hranice bude obalovat data z opačné strany, protože body ležící blíž k počátku reprezentují méně efektivní jednotky. (jde o jednotky A,C,D)



Míru neefektivity lze opět měřit radiálně, například pro jednotku D jako $\frac{|OD|}{|OP|} = 0,75$. Pro bod A by analogická míra vyjadřovala pouze tzv. technickou neefektivitu, z bodu Q lze ještě zvýšit tržby bez ztráty klientů až na úroveň bodu B.

CCR model

Pro n jednotek $U_1, \ldots, U_n$ u nichž sledujeme m vstupů a r výstupů zavedeme označení x_{iq} pro i-tý vstup q-té jednotky a y_{jq} pro j-tý vstup q-té jednotky. Pro U_q značíme $\mathbf{x_q} = (x_{1q}, \ldots, x_{mq})'$, $\mathbf{y_q} = (y_{1q}, \ldots, y_{rq})'$. Hodnoty lze uspořádat do matic

$$\mathbf{X} = [x_{iq}]_{q=1,\ldots,r}^{i=1,\ldots,m}, \ \mathbf{Y} = [y_{jq}]_{q=1,\ldots,r}^{j=1,\ldots,r}.$$

CCR model

Pro n jednotek $U_1, \dots, U_n$ u nichž sledujeme m vstupů a r výstupů zavedeme označení x_{iq} pro i-tý vstup q-té jednotky a y_{jq} pro j-tý vstup q-té jednotky. Pro U_q značíme $\mathbf{x_q} = (x_{1q}, \dots, x_{mq})'$, $\mathbf{y_q} = (y_{1q}, \dots, y_{rq})'$. Hodnoty lze uspořádat do matic

$$\mathbf{X} = [x_{iq}]_{q=1,\dots,r}^{i=1,\dots,m}, \ \mathbf{Y} = [y_{jq}]_{q=1,\dots,r}^{j=1,\dots,r}.$$

Pomocí vektorů nezáporných vah $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_m)$, $\mathbf{u} = u_1, \dots, u_r$ můžeme pro libovolnou jednotku U_q definovat

virtuální vstup = $v_1 x_{1q} + \dots + v_m x_{mq} = \mathbf{v x_q}$ a
virtuální výstup = $u_1 y_{1q} + \dots + u_r y_{rq} = \mathbf{u y_q}$.
Míru efektivnosti dané jednotky pak vyjádříme jako podíl jejího virtuálního výstupu a vstupu.

CCR model

Pro n jednotek $U_1, \ldots, U_n$ u nichž sledujeme m vstupů a r výstupů zavedeme označení x_{iq} pro i-tý vstup q-té jednotky a y_{jq} pro j-tý vstup q-té jednotky. Pro U_q značíme $\mathbf{x_q} = (x_{1q}, \ldots, x_{mq})'$, $\mathbf{y_q} = (y_{1q}, \ldots, y_{rq})'$. Hodnoty lze uspořádat do matic

$$\mathbf{X} = [x_{iq}]_{q=1,\ldots,r}^{i=1,\ldots,m}, \ \mathbf{Y} = [y_{jq}]_{q=1,\ldots,r}^{j=1,\ldots,r}.$$

Pomocí vektorů nezáporných vah $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_m)$, $\mathbf{u} = u_1, \ldots, u_r$ můžeme pro libovolnou jednotku U_q definovat

virtuální vstup = $v_1 x_{1q} + \ldots + v_m x_{mq} = \mathbf{vx_q}$ a
virtuální výstup = $u_1 y_{1q} + \ldots + u_r y_{rq} = \mathbf{uy_q}$.
Míru efektivnosti dané jednotky pak vyjádříme jako podíl jejího virtuálního výstupu a vstupu.
CCR model optimalizuje váhy vstupů a výstupů tak, aby míra efektivnosti dané jednotky U_q, $z = \frac{u_1 y_{1q} + \ldots + u_r y_{rq}}{v_1 x_{1q} + \ldots + v_m x_{mq}} = \frac{\mathbf{uy_q}}{\mathbf{vx_q}}$ byla maximální za podmínky, že efektivnosti ostatních jednotek jsou nejvýše jednotkové. Existuje-li kladné řešení s optimální hodnotou účelové funkce $z^* = 1$, pak se jednotka U_q označuje jako CCR efektivní.

