Celkový pojistný nárok

Silvie Kafková

2012

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Obsah

Obsah

Základní pojmy

- **Riziko**- možnost ztráty, převážně majetkové, ale i poškození zdraví nebo ztráty života.
- **Pojištění**- nástroj finanční eliminace negativních důsledků takového rizika.
- **Pojistná rizika**- pojištění se zabývá pouze jevy náhodného charakteru, jejichž potenciálním důsledkem je vznik nějaké škody.
- **Pojistná událost**- vzniká realizací pojistného rizika.
- **Pojistné plnění**- vyplácí pojišťovna, dojde-li k pojistné události, na kterou má klient sjednanou pojistnou smlouvu. Jedná se vždy o finanční náhrady.

Základní pojmy

- **Pojistitel**- fyzická nebo právnická osoba, která vykonává pojišťovací činnost.
- **Pojistník**- ten, kdo uzavírá pojistnou smlouvu s pojistitelem. Jeho povinností je platit pojistné.
- **Pojištěný**- ten, na jehož rizika se pojištění sjednává. Má právo obdržet od pojišťovny pojistné plnění v případě vzniku pojistné události.

Základní pojmy

- Na pojištění lze pohlížet jako na ochranu proti pojistným rizikům.
- Pojištěný přenese svá rizika, jejichž potenciální škodní důsledky jsou z jeho individuálního hlediska neůnosné, na pojistitele.
- Ten je při dostatečně velkém souboru rizik podobného charakteru schopen celkově převzatá rizika s využitím inkasovaného pojistného nejen zvládat, ale případně je učinit přemětem výnosné komerční činnosti.

Označení

- N ... počet pojistných nároků, které vzniknou za pozorované období (1 rok),
- X_i ... velikost i-tého pojistného nároku,
- S ... velikost celkového pojistného nároku, který pojišťovně vznikne za pozorované období (1 rok). Platí

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N.$$

Předpoklady

- Počet pojistných nároků N je náhodná veličina související s frekvencí pojistných nároků.
- $X_1, X_2, \ldots$ jsou také náhodné veličiny.
- Budeme uvažovat dva základní předpoklady:
    - $X_1,\ X_2, \ldots$ jsou shodně rozdělené náhodné veličiny,
    - $N,\ X_1,\ X_2, \ldots$ jsou vzájemně nezávislé náhodné veličiny.

Momentová vytvořující funkce

- Momentovou vytvořující funkci můžeme definovat pomocí vztahu
$$M_X(t) = \mathrm{E}[\, \mathrm{e}^{tX}],$$
kde X je náhodná veličina.
- Jestliže je výraz na pravé straně v okolí počátku konečný pro všechna t, pak je rozdělení náhodné veličiny X funkcí $M_X(t)$ jednoznačně určeno.

Momentová vytvořující funkce

- $M_X(t) = \mathrm{E}[\, \mathrm{e}^{tX}]$ je momentová vytvořující funkce pro X.
- $M_N(t) = \mathrm{E}[\, \mathrm{e}^{tN}]$ je momentová vytvořující funkce pro N.
- $M_S(t) = \mathrm{E}[\, \mathrm{e}^{tS}]$ je momentová vytvořující funkce pro S.
- $F_S(s)$ označíme distribuční funkci S.

Konvoluce

- Mějme náhodnou veličinu S definovanou jako
$$S = X + Y,$$
kde X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny.
- Distribuční funkci S pak můžeme psát pomocí konvoluce jako
$$F_S(s) = \sum_{y \leq s} F_X(s-y) f_Y(y)$$
pro diskrétní případ a jako
$$F_S(s) = \int_0^s F_X(s-y) f_Y(y) \, \mathrm{d}y$$
ve spojitém případě.

Konvoluce

- Uvažujme náhodnou veličinu S definovanou jako

$$S = X_1 + X_2 + ... + X_n,$$

kde X_i jsou nezávislé pro $i = 1, 2, ..., n$.

- Označme F_i distribuční funkci X_i a $F^{(k)}$ distribuční funkci $X_1 + X_2 + ... + X_k$.
- Pak distribuční funkci S můžeme zapsat pomocí iterace jako

$$\begin{aligned} F^{(2)} &= F_2 * F^{(1)} = F_2 * F_1 \\ F^{(3)} &= F_3 * F^{(2)} \\ &\vdots \\ F^{(n)} &= F_n * F^{(n-1)} \end{aligned}$$

