Detekce změny intenzity v toku událostí

Marie Leváková

Ústav matematiky a statistiky
Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity

13. 9. 2012

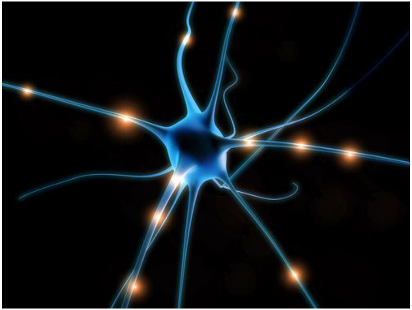
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Obsah

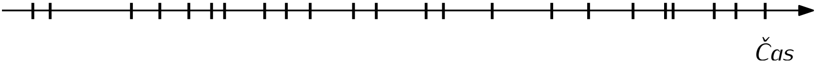
1. Charakteristika problému
2. Modely
3. Metody odhadu
   - Neparametrický přístup
   - Odhad momentovou metodou
   - Odhad metodou maximální věrohodnosti
4. Výsledky

Charakteristika problému

- Problém z oblasti neurofyziologie



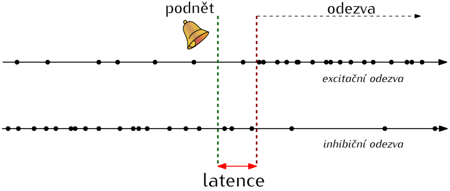
Záznam posloupnosti impulzů:



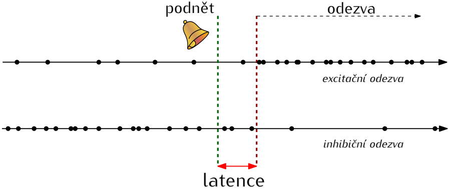
- Náhodný bodový proces
- Při spontánní aktivitě impulzy nastávají v čase náhodně, ale s určitou konstantní intenzitou (frekvencí).

- Náhodný bodový proces
- Při spontánní aktivitě impulzy nastávají v čase náhodně, ale s určitou konstantní intenzitou (frekvencí).
- V jistém nám známém okamžiku nastane jev (podnět), po němž události nastávají s odlišnou intenzitou.

- Náhodný bodový proces
- Při spontánní aktivitě impulzy nastávají v čase náhodně, ale s určitou konstantní intenzitou (frekvencí).
- V jistém nám známém okamžiku nastane jev (podnět), po němž události nastávají s odlišnou intenzitou.
  - zvýšení intenzity – excitační odezva
  - snížení intenzity – inhibiční odezva

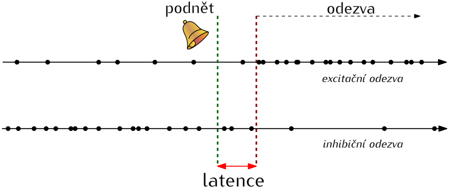


- Náhodný bodový proces
- Při spontánní aktivitě impulzy nastávají v čase náhodně, ale s určitou konstantní intenzitou (frekvencí).
- V jistém nám známém okamžiku nastane jev (podnět), po němž události nastávají s odlišnou intenzitou.
  - zvýšení intenzity – excitační odezva
  - snížení intenzity – inhibiční odezva

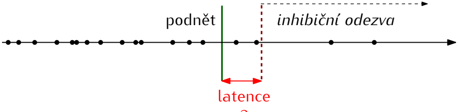


- Změna intenzity se projeví až po jistém zpoždění (latence).

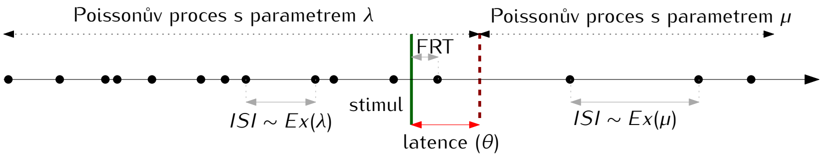
- Náhodný bodový proces
- Při spontánní aktivitě impulzy nastávají v čase náhodně, ale s určitou konstantní intenzitou (frekvencí).
- V jistém nám známém okamžiku nastane jev (podnět), po němž události nastávají s odlišnou intenzitou.
  - zvýšení intenzity – excitační odezva
  - snížení intenzity – inhibiční odezva



- Změna intenzity se projeví až po jistém zpoždění (latence).
- Jak odhadnout délku zpoždění, jestliže došlo k inhibiční odezvě?