CCR model orientovaný na vstupy

Celý model pro jednotku U_q lze formulovat jako úlohu lineárního lomeného programování

$$z = \frac{u_1 y_{1q} + \ldots + u_r y_{rq}}{v_1 x_{1q} + \ldots + v_m x_{mq}} \to max_{u,v}$$

za omezení

$$\frac{u_1 y_{1k} + \ldots + u_r y_{rk}}{v_1 x_{1k} + \ldots + v_m x_{mk}} \leq 1,\ k = 1, \ldots n,$$

$$u_i \geq 0,\ v_j \geq 0,\ i = 1, \ldots m,\ j = 1, \ldots r.$$

CCR model orientovaný na vstupy

Celý model pro jednotku U_q lze formulovat jako úlohu lineárního lomeného programování

$$z = \frac{u_1 y_{1q} + \ldots + u_r y_{rq}}{v_1 x_{1q} + \ldots + v_m x_{mq}} \to max_{u,v}$$

za omezení

$$\frac{u_1 y_{1k} + \ldots + u_r y_{rk}}{v_1 x_{1k} + \ldots + v_m x_{mk}} \leq 1, \;\; k = 1, \ldots n,$$

$$u_i \geq 0, \;\; v_j \geq 0, \;\; i = 1, \ldots m, \;\; j = 1, \ldots r.$$

Úlohu lze snadno linearizovat pomocí Charnes-Cooperovy transformace:

$$z = u_1 y_{1q} + \ldots + u_r y_{rq} \to max_{u,v}$$

za omezení

$$v_1 x_{1q} + \ldots + v_m x_{mq} = 1$$

$$u_1 y_{1k} + \ldots + u_r y_{rk} \leq v_1 x_{1k} + \ldots + v_m x_{mk}, \;\; k = 1, \ldots n,$$

$$u_i \geq 0, \;\; v_j \geq 0, \;\; i = 1, \ldots m, \;\; j = 1, \ldots r.$$

CCR model orientovaný na vstupy

Celý model pro jednotku U_q lze formulovat jako úlohu lineárního lomeného programování

$$z = \frac{u_1 y_{1q} + \ldots + u_r y_{rq}}{v_1 x_{1q} + \ldots + v_m x_{mq}} \rightarrow max_{u,v}$$

za omezení

$$\frac{u_1 y_{1k} + \ldots + u_r y_{rk}}{v_1 x_{1k} + \ldots + v_m x_{mk}} \leq 1, \; k = 1, \ldots n,$$
$$u_i \geq 0, \; v_j \geq 0, \; i = 1, \ldots m, \; j = 1, \ldots r.$$

Úlohu lze snadno linearizovat pomocí Charnes-Cooperovy transformace:

$$z = u_1 y_{1q} + \ldots + u_r y_{rq} \rightarrow max_{u,v}$$

za omezení

$$v_1 x_{1q} + \ldots + v_m x_{mq} = 1$$
$$u_1 y_{1k} + \ldots + u_r y_{rk} \leq v_1 x_{1k} + \ldots + v_m x_{mk}, \; k = 1, \ldots n,$$
$$u_i \geq 0, \; v_j \geq 0, \; i = 1, \ldots m, \; j = 1, \ldots r.$$

Tento model nazýváme CCR modelem orientovaným na vstupy. Množina takových indexů $k \in \{1, \ldots n\}$ efektivních jednotek, pro které jsou omezující podmínky v úloze pro U_q aktivní, definuje tzv. referenční množinu pro U_q.