Konvoluce

- Platí tedy

$$P(X_1 + X_2 + \ldots + X_n \leq x) = F * F * \ldots * F(x) = F^{(n)}(x),$$

kde

$$F^{(0)}(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}.$$

- A pro pravděpodobnostní funkci

$$P(X_1 + X_2 + \ldots + X_n = x) = p * p * \ldots * p(x) = p^{(n)}(x),$$

kde

$$p^{(0)}(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}.$$

Obsah

Charakteristiky S

Definujme tedy celkový pojistný nárok S jako

$$S = X_1 + X_2 + \ldots + X_N.$$

S využitím uvedených předpokladů o nezávislosti dostaneme:

- střední hodnotu S

$$\mathrm{E}[S] = \mathrm{E}[\,\mathrm{E}[S|N]] = \mathrm{E}[\,\mathrm{E}[X]N] = \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[N]$$

- rozpyl S

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(S) &= \mathrm{E}[\,\mathrm{Var}(S|N)] + \mathrm{Var}(\,\mathrm{E}[S|N]) \\ &= \mathrm{E}[N\,\mathrm{Var}(X)] + \mathrm{Var}(\,\mathrm{E}[X]N) \\ &= \mathrm{E}[N]\,\mathrm{Var}(X) + \mathrm{E}[X]^2\,\mathrm{Var}(N)\end{aligned}$$

Charakteristiky S

- Momentová vytvořující funkce

$$
\begin{aligned}
M_S(t) &= \mathrm{E}[\,\mathrm{e}^{tS}] = \mathrm{E}[\,\mathrm{E}[\,\mathrm{e}^{tS}|N]] \\
&= \mathrm{E}[M_X(t)^N] = \mathrm{E}[\,\mathrm{e}^{N \log M_X(t)}] \\
&= M_N[\log M_X(t)].
\end{aligned}
$$

Distribuční funkce S

- K odvození distribuční funkce S využijeme celkovou pravděpodobnost

$$
\begin{aligned}
F_S(x) &= \mathrm{P}(S \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}(S \leq x | N = n)\, \mathrm{P}(N = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n \leq x)\, \mathrm{P}(N = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}(x)\, \mathrm{P}(N = n).
\end{aligned}
$$

- Podobně pro pravděpodobnostní funkci S

$$
p_S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)}(x)\, \mathrm{P}(N = n)
$$

Rozdělení N

- Mezi nejčastější rozdělení N patří
  - Poissonovo rozdělení
  - binomické rozdělení
  - negativní binomické rozdělení
- Je-li nutné rozhodnout v konkrétní situaci, jaké rozdělení pro modelování počtu pojistných nároků použít, může být vodítkem vztah mezi odhadnutou střední hodnotou a odhadnutým rozptylem.

Poissonovo rozdělení *N*

- Pro Poissonovo rozdělení platí

$$P(N = n) = \frac{\lambda^n \, \mathrm{e}^{-\lambda}}{n!} \qquad n = 0, 1, 2, ...,$$

  kde $\lambda > 0$.
- Platí $\mathrm{E}[N] = Var(n) = \lambda$.
- Jestliže má N Poissonovo rozložení, pak rozložení S nazýváme **složené Poissonovo rozložení**.

Obsah

Složené Poissonovo rozložení

Má-li S složené Poissonovo rozložení, pak se dá ukázat, že

- $\mathrm{E}[S] = \lambda\, \mathrm{E}[X]$
- $\mathrm{Var}[S] = \lambda\, \mathrm{E}[X^2]$
- Použijeme-li momentovou vytvořující funkci Poissonova rozložení

$$M_N(t) = \mathrm{e}^{\lambda(e^t - 1)},$$

pak

$$M_S(t) = e^{\lambda[M_X(t) - 1]}.$$

Vlastnosti složeného Poissonova rozložení

Věta

Nechť $S_1, S_2, ..., S_m$ jsou vzájemně nezávislé náhodné veličiny takové, že S_i má složené Poissonovo rozložení s parametrem λ_i a distribuční funkcí $F_i(x)$, kde $i = 1, 2, ..., m$. Pak $S = S_1 + S_2 + ... + S_m$ má složené Poissonovo rozložení s parametrem

$$\lambda = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$$

a distribuční funkcí

$$F_S(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{\lambda} F_i(x).$$

Vlastnosti složeného Poissonova rozložení

Vysvětlení:

- Jestliže **máme** m **pojistných portfólií** takových, že celkový pojistný nárok každého z těchto portfólií má složené Poissonovo rozložení a zároveň platí, že tato portfólia jsou vzájemně nezávislá, pak cellkový pojistný nárok, který vznikne ze všech těchto portfólií bude mít také **složené Poissonovo rozdělení.**
- Můžeme také uvažovat **jedno pojistné portfólio vytvořené na dobu** m **let**. Předpokládejme, že celkové pojistné nároky v jednotlivých letech jsou vzájemně nezávislé a mají složené Poissonovo rozložení. Pak **celkové pojistné nároky plynoucí z tohoto portfólia za celé období** m **let** mají také složené Poissonovo rozložení.

