

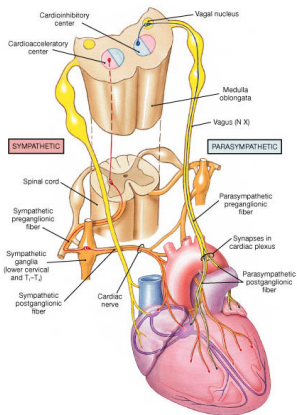
Lineárne modelovanie variability srdečného rytmu

Terézia Hodášová, Jiří Holčík

Ústav matematiky a statistiky
Institut biostatistiky a analýz
Masarykova univerzita

Finanční matematika v praxi III. a Matematické modely a aplikace
Podlesí 2013





■ Modely

- AR (Autoregressive model)
- ARX (Autoregressive model with exogenous input)
- Určenie fitness levelu jednotlivých koní

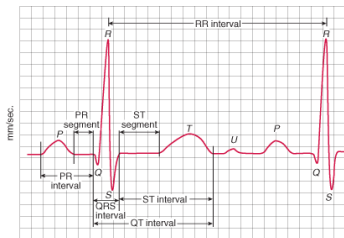
■ Protokol záťažového testu

■ Zahrievanie (warm up)

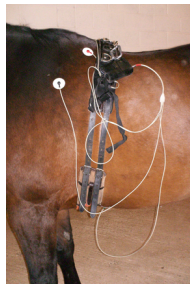
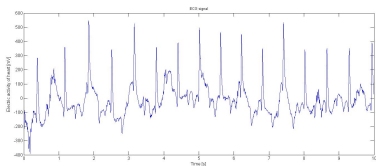
- Krok (5min)
- Klus (5min)

■ Test

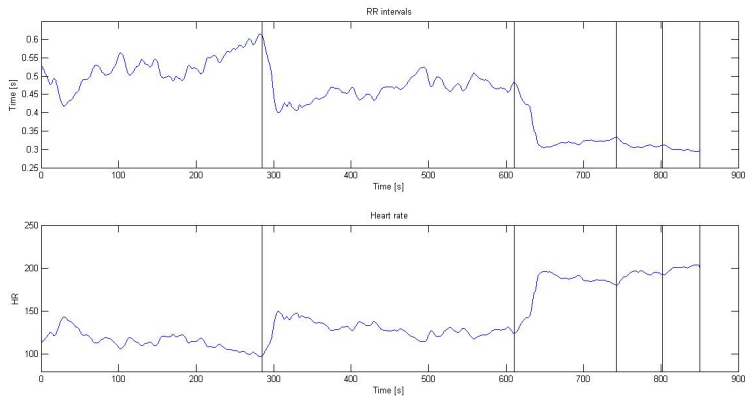
- Cval 7m/s (2min)
- Cval 8m/s (1min)
- Cval 9m/s (1min)



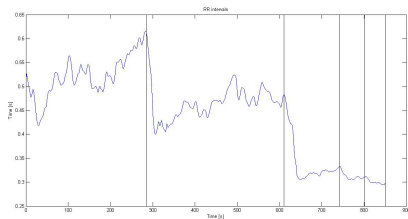
mm/mV 1 square = 0.04 sec/0.1mV



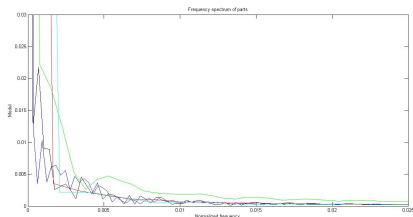
Postupnosť dĺžok RR intervalov



■ Dáta



■ Frekvenčné spektrum dát



- Periodogram Coefficient Of Variation
- H_0 : dáta sú slabo stacionárne
- Predpoklady
 - L intervalov dát s rovnakým počtom vzoriek T
 - intervaly sa navzájom neprekrývajú
 - periodogramy neprekrývajúcich sa intervalov sú nekorelované
- Periogram

$$I_{xx}^T(\lambda_j, l) = \frac{1}{2\pi T} \left| \sum_{t=0}^{T-1} h_t x_t e^{-i\lambda_j t} \right|^2$$