CCR model - příklad

Uvažujme úlohu s dvěma vstupy a jedním výstupem, hodnoty pro 6 jednotek jsou uvedeny v tabulce:

Jednotka	A	B	C	D	E	F
x_1	4	7	8	4	2	10
x_2	3	3	1	2	4	1
y	1	1	1	1	1	1

CCR model - příklad

Uvažujme úlohu s dvěma vstupy a jedním výstupem, hodnoty pro 6 jednotek jsou uvedeny v tabulce:

Jednotka	A	B	C	D	E	F
x_1	4	7	8	4	2	10
x_2	3	3	1	2	4	1
y	1	1	1	1	1	1

Linearizovaná úloha pro jednotku A bude mít podobu:

$z = u \rightarrow \max$

za omezení

$$
\begin{array}{ll}
4v_1 + 3v_2 = 1, & u,\ v_1,\ v_2 \geq 0 \\
u \leq 4v_1 + 3v_2 \text{ (A)} & u \leq 7v_1 + 3v_2 \text{ (B)} \\
u \leq 8v_1 + v_2 \text{ (C)} & u \leq 4v_1 + 2v_2 \text{ (D)} \\
u \leq 2v_1 + 4v_2 \text{ (E)} & u \leq 10v_1 + v_2 \text{ (F)}
\end{array}
$$

CCR model - příklad

Uvažujme úlohu s dvěma vstupy a jedním výstupem, hodnoty pro 6 jednotek jsou uvedeny v tabulce:

Jednotka	A	B	C	D	E	F
x_1	4	7	8	4	2	10
x_2	3	3	1	2	4	1
y	1	1	1	1	1	1

Linearizovaná úloha pro jednotku A bude mít podobu:

$z = u \to \max$

za omezení

$4v_1 + 3v_2 = 1,$ $\quad u,\ v_1,\ v_2 \geq 0$

$u \leq 4v_1 + 3v_2$ (A) $\quad u \leq 7v_1 + 3v_2$ (B)

$u \leq 8v_1 + v_2$ (C) $\quad u \leq 4v_1 + 2v_2$ (D)

$u \leq 2v_1 + 4v_2$ (E) $\quad u \leq 10v_1 + v_2$ (F)

Úlohu lze vyřešit standartními postupy lineárního programování, pro A dostaneme řešení $z^* = u^* = 6/7,\ v_1^* = v_2^* = 1/7$. Jednotka A není efektivní, protože $z^* = 6/7 \leq 1$, omezující nerovnice pro jednotky D, E jsou aktivní, tedy D,E jsou kandidáty na referenční jednotky pro A.

CCR model - příklad

Úlohy pro ostatní jednotky budou podobné, lišit se budou pouze v omezující rovnosti, pro jednotku B to bude podmínka $7v_1 + 3v_2 = 1$, atd. V tabulce jsou shrnuty výsledky úloh pro všechny jednotky:

jednotka	x_1	x_2	y	v_1^*	v_2^*	$z^* = u^*$	referenční množina
A	4	3	1	1/7	1/7	6/7	D,E
B	7	3	1	1/19	4/19	12/19	C,D
C	8	1	1	1/12	1/3	1	C
D	4	2	1	1/6	1/6	1	D
E	2	4	1	3/14	1/7	1	E
F	10	1	1	0	1	1	C

CCR model - příklad

Úlohy pro ostatní jednotky budou podobné, lišit se budou pouze v omezující rovnosti, pro jednotku B to bude podmínka $7v_1 + 3v_2 = 1$, atd. V tabulce jsou shrnuty výsledky úloh pro všechny jednotky:

jednotka	x_1	x_2	y	v_1^*	v_2^*	$z^* = u^*$	referenční množina
A	4	3	1	1/7	1/7	6/7	D,E
B	7	3	1	1/19	4/19	12/19	C,D
C	8	1	1	1/12	1/3	1	C
D	4	2	1	1/6	1/6	1	D
E	2	4	1	3/14	1/7	1	E
F	10	1	1	0	1	1	C

Vidíme, že jednotky C,D,E jsou efektivní. Optimální hodnota účelové funkce pro F je sice také rovna 1, ale referenční jednotkou pro F je C, protože má při stejném vstupu v_2 nižší vstup v_1. V definici CCR efektivity je tedy třeba zdůraznit: jednotka je CCR efektivní, je-li její $z^* = 1$ a existuje aspoň jedno řešení, pro něž $u^* > 0,\ v^* > 0$. Požadavek existence kladných vah lze zapracovat přímo do modelu, kdy v podmínkách nezápornosti proměnných změníme pravou stranu na nějaké $\varepsilon > 0$.