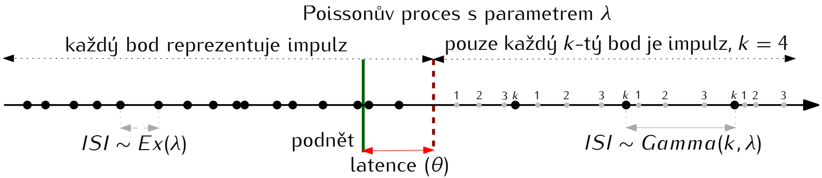


1. MODEL



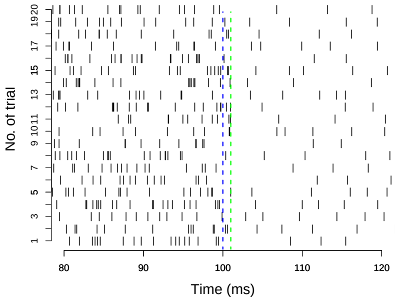
- Před snížením intenzity – Poissonův proces s parametrem λ
- V průběhu snížené intenzity – Poissonův proces s parametrem μ, $\mu < \lambda$

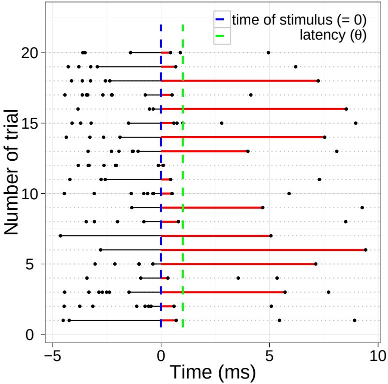
2. MODEL



- Před snížením intenzity – Poissonův proces s parametrem λ
- V průběhu snížené intenzity – Gama proces s parametry k a λ (z původního Poissonova procesu s parametrem λ můžeme pozorovat jen každý k-tý jev)

- Data: *n* nezávislých posloupností impulzů,
- Metody odhadu založeny na *n* nezávislých měřeních doby od stimulu do prvního následujícího impulzu.
- FRT ... *forward recurrence time*

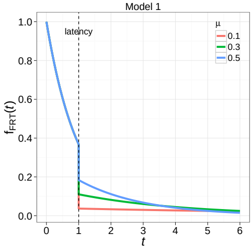




- Značení: θ ... latence

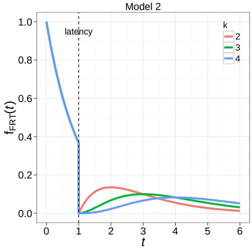
Model 1

$$f_{FRT}(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t < \theta \\ \mu e^{-\lambda\theta - \mu(t-\theta)} & t \geq \theta \end{cases}$$



Model 2

$$f_{FRT}(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t < \theta \\ \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)}(t-\theta)^{k-1} e^{-\lambda t} & t \geq \theta \end{cases}$$



Odhad

- Parametr λ známe.
- Neznámé parametry:
  - θ... chceme odhadnout
  - μ, k... rušivé parametry v modelu 1, resp. modelu 2

Odhad

- Parametr λ známe.
- Neznámé parametry:
    - $\theta\ldots$ chceme odhadnout
    - μ, $k\ldots$ rušivé parametry v modelu 1, resp. modelu 2

- 3 metody odhadu θ:
    1. neparametrická metoda
    2. momentová metoda
    3. metoda maximální věrohodnosti

Neparametrický přístup

- $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ – n nezávislých měření času od podnětu do prvního impulzu.