Vlastnosti složeného Poissonova rozložení

Věta

Nechť $S = x_1 N_1 + x_2 N_2 + ... + x_m N_m$, kde x_i je individuální výše pojistné škody a N_i je počet případů, kdy dojde k dosažení této škody. Nechť S má složené Poissonovo rozložení s parametrem λ a pravděpodobnostní funkcí $\pi_i = p(x_i)$. Pak

a) *$N_1, N_2, ..., N_m$ jsou vzájemně nezávislé.*

b) *N_i má Poissonovo rozložení s parametrem $\lambda_i = \lambda \pi_i$, kde $i = 1, 2, ..., m$.*

Obsah

Problém

Předpokládejme případ, kdy celkový pojistný nárok S má složené Poissonovo rozložení s parametrem $\lambda = 0.6$*. Individuální výše pojistných nároků, které se pro dané pojištění vyskytují, jsou 1, 2, 3 s příslušnými pravděpodobnostmi výskytu 0.2, 0.4, 0.4. Na základě těchto údajů, které pojišťovna má, potřebujeme odhadnout pravděpodobnostní funkci* $f_S(x)$ *celkového pojistného nároku.*

Řešení pomocí vět o složeném Poissonově rozložení

Vyjdeme z toho, že

$$S = x_1 N_1 + x_2 N_2 + x_3 N_3 = 1N_1 + 2N_2 + 3N_3.$$

Hodnoty pravděpodobnostní funkce celkového pojistného nároku

$\mathbf{x}$	$\mathbf{P(N_1 = x)}$	$\mathbf{P(2N_2 = x)}$	$\mathbf{P(3N_3 = x)}$	$\mathbf{P(N_1 + 2N_2 = x)}$	$\mathbf{P(N_1 + 2N_2 + 3N_3 = x) = f_S(x)}$
0	0.8869	0.7866	0.7866	0.6977	0.5488
1	0.1064	0	0	0.0837	0.0659
2	0.0064	0.1888	0	0.1725	0.1375
3	0.0003	0	0.1888	0.0203	0.1477
4	0.0000	0.0227	0	0.0213	0.0326
5	0.0000	0	0	0.0025	0.0345
6	0.0000	0.0018	0.0227	0.0018	0.0210

Řešení pomocí konvoluce

Využíváme vztahu

$$p^{(n+1)}(x) = \sum_{y} p(y)p^{(n)}(x-y)$$

a dále pak pro pravděpodobnostní funkci

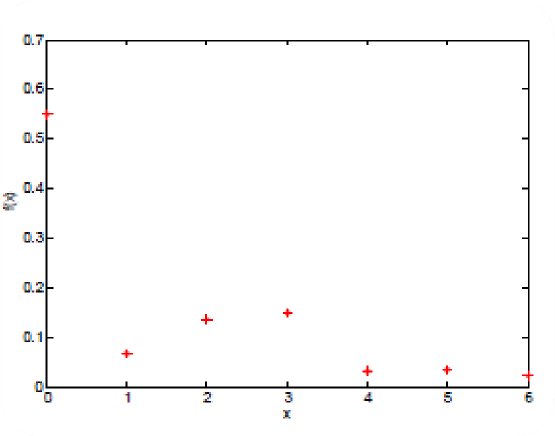
$$f_S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)}(x)P(N=n).$$

Hodnoty pravděpodobnostní funkce celkového pojistného nároku

x	$p^{(0)}(x)$	$p(x)$	$p^{(2)}(x)$	$p^{(3)}(x)$	$p^{(4)}(x)$	$p^{(5)}(x)$	$p^{(6)}(x)$	$f_S(x)$
0	1	0	0	0	0	0	0	0.5488
1	0	0.2	0	0	0	0	0	0.0659
2	0	0.4	0.04	0	0	0	0	0.1357
3	0	0.4	0.16	0.008	0	0	0	0.1477
4	0	0	0.32	0.048	0.0016	0	0	0.0326
5	0	0	0.32	0.144	0.0128	0.003	0	0.0345
6	0	0	0.16	0.256	0.0512	0.0032	0.0001	0.0210

Zobrazení $f_S(x)$

Graf pravděpodobnostní funkce celkového pojistného nároku S



Reference

- Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman J.C., Jones D.A., Nesbitt C.J. :
  Actuarial Mathematics
  The Society of Actuaries, Schaumburg, Illinois 1997
- Mikosch T.:
  Non-Life Insurance Mathematics
  Springer, 2006
- Cipra T.:
  Pojistná matematika - teorie a praxe
  Ekopress s.r.o., 1999