CCR model - duální úloha

Zapišme CCR model pro jednotku U_q maticově:

$z = \mathbf{u}\mathbf{y_q} \rightarrow max_{u,v}$

za omezení

$\mathbf{v}\mathbf{x_q} = 1$

$\mathbf{uY} \leq \mathbf{vX},$

$\mathbf{u},\ \mathbf{v} \geq 0.$

CCR model - duální úloha

Zapišme CCR model pro jednotku U_q maticově:

$z = \mathbf{uy_q} \rightarrow max_{u,v}$

za omezení

$\mathbf{vx_q} = 1$

$\mathbf{uY} \leq \mathbf{vX}$,

$\mathbf{u},\ \mathbf{v} \geq 0$.

K úloze formulujme její duální problém, duální proměnné označíme θ a $\lambda = (\lambda_1, \ldots \lambda_n)'$:

$z = \theta \rightarrow min_{\theta,\lambda}$

za omezení

$\theta \mathbf{x_q} \geq \mathbf{X}\lambda$,

$\mathbf{Y}\lambda \geq \mathbf{y_q}$,

$\lambda \geq 0$

Použití duálního modelu je výhodné z výpočetního i interpretačního hlediska.

Duální CCR model - interpretace

Model vlastně hledá virtuální jednotku se vstupy a výstupy $\mathbf{X}\lambda, \mathbf{Y}\lambda$, která je lepší nebo alespoň srovnatelná s radiální projekcí hodnocené jednotky U_q na efektivní hranici:

$$\theta \mathbf{x_q} \geq \mathbf{X}\lambda, \; \mathbf{Y}\lambda \geq \mathbf{y_q}$$

Duální CCR model - interpretace

Model vlastně hledá virtuální jednotku se vstupy a výstupy $\mathbf{X}\lambda, \mathbf{Y}\lambda$, která je lepší nebo alespoň srovnatelná s radiální projekcí hodnocené jednotky U_q na efektivní hranici:

$$\theta \mathbf{x_q} \geq \mathbf{X}\lambda, \ \mathbf{Y}\lambda \geq \mathbf{y_q}$$

Hodnocená jednotka U_q leží přímo na efektivní hranici, je-li totožná s nalezenou virtuální jednotkou. Nutně tedy musí být optimální hodnota účelové funkce modelu θ^* (tzv. Farellova efektivita) vyjadřující potřebnou radiální redukci vstupů k dosažení efektivní hranice jednotková, $\theta^* = 1$. Při splnění této podmínky je jednotka U_q též nazvána technicky efektivní.

Duální CCR model - interpretace

Model vlastně hledá virtuální jednotku se vstupy a výstupy $\mathbf{X}\lambda, \mathbf{Y}\lambda$, která je lepší nebo alespoň srovnatelná s radiální projekcí hodnocené jednotky U_q na efektivní hranici:

$$\theta \mathbf{x_q} \geq \mathbf{X}\lambda,\ \mathbf{Y}\lambda \geq \mathbf{y_q}$$

Hodnocená jednotka U_q leží přímo na efektivní hranici, je-li totožná s nalezenou virtuální jednotkou. Nutně tedy musí být optimální hodnota účelové funkce modelu θ^* (tzv. Farellova efektivita) vyjadřující potřebnou radiální redukci vstupů k dosažení efektivní hranice jednotková, $\theta^* = 1$. Při splnění této podmínky je jednotka U_q též nazvána technicky efektivní.

K dosažení CCR-efektivity však současně musí být nulové všechny přídavné proměnné převádějící omezující nerovnosti na rovnosti:

$$\mathbf{s}^- = \theta \mathbf{x_q} - \mathbf{X}\lambda = \mathbf{0},\ \mathbf{s}^+ = \mathbf{Y}\lambda - \mathbf{y_q} = \mathbf{0}.$$

Duální CCR model - interpretace

Model vlastně hledá virtuální jednotku se vstupy a výstupy $\mathbf{X}\lambda, \mathbf{Y}\lambda$, která je lepší nebo alespoň srovnatelná s radiální projekcí hodnocené jednotky U_q na efektivní hranici:

$\theta\mathbf{x_q} \geq \mathbf{X}\lambda, \mathbf{Y}\lambda \geq \mathbf{y_q}$

Hodnocená jednotka U_q leží přímo na efektivní hranici, je-li totožná s nalezenou virtuální jednotkou. Nutně tedy musí být optimální hodnota účelové funkce modelu θ^* (tzv. Farellova efektivita) vyjadřující potřebnou radiální redukci vstupů k dosažení efektivní hranice jednotková, $\theta^* = 1$. Při splnění této podmínky je jednotka U_q též nazvána technicky efektivní.