Neparametrický přístup

- $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ – n nezávislých měření času od podnětu do prvního impulzu.
- Předpoklad: podnět nevyvolá změnu v intenzitě výskytu impulzů → exponenciální rozdělení s distribuční funkcí

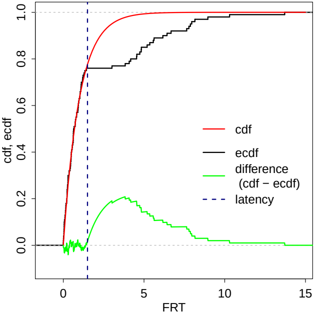
$$F_{FRT}(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}, \qquad t > 0$$

Neparametrický přístup

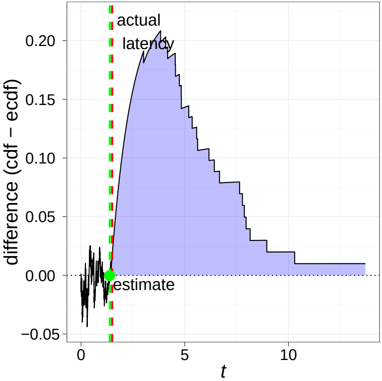
- $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ – n nezávislých měření času od podnětu do prvního impulzu.
- Předpoklad: podnět nevyvolá změnu v intenzitě výskytu impulzů $\rightarrow$ exponenciální rozdělení s distribuční funkcí

$$F_{FRT}(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}, \qquad t > 0$$

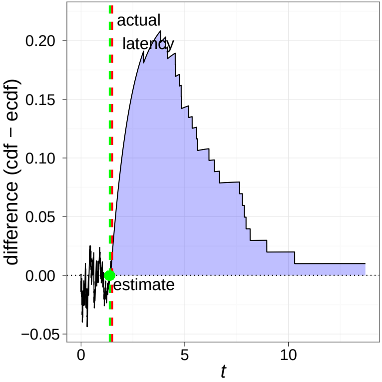
- Vlastnosti rozdílu mezi empirickou a teoretickou distribuční funkcí:
  - Pro $t < \theta$ osciluje kolem nuly.
  - Pro $t \geq \theta$ bývá kladný.



Postup odhadu

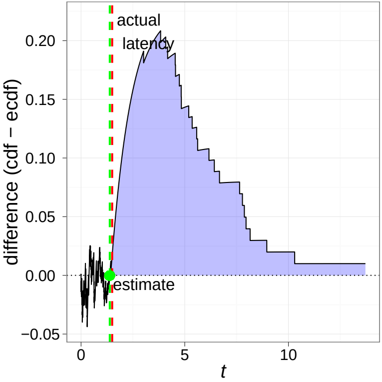


Postup odhadu



1. Naleznou se kladné úseky rozdílu.

Postup odhadu



1. Naleznou se kladné úseky rozdílu.
2. Jako odhad θ se vezme čas, ve kterém začíná poslední kladný úsek.

Odhad momentovou metodou

- Odhady $\hat{\theta}$ a $\hat{\mu}$, resp. $\hat{\theta}$ a $\hat{k}$ jsou řešeními rovnic

$$E(FRT) = \bar{T}$$
$$D(FRT) = S^2$$

Odhad momentovou metodou

- Odhady $\hat{\theta}$ a $\hat{\mu}$, resp. $\hat{\theta}$ a $\hat{k}$ jsou řešeními rovnic

$$E(FRT) = \bar{T}$$
$$D(FRT) = S^2$$

1. Model 1:

$$\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda\theta}\right)\frac{1}{\lambda} + \mathrm{e}^{-\lambda\theta}\frac{1}{\mu} = \bar{T}$$
$$\frac{1}{\lambda^2} + \frac{2(\lambda-\mu)(1+\mu\theta)}{\lambda\mu^2}\mathrm{e}^{-\lambda\theta} - \left(\frac{\lambda-\mu}{\lambda\mu}\mathrm{e}^{-\lambda\theta}\right)^2 = S^2$$