- $\lambda_j = 2\pi j/T, j = 0, \dots, T/2$
- $l = 1, \dots, L$ - počet segmentov
- h_t -vyhladzovacie okno (zlepšenie konvergenzie a zníženie vychýlenia spektrálneho odhadu)

- Odhad spektrálnej hustoty pre frekvenciu λ_j

$$\hat{f}_{xx}(\lambda_j) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L I_{xx}^T(\lambda_j, l)$$

- rozloženie l -tého periodogramu

$$I_{xx}^T(\lambda_j, l) \sim f(\lambda_j) \frac{\chi_2^2}{2}$$

- $j = 1, \dots, T/2 - 1$
- χ_ν^2
 - stredná hodnota: ν a rozptyl 2ν
 - prípad $\nu = 2$ je špeciálnym prípadom exponenciálneho rozloženia

$$f(\zeta) = \zeta e^{-\zeta x}$$

- kde $\zeta = 1/2$, stredná hodnota $\mu = 1/\zeta = 2$ a rozptyl $\sigma^2 = 1/\zeta^2 = 4$

- Koeficient variancie $V = \sigma/\mu$ by mal byť blízky 1 (za platnosti predpokladu slabej stacionarity)
- PCOV testová štatistika

$$C_x(\lambda_j) = \frac{\hat{s}_x(\lambda_j)}{\hat{\mu}_x(\lambda_j)}$$

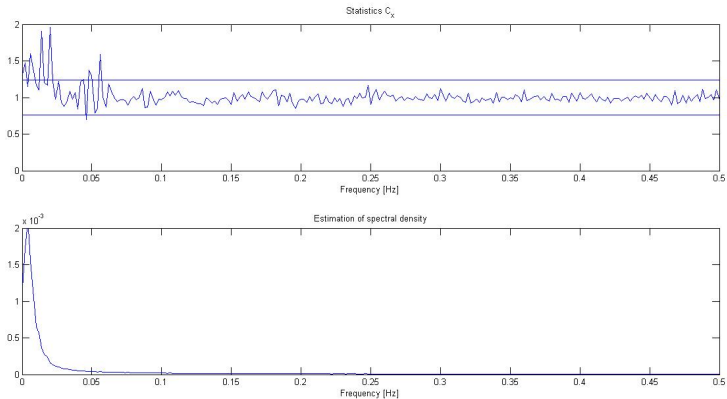
- Interval spoľahlivosti:
 - odhad rozptylu \hat{V} pre intervalov dĺžky n z postupnosti s V

$$\text{var} \hat{V} = (V^2/2n)(1 + 2V^2)$$

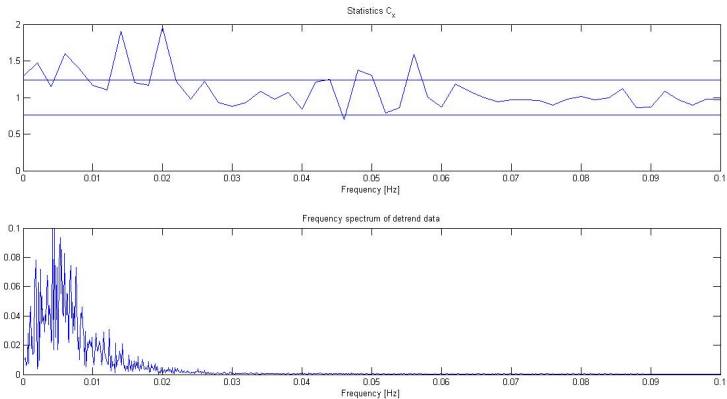
- tento odhad je nevychýlený a riadi sa normálnym rozložením
- pre PCOV $V = 1$ a $n=L$
- za platnosti nulovej hypotézy je interval spoľahlivosti daný:

$$\left(1 - 1.96\sqrt{\frac{3}{2L}}; 1 + 1.96\sqrt{\frac{3}{2L}}\right)$$

AR model: PCOV test

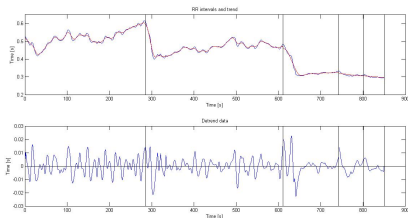


AR model: PCOV test

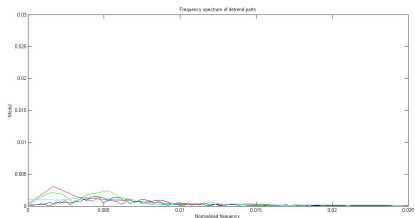


AR model: dáta, trend a dáta po odstránení trendu

■ Dáta, trend a dáta po odstránení trendu

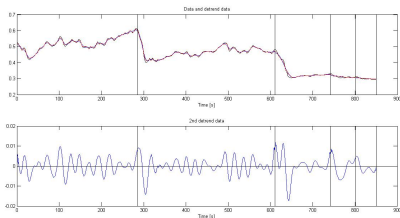


■ Spektrum dát po odstránení trendu

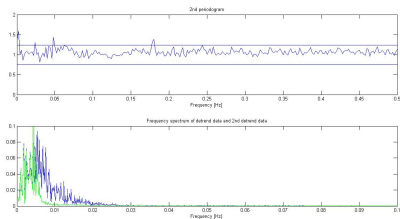


AR model: Zlepšenie stacionarity

- Dáta, trend a dáta po odstránení trendu



- Výsledok štatistiky C_x a zmena spektra detrendovaných dát



AR model: Charakteristika

- AR(24) model

$$y_n = a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + \dots + a_{24} y_{n-24} + e_n$$

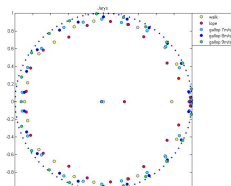
- alebo

$$A(q)y(t) = e(t)$$

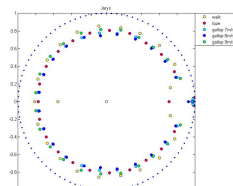
- Prenosová funkcia

$$H(z) = \frac{1}{A(z)} = \frac{z^{24}}{z^{24} + a_1 z^{23} + a_2 z^{22} + \dots + a_{24}}$$

- Najmenšie štvorce

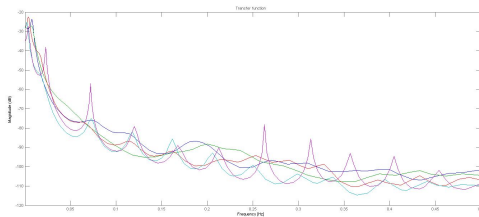


- Yule-Walkerova metóda

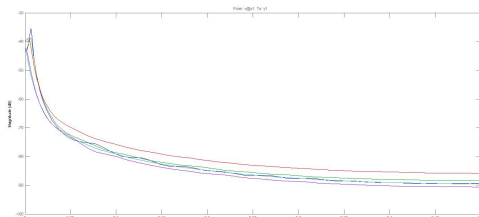


AR model: Prenosová funkcia

- AR(24) model odhadnutý MNČ

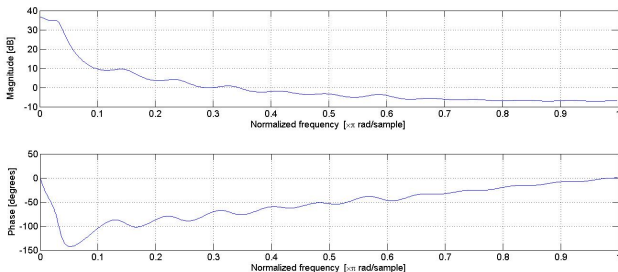


- AR(24) model odhadnutý Yule-Walkerovou metódou



AR model: Frekvenčná odozva

- VLF: 0 – 0.04 Hz - termoregulácia a humorálne faktory
- LF: 0.04 – 0.15 Hz - sympatické a parasympatické zložky a vplyv oscilačného rytmu baroreceptorov
- HF: 0.15 – 0.4 Hz - parasympatické komponenty odrážajúce dýchanie