K dosažení CCR-efektivity však současně musí být nulové všechny přídavné proměnné převádějící omezující nerovnosti na rovnosti:

$\mathbf{s}^- = \theta\mathbf{x_q} - \mathbf{X}\lambda = \mathbf{0}, \mathbf{s}^+ = \mathbf{Y}\lambda - \mathbf{y_q} = \mathbf{0}$.

Při splnění všech těchto podmínek vyhovuje hodnocená jednotka tzv. Pareto-Koopmansově definici efektivity, tj. není možné zlepšit žádný z jejích vstupů a výstupů, aniž by současně nedošlo ke zhoršení jiného.

Duální CCR model - alternativní formulace

Uvažujme primární CCR model s požadavkem nenulovosti vah $\mathbf{u},\ \mathbf{v} \geq \varepsilon > 0$ a označme $\mathbf{e} = (1, \dots, 1)^\top$. Duální úlohu lze též formulovat ve tvaru

$$z = \theta - \varepsilon \cdot (\mathbf{e} \cdot \mathbf{s}^+ + \mathbf{e} \cdot \mathbf{s}^-) \to min_{\theta, \lambda, \mathbf{s}^+,\ \mathbf{s}^-}$$

za omezení

$\mathbf{s}^- = \theta \mathbf{x_q} - \mathbf{X}\lambda,$
$\mathbf{s}^+ = \mathbf{Y}\lambda - \mathbf{y_q},$
$\lambda,\ \mathbf{s}^+,\ \mathbf{s}^- \geq 0$

Duální CCR model - alternativní formulace

Uvažujme primární CCR model s požadavkem nenulovosti vah $\mathbf{u},\ \mathbf{v} \geq \varepsilon > 0$ a označme $\mathbf{e} = (1, \ldots, 1)^\top$. Duální úlohu lze též formulovat ve tvaru

$$z = \theta - \varepsilon \cdot (\mathbf{e} \cdot \mathbf{s}^+ + \mathbf{e} \cdot \mathbf{s}^-) \rightarrow min_{\theta,\lambda,\mathbf{s}^+,\ \mathbf{s}^-}$$

za omezení

$$\mathbf{s}^- = \theta \mathbf{x_q} - \mathbf{X}\lambda,$$
$$\mathbf{s}^+ = \mathbf{Y}\lambda - \mathbf{y_q},$$
$$\lambda,\ \mathbf{s}^+,\ \mathbf{s}^- \geq 0$$

Optimální hodnoty modelu dávají jednotce U_q návod pro zlepšení vstupů a výstupů na $\mathbf{x}'_\mathbf{q},\ \mathbf{y}'_\mathbf{q}$ pomocí tzv. CCR - projekce:

$$\mathbf{x}'_\mathbf{q} = \theta^* \mathbf{x_q} - \mathbf{s}^{-*}, \mathbf{y_q}' = \mathbf{y_q} + \mathbf{s}^{+*},$$

nebo též

$$\mathbf{x}'_\mathbf{q} = \mathbf{X}\lambda^*, \mathbf{y_q}' = \mathbf{Y}\lambda^*.$$

Přitom ty indexy $j \in \{1, \ldots, n\}$, pro něž jsou hodnoty λ_j^* kladné, určují referenční jednotky pro U_q.