Odhad momentovou metodou

- Odhady $\hat{\theta}$ a $\hat{\mu}$, resp. $\hat{\theta}$ a $\hat{k}$ jsou řešeními rovnic

$$E(FRT) = \bar{T}$$
$$D(FRT) = S^2$$

1. Model 1:

$$\left(1 - e^{-\lambda\theta}\right)\frac{1}{\lambda} + e^{-\lambda\theta}\frac{1}{\mu} = \bar{T}$$
$$\frac{1}{\lambda^2} + \frac{2(\lambda-\mu)(1+\mu\theta)}{\lambda\mu^2}e^{-\lambda\theta} - \left(\frac{\lambda-\mu}{\lambda\mu}e^{-\lambda\theta}\right)^2 = S^2$$

2. Model 2:

$$\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda\theta} + \frac{k}{\lambda}e^{-\lambda\theta} = \bar{T}$$
$$\frac{1}{\lambda^2} + \frac{k-1}{\lambda^2}(2\lambda\theta + k)e^{-\lambda\theta} - \frac{(k-1)^2}{\lambda^2}e^{-2\lambda\theta} = S^2$$

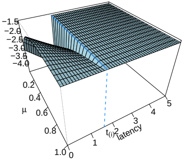
- Ani jedna soustava rovnic nemá analytické řešení.

Odhad metodou maximální věrohodnosti

- Příspěvek i-tého pozorování k celkovému logaritmu věrohodnostní funkce:

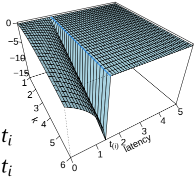
1. Model 1:

$$l_i(\theta, \mu) = \begin{cases} \ln \mu - \lambda\theta - \mu(t_i - \theta) & \theta \leq t_i \\ \ln \lambda - \lambda t_i & \theta > t_i \end{cases}$$

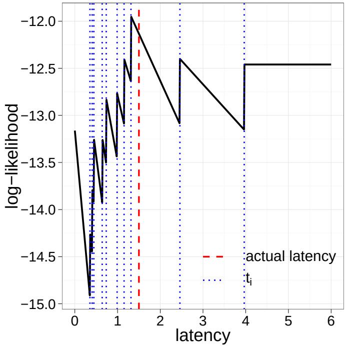


2. Model 2:

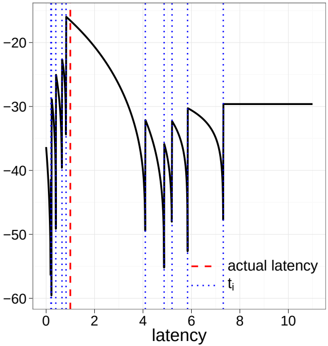
$$l_i(\theta, k) = \begin{cases} (k-1)\ln[\lambda(t_i - \theta)] - \ln\Gamma(k) & \theta \leq t_i \\ 0 & \theta > t_i \end{cases}$$



Vlastnosti logaritmu věrohodnostní funkce

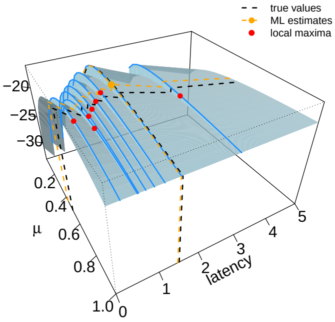


Model 1

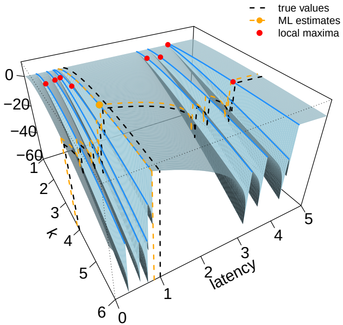


Model 2

- V bodech $\theta = t_i$, $i = 1, \ldots, n$ je nespojitá,
- jinde je vzhledem k θ klesající.