- ARX(20,20,1)

$$y_n + a_1 y_{n-1} + \dots + a_{20} y_{n-20} = b_0 u_n + b_1 u_{n-1} + \dots + b_{20} u_{n-20} + e_n$$

- alebo

$$A(q)y(t) = B(q)u(t) + e(t)$$

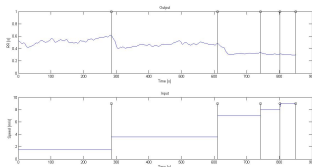
- Prenosová funkcia

- AR podsystem

$$H(z) = \frac{1}{A(z)}$$

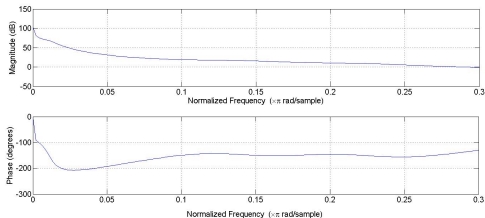
- ARMA podsystem

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

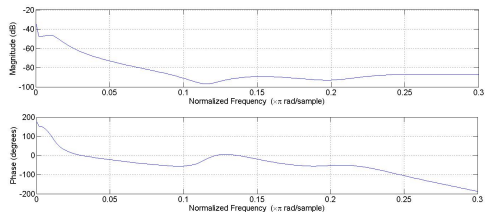


ARX model: Prenosová funkcia

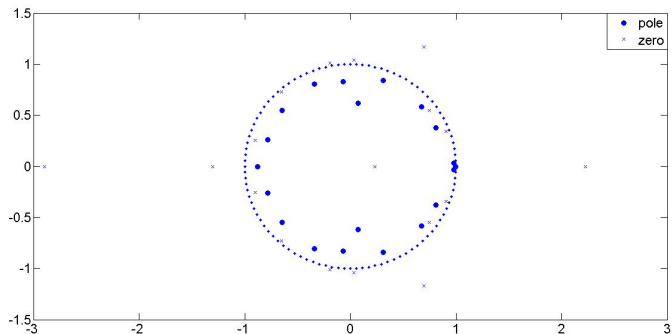
- Prenosová funkcia
 - AR podsystem



- ARMA podsystem



■ Rozloženie núl a pólov



- AR model a trend po Z-transformácii

$$E(z) = Y(z) - H_{LP+BP}Y(z) \quad E(z) = \frac{1}{A(z)}N(z)$$

$$Y(z) = H_{LP+BP}Y(z) + \frac{1}{A(z)}N(z)$$

- ARX model po Z-transformácii

$$Y(z) = \frac{B(z)}{C(z)}U(z) + \frac{1}{C(z)}N(z)$$

- porovnanie

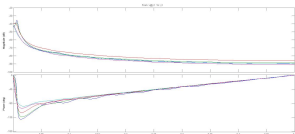
$$\frac{B(z)}{C(z)}U(z) = H_{LP+BP}(z)Y(z)$$

- optimálne kritérium

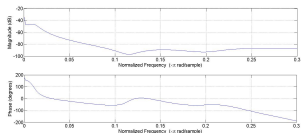
$$H_{LP+BPopt} = \frac{B(z)}{C(z)} \cdot \frac{U(z)}{Y(z)}$$

- $Y(z)$ =Z-transf. pôv. dát, H_{LP+BP} =Z-transf. low-pass a band-pass filtru, $E(z)$ =Z-transf. dát bez trendu, $N(z)$ =Z-transf. bieleho šumu

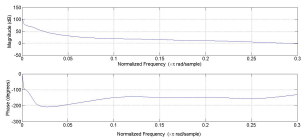
- Prenosová funkcia AR modelu



- Prenosová funkcia ARX modelu - ARMA podsystemu



- Prenosová funkcia ARX modelu - AR podsystemu



- Ďakujem za pozornosť:)