CCR model orientovaný na výstupy

Pro jednotku U_q můžeme také formulovat CCR model orientovaný na výstupy, zapišme jej rovnou v upravené duální podobě:

$$z = \Theta + \varepsilon \cdot (\mathbf{e} \cdot \mathbf{s}^+ + \mathbf{e} \cdot \mathbf{s}^-) \rightarrow min_{\Theta, \lambda, \mathbf{s}^+,\ \mathbf{s}^-}$$

za omezení

$$\mathbf{s}^- = \mathbf{x_q} - \mathbf{X}\lambda,$$
$$\mathbf{s}^+ = \mathbf{Y}\lambda - \Theta\mathbf{y_q},$$
$$\lambda,\ \mathbf{s}^+,\ \mathbf{s}^- \geq 0$$

CCR model orientovaný na výstupy

Pro jednotku U_q můžeme také formulovat CCR model orientovaný na výstupy, zapišme jej rovnou v upravené duální podobě:

$$z = \Theta + \varepsilon \cdot (\mathbf{e} \cdot \mathbf{s}^+ + \mathbf{e} \cdot \mathbf{s}^-) \rightarrow min_{\Theta, \lambda, \mathbf{s}^+,\ \mathbf{s}^-}$$

za omezení

$\mathbf{s}^- = \mathbf{x_q} - \mathbf{X}\lambda,$

$\mathbf{s}^+ = \mathbf{Y}\lambda - \Theta\mathbf{y_q},$

$\lambda,\ \mathbf{s}^+,\ \mathbf{s}^- \geq 0$

Pokud je $\Theta^* > 1$, jednotka U_q není efektivní a hodnota Θ^* vyjadřuje potřebnou míru proporcionálního navýšení vstupů. Opět lze analogicky definovat CCR projekci na efektivní hranici jako

$$\mathbf{x_q'} = \mathbf{X}\lambda^*, \mathbf{y_q}' = \mathbf{Y}\lambda^*.$$

CCR model orientovaný na výstupy

Pro jednotku U_q můžeme také formulovat CCR model orientovaný na výstupy, zapišme jej rovnou v upravené duální podobě:

$$z = \Theta + \varepsilon \cdot (\mathbf{e} \cdot \mathbf{s}^+ + \mathbf{e} \cdot \mathbf{s}^-) \to min_{\Theta,\lambda,\mathbf{s}^+,\ \mathbf{s}^-}$$

za omezení

$\mathbf{s}^- = \mathbf{x_q} - \mathbf{X}\lambda,$
$\mathbf{s}^+ = \mathbf{Y}\lambda - \Theta\mathbf{y_q},$
$\lambda,\ \mathbf{s}^+,\ \mathbf{s}^- \geq 0$

Pokud je $\Theta^* > 1$, jednotka U_q není efektivní a hodnota Θ^* vyjadřuje potřebnou míru proporcionálního navýšení vstupů. Opět lze analogicky definovat CCR projekci na efektivní hranici jako

$$\mathbf{x_q'} = \mathbf{X}\lambda^*, \mathbf{y_q}' = \mathbf{Y}\lambda^*.$$

V CCR modelech platí, že míry efektivnosti jednotky U_q při orientaci na vstupy či výstupy (tj. optimální hodnoty účelových funkcí modelů) jsou vzájemně převrácenými hodnotami $\theta^* \cdot \Theta^* = 1$

BCC model orientovaný na vstupy

Jako modifikaci modelu CCR, který předpokládá konstantní výnosy z rozsahu a definuje tak kónický obal dat, navrhli Banker, Charnes a Cooper model využívající variabilní výnosy z rozsahu, tzv. BCC model. Při tomto přístupu jsou data obalována konvexním obalem, jako virtuální jednotky se neuvažují libovolné nezáporné kombinace $\mathbf{X}\lambda,\ \mathbf{Y}\lambda$, ale pouze kombinace splňující podmínku $\mathbf{e}\lambda = 1$. Díky této dodatečné podmínce vychází zpravidla jako efektivní větší počet hodnocených jednotek.

BCC model orientovaný na vstupy

Jako modifikaci modelu CCR, který předpokládá konstantní výnosy z rozsahu a definuje tak kónický obal dat, navrhli Banker, Charnes a Cooper model využívající variabilní výnosy z rozsahu, tzv. BCC model. Při tomto přístupu jsou data obalována konvexním obalem, jako virtuální jednotky se neuvažují libovolné nezáporné kombinace $\mathbf{X}\lambda,\ \mathbf{Y}\lambda$, ale pouze kombinace splňující podmínku $\mathbf{e}\lambda = 1$. Díky této dodatečné podmínce vychází zpravidla jako efektivní větší počet hodnocených jednotek.