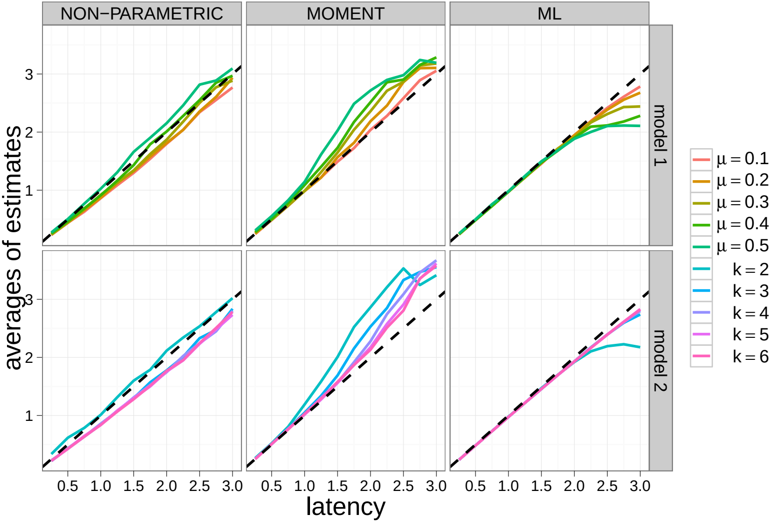
Model 1

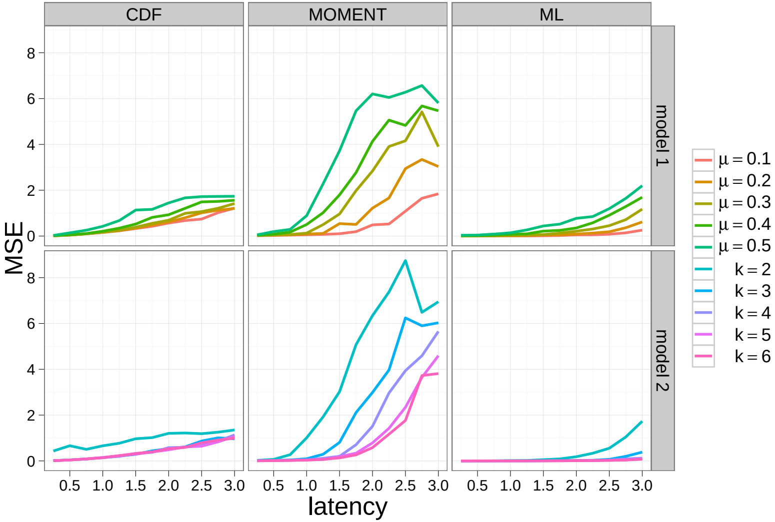


Model 2

- Při maximalizaci věrohodnostní funkce postačuje:
  - Pro každé $i = 1, \ldots, n$ položit $\theta = t_i$ a nalézt maximum vzhledem k μ, resp. k
  - Pozorování t_i odpovídající nejvyššímu maximu je maximálně věrohodným odhadem latence.

Výsledky a závěry




CDF
MOMENT
ML
model 1
model 2
MSE
latency
0
2
4
6
8
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
μ = 0.1
μ = 0.2
μ = 0.3
μ = 0.4
μ = 0.5
k = 2
k = 3
k = 4
k = 5
k = 6

Děkuji za pozornost!

Reference

- Baker, S. N.; Gerstein, G. L (2001) Determination of Response Latency and Its Application to Normalization of Cross-Correlation Measures. *Neural Computation* **13(6)**, 1351–1377.
- Commenges, D.; Seal, J.; Pinatel, F. (1986) Inference about a Change Point in Experimental Neurophysiology. *Mathematical Biosciences* **80(1)**, 81–108.
- Friedman, H. S.; Priebe, C. E. (1998) Estimating stimulus response latency. *Journal of Neuroscience Methods*, **83**, 185–194.
- Tamborrino, M.; Ditlevsen, S.; Lánský, P. (2012) Identification of noisy response latency. *Physical Review E*, **86**.