Uveďme formulaci duálního BCC modelu orientovaného na vstupy:

$$z = \theta - \varepsilon \cdot (\mathbf{e} \cdot \mathbf{s}^{+} + \mathbf{e} \cdot \mathbf{s}^{-}) \rightarrow min_{\theta,\lambda,\mathbf{s}^{+},\ \mathbf{s}^{-}}$$

za omezení

$$\mathbf{s}^{-} = \theta \mathbf{x_q} - \mathbf{X}\lambda,$$
$$\mathbf{s}^{+} = \mathbf{Y}\lambda - \mathbf{y_q},$$
$$\mathbf{e}\lambda = 1$$
$$\lambda,\ \mathbf{s}^{+},\ \mathbf{s}^{-} \geq 0$$

BCC model orientovaný na vstupy

Jako modifikaci modelu CCR, který předpokládá konstantní výnosy z rozsahu a definuje tak kónický obal dat, navrhli Banker, Charnes a Cooper model využívající variabilní výnosy z rozsahu, tzv. BCC model. Při tomto přístupu jsou data obalována konvexním obalem, jako virtuální jednotky se neuvažují libovolné nezáporné kombinace $\mathbf{X}\lambda,\ \mathbf{Y}\lambda$, ale pouze kombinace splňující podmínku $\mathbf{e}\lambda = 1$. Díky této dodatečné podmínce vychází zpravidla jako efektivní větší počet hodnocených jednotek.
Uveďme formulaci duálního BCC modelu orientovaného na vstupy:

$$z = \theta - \varepsilon \cdot (\mathbf{e} \cdot \mathbf{s}^+ + \mathbf{e} \cdot \mathbf{s}^-) \rightarrow min_{\theta,\lambda,\mathbf{s}^+,\ \mathbf{s}^-}$$

za omezení

$\mathbf{s}^- = \theta \mathbf{x_q} - \mathbf{X}\lambda,$
$\mathbf{s}^+ = \mathbf{Y}\lambda - \mathbf{y_q},$
$\mathbf{e}\lambda = 1$
$\lambda,\ \mathbf{s}^+,\ \mathbf{s}^- \geq 0$

Jako BCC efektivní jsou identifikovány ty jednotky, pro něž je $\theta^* = 1, \mathbf{s}^{+*} = \mathbf{0}, \mathbf{s}^{-*} = \mathbf{0}$.

Další DEA modely

Kromě základních DEA modelů byla navržena řada jejich modifikací, mimo jiné:

- aditivní, též SBM (Slack-Based Measure) model: nenutí uživatele rozlišovat mezi orientací na vstupy nebo výstupy, měří efektivnost přímo pomocí přídavných proměnných $\mathbf{s}^-$, $\mathbf{s}^+$
- DEA modely s nekontrolovatelnými výstupy a vstupy
- DEA modely s nežádoucími výstupy a vstupy
- Modely superefektivnosti
- diskrétní modely, např. FDH (Free Disposable Hull) model
- pro hodnocení změn efektivnosti v čase navržený Malmquistův index

Metody jsou podrobněji popsány v použité literatuře:

- J. Jablonský, M. Dlouhý: Modely hodnocení produkčních jednotek, Professional Publishing, Praha 2004
- W. W. Cooper, L. M. Seiford, K. Tone: Data Envelopement Analysis, Springer, New York 2007

Použití DEA k hodnocení efektivnosti dopravních podniků

Údaje z výroční zprávy Sdružení dopravních podniků za rok 2012 (http://www.sdp-cr.cz/o-nas/vyrocni-zpravy/) byly použity k hodnocení efektivnosti podniků z 19 měst. V první tabulce jsou uvedeny údaje v následujícím pořadí:

- počet přepravených osob (tis. osob)
- tržby (tis. Kč)
- vozové kilometry (tis.)
- počet zaměstnanců
- z toho řidičů

Druhá tabulka popisuje vozový park.

město	přeprav.	tržby	vozokm	zaměst.	řidičů
1. Brno	352 052	994 040	38 118	2 727	1 375
2. České Budějovice	38 091	129 059	5 673	384	187
3. Děčín	8 938	42 731	3 678	207	132
4. Hradec Králové	35 162	120 854	6 242	401	226
5. Chomutov-Jirkov	5 223	50 367	1 838	253	163
6. Jihlava	13 530	50 232	2 821	170	94
7. Karlovy Vary	13 436	65 174	2 624	260	148
8. Liberec	32 656	192 236	8 648	377	169
9. Mariánské Lázně	3 844	11 439	495	30	19
10. Most-Litvínov	27 418	110 059	4 908	471	216
11. Olomouc	52 737	143 318	5 902	432	255
12. Opava	10 750	50 476	3 046	180	115
13. Ostrava	96 389	519 873	33 773	2 008	1 026
14. Pardubice	27 178	119 280	5 721	406	189
15. Plzeň	99 154	300 097	15 102	1 030	570
16. Praha	1 383 124	4 508 422	167 760	10 595	4 207
17. Teplice	15 039	94 159	5 726	265	176
18. Ústí nad Labem	47 091	203 278	7 347	501	253
19. Zlín-Otrokovice	32 335	119 506	4 812	340	184

město	autobusy	tramvaje	trolejbusy	metro	celkem
1. Brno	298	309	151	0	758
2. České Budějovice	83	0	58	0	141
3. Děčín	55	0	0	0	55
4. Hradec Králové	95	0	36	0	131
5. Chomutov-Jirkov	29	0	19	0	48
6. Jihlava	32	0	32	0	64
7. Karlovy Vary	67	0	0	0	67
8. Liberec	139	68	0	0	207
9. Mariánské Lázně	4	0	9	0	30
10. Most-Litvínov	80	57	0	0	137
11. Olomouc	77	60	0	0	137
12. Opava	34	0	34	0	68
13. Ostrava	297	273	62	0	632
14. Pardubice	73	0	55	0	128
15. Plzeň	113	122	88	0	323
16. Praha	1214	920	0	738	2872
17. Teplice	65	0	38	0	103
18. Ústí n. Labem	73	0	68	0	141
19. Zlín-Otrokovice	37	0	57	0	94

Použití DEA k hodnocení efektivnosti dopravních podniků

Jako vstupy pro analýzu byly použity celkové počty zaměstnanců a celkový vozový park, jako výstupy počty přepravených osob, tržby a ujeté vozové kilometry. Byl zvolen model CCR orientovaný na vstupy, výpočty byly realizovány prostřednictvím doplňku Solver pro MS Excel a aplikace pro DEA (http://nb.vse.cz/ jablon/)

Použití DEA k hodnocení efektivnosti dopravních podniků

Jako vstupy pro analýzu byly použity celkové počty zaměstnanců a celkový vozový park, jako výstupy počty přepravených osob, tržby a ujeté vozové kilometry. Byl zvolen model CCR orientovaný na vstupy, výpočty byly realizovány prostřednictvím doplňku Solver pro MS Excel a aplikace pro DEA (http://nb.vse.cz/ jablon/)

Výsledky jsou uvedeny v následující tabulce, červeně jsou vyznačeny podniky, které vyšly jako efektivní.

město	efektivita	čísla	refer.	jednot.
1. Brno	0,9889	16		
2. České Budějovice	0,833	8	9	16
3. Děčín	1	3		
4. Hradec Králové	0,8546	8	16	17
5. Chomutov-Jirkov	0,6684	16		
6. Jihlava	0,8493	8	16	17
7. Karlovy Vary	0,6592	3	16	
8. Liberec	1	8		
9. Mariánské Lázně	1	9		
10. Most-Litvínov	0,6092	3	16	17
11. Olomouc	0,9351	16		
12. Opava	0,8209	8	16	17
13. Ostrava	0,8838	3	16	17
14. Pardubice	0,7743	3	16	17
15. Plzeň	0,8426	8	16	17
16. Praha	1	16		
17. Teplice	1	17		
18. Ústí n. Labem	0,9465	8	16	
19. Zlín-Otrokovice	0,8695	3	16